



Schémas Volumes Finis en mécanique des fluides complexes

Stella Krell

► To cite this version:

Stella Krell. Schémas Volumes Finis en mécanique des fluides complexes. Mathématiques [math]. Université de Provence - Aix-Marseille I, 2010. Français. NNT : . tel-00524509

HAL Id: tel-00524509

<https://theses.hal.science/tel-00524509>

Submitted on 8 Oct 2010

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

**THESE DE DOCTORAT DE
L'UNIVERSITE DE PROVENCE**

Spécialité :
Mathématiques

Présentée par
Stella Krell

Pour obtenir le grade de
**DOCTEUR EN SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ
DE PROVENCE**

Sujet de thèse
**Schémas Volumes Finis
en mécanique des fluides complexes.**

Soutenue publiquement le **8 septembre 2010** devant le jury composé de

Mr Franck	BOYER	Université Paul Cézanne	Directeur
Mr Alexandre	ERN	ENPC, Université Paris-Est	Rapporteur
Mr Thierry	GALLOUET	Université de Provence	Examineur
Mr Martin	GANDER	Université de Genève	Rapporteur
Mme Laurence	HALPERN	Université Paris-XIII	Examinatrice
Mme Florence	HUBERT	Université de Provence	Directrice
Mr Gianmarco	MANZINI	IMATI-CNR Pavia	Examineur
Mr Pascal	OMNES	CEA de Saclay	Examineur

Remerciements

Mes premiers remerciements sont, bien entendu, destinés à Franck Boyer et Florence Hubert, mes deux directeurs de thèse. Sans eux, tout ceci n'aurait pas été possible. Ils m'ont apporté un soutien moral et scientifique constant. Leurs apports ont été très complémentaires, ceci m'a permis d'avoir une aide permanente. Je les remercie également de leur confiance et de leurs conseils avisés tout au long de cette thèse. Je sais que je peux compter sur eux. Ce fut pour moi un réel plaisir de travailler avec eux. Une excellente relation, qui a souvent dépassé le cadre strictement scientifique de la thèse, s'est installée entre nous.

Je remercie tout d'abord Gianmarco Manzini pour avoir accepté de faire partie de mon jury, pour sa collaboration dans l'écriture de l'article sur les schémas DDFV pour le problème de Stokes en 3D et pour avoir réalisé la programmation du code numérique. Travailler avec lui fut très agréable et très enrichissant.

Je souhaite remercier Thierry Gallouët, pour avoir accepté de faire partie de mon jury. Les développements sur les méthodes volumes finis de Robert Eymard, Thierry Gallouët, Raphaële Herbin et Jean-Claude Latché m'ont fortement influencée et été très utiles.

Je tiens à remercier Alexandre Ern et Martin Gander de m'avoir fait l'honneur de rapporter ma thèse. Je les remercie pour leurs remarques constructives et le regard avisé qu'ils ont porté sur la thèse.

Je remercie également les autres membres de mon jury : Laurence Halpern, pour notre collaboration en cours sur la prise en compte des conditions de transmission d'ordre élevé dans l'algorithme de Schwarz, Pascal Omnès pour toutes les conversations amicales et mathématiques que nous avons eues et pour ses différents travaux sur les méthodes DDFV. Leur présence témoigne à mes yeux de l'intérêt qu'ils ont manifesté pour mes travaux. Je souhaite qu'ils trouvent ici l'expression de ma reconnaissance.

Je remercie chaleureusement tous les membres du LATP qui ont contribué à rendre agréable mon séjour au CMI, par leur sympathie et la bonne ambiance qu'ils ont apportée : Claudia, Emmanuel, Pierre, Guillemette, Pascal, Olivier, Nicolas, Catherine, Assia, Yves, Jérôme, Yannick, Patricia. Merci aux thésards : Clément, Sébastien, Fanny, Walid, Ismaël, Jean-Christophe, Mickaël, Federico et Jonathan qui a eu la gentillesse de garder Cara malgré ses pleurs... Je remercie aussi toute l'équipe administrative et technique du laboratoire pour leur aide. Un merci particulier à Marie-Christine et Valérie.

Merci à ma famille de me soutenir depuis si longtemps déjà. Merci à ma mère qui a été là dès les premiers instants, qui est encore à l'écoute de mes problèmes et m'aide à surmonter les petits aléas de la vie. Merci aussi à ma soeur, à mes grands-parents et à mon père.

Merci à mes amis corses que je vois parfois quand je rentre et à mes amis de l'ENS Ker Lann : Ludovic, Marie, Lionel, Hugues, Jeff et Solène, Thiphaine, Clément, Mathilde et tous les autres.

Merci à Cara pour ses réveils aux milieux de la nuit, ses rendez-vous chez le véto, qui m'ont permis de me changer les idées.

Je conclurai mes remerciements par Sebastian qui me supporte chaque jour. Ce n'est pas toujours facile. Sans lui, ce manuscrit n'aurait jamais vu le jour, il a toujours cru en moi, il m'a toujours motivée, poussée à dépasser mes limites. Il m'a également soutenue, réconfortée, épaulée. Un grand merci pour tout. J'ai une pensée également pour sa famille.

Table des matières

Introduction	9
---------------------	----------

Partie 1

Discrétisation DDFV des problèmes de diffusion scalaire anisotrope

Chapitre I	Description générale des méthodes DDFV	31
I.1	Construction des maillages DDFV	31
I.2	Espaces d'approximation et définitions des projections sur les maillages DDFV	36
I.3	Définitions des opérateurs discrets	37
I.4	Relation de dualité : Formule de Green	38
I.5	Résultats sur les opérateurs discrets et les projections	39
Chapitre II	Problèmes de diffusion anisotrope avec des conditions aux bords mixtes	43
II.1	Problème de diffusion/transmission anisotrope	44
II.2	Gradient discret sur les demi-diamants	44
II.2.1	Définition du gradient discret sur les demi-diamants	44
II.2.2	Définition et propriétés des flux numériques	45
II.2.3	Lien avec les travaux antérieurs [Her03, BH08]	47
II.3	Principe du schéma DDFV pour le problème de diffusion anisotrope	48
II.4	Propriétés du gradient discret sur les demi-diamants	52
II.5	Estimation d'erreur pour le schéma DDFV	53
II.6	Théorème de trace	56
II.7	Erreur de consistance	60
II.8	Fin de la démonstration de l'estimation d'erreur (Théorème II.12)	65
II.9	Tests numériques	66
II.9.1	Test 1 - Solution raide - Tenseur anisotrope constant	66
II.9.2	Test 2 - Solution polynomiale - Tenseur anisotrope discontinu	67
II.10	Quelques remarques sur l'implémentation	69
II.10.1	Implémentation de VF4 pour le problème de Laplace	70
II.10.2	Implémentation de DDFV pour le problème de Laplace	70
II.10.3	Prise en compte du tenseur anisotrope régulier	72
II.10.4	Prise en compte du tenseur anisotrope constant par maille primale	72
II.11	Conclusions	73

Chapitre III	Algorithmes de Schwarz sans recouvrement dans le cadre DDFV	75
III.1	Maillages compatibles. Maillage composite.....	76
III.2	Présentation du solveur itératif.....	78
III.3	Construction préliminaire.....	79
III.4	Analyse de la convergence de la méthode itérative.....	82
III.5	Résultats numériques.....	87
III.5.1	Remarques sur l'initialisation de l'algorithme.....	87
III.5.2	Présentation des domaines et des maillages utilisés.....	87
III.5.3	Convergence de l'algorithme de Schwarz utilisé comme solveur.....	89
III.5.4	Remarque sur les autres prises en compte des conditions de Fourier possibles.....	90
III.5.5	Influence de la forme du domaine de décomposition.....	91
III.5.6	Influence du paramètre des conditions de Fourier λ	92
III.6	Application au préconditionnement du gradient conjugué.....	93
III.7	Conclusions et perspectives.....	95

Partie 2

Discrétisation DDFV des problèmes de Stokes 2D

Chapitre IV	Introduction des méthodes DDFV pour Stokes	99
IV.1	Localisation des inconnues et définition des projections sur les maillages.....	99
IV.2	Définitions des opérateurs discrets.....	100
IV.3	Définitions des produits scalaires et normes associées.....	102
IV.4	Relation de dualité : Formule de Green.....	102
IV.5	Stabilisation de type Brezzi-Pitkäranta.....	103
IV.6	Propriétés des opérateurs discrets.....	104
Chapitre V	Le problème de Stokes standard	109
V.1	Principe du schéma DDFV stabilisé (S-DDFV) pour le problème de Stokes standard.....	109
V.2	Existence et unicité de la solution du schéma S-DDFV.....	111
V.3	Estimations d'erreur pour le schéma S-DDFV.....	113
V.3.1	Première estimation.....	113
V.3.2	Erreur de consistance.....	117
V.3.3	Fin de la démonstration du Théorème V.4.....	120
V.3.4	Stabilité du schéma S-DDFV.....	120
V.3.5	Estimations d'erreur optimale pour le schéma S-DDFV.....	122
V.4	Tests numériques.....	123
V.4.1	Test 1 - Tourbillons de Green-Taylor.....	124
V.4.2	Test 2 - Solutions polynomiales.....	124
V.4.3	Test 3 - Cavité entr��n��e.....	126
V.4.4	Quelques remarques sur l'implémentation.....	129
V.5	Conclusions.....	130
Chapitre VI	Le problème de Stokes avec une viscosité variable régulière	131
VI.1	Principe du schéma DDFV pour le problème de Stokes.....	131
VI.2	Résultats sur le tenseur des taux de déformation.....	132
VI.3	Stabilité du schéma DDFV.....	135
VI.4	Estimations d'erreurs du schéma DDFV.....	138
VI.4.1	Erreur de consistance de \mathbf{R}_σ^u	140
VI.4.2	Fin de la démonstration du Théorème VI.10.....	142

VI.5	Lien avec le schéma MAC	143
VI.6	Tests numériques	146
VI.6.1	Test 1 - Solutions polynomiales - Viscosité non constante	146
VI.6.2	Test 2 - Viscosité discontinue	148
VI.6.3	Test 3 - Viscosité discontinue et tenseur des taux de déformation discontinu	149
VI.6.4	Quelques remarques sur l'implémentation	151
VI.7	Conclusions	151
Chapitre VII	Le problème de Stokes avec une viscosité discontinue	153
VII.1	Construction de nouveaux opérateurs discrets	154
VII.1.1	Rappel sur les problèmes de transmission scalaire	154
VII.1.2	Opérateurs sur les quarts de diamant dans le cas vectoriel	155
VII.1.3	Détermination des inconnues artificielles	156
VII.1.4	Exemple de calcul des inconnues artificielles	159
VII.1.5	Propriétés des inconnues artificielles	160
VII.1.6	Définitions des produits scalaires et normes associées sur les quarts de diamant	165
VII.2	Définition du nouveau terme de stabilisation	165
VII.3	Principe du schéma m-DDFV	166
VII.4	Résultats sur les tenseurs des taux de déformation discrets	167
VII.5	Stabilité du schéma m-DDFV	170
VII.6	Estimations d'erreurs du schéma m-DDFV	173
VII.6.1	Erreur de consistance en pression	176
VII.6.2	Erreur de consistance en vitesse	177
VII.6.3	Les sauts de pression entre quarts de diamant	186
VII.6.4	Fin de la démonstration du Théorème VII.25	187
VII.7	Tests numériques	189
VII.7.1	Test 1 - Viscosité discontinue et pression régulière	190
VII.7.2	Test 2 - Viscosité discontinue et pression discontinue	191
VII.7.3	Quelques remarques sur l'implémentation	194
VII.8	Conclusions et perspectives	196
Chapitre VIII	Le problème de Navier-Stokes instationnaire	197
VIII.1	Principe du schéma DDFV pour le problème de Navier-Stokes	197
VIII.2	Approximation du terme de convection non-linéaire	198
VIII.2.1	Approximation des flux normaux de la vitesse	198
VIII.2.2	Discrétisation du terme non-linéaire	200
VIII.3	Propriété du schéma DDFV pour le problème de Navier-Stokes	201
VIII.4	Conclusions et perspectives	203

Partie 3

Problème de Stokes sur des maillages 3D

Chapitre IX	Introduction aux méthodes DDFV en 3D	207
IX.1	Construction des maillages	207
IX.2	Opérateurs discrets dans le cas scalaire	213
Chapitre X	Méthode DDFV 3D pour le problème de Stokes	215
X.1	Localisation des inconnues et définition des projections sur les maillages 3D	216
X.2	Définition des opérateurs discrets	216
X.3	Relation de dualité : Formule de Green	217

X.4	Stabilisation 3D de type Brezzi-Pitkäranta.....	218
X.5	Schéma DDFV 3D pour le problème de Stokes.....	219
X.6	Résultats sur les opérateurs discrets dans le cadre vectoriel.....	219
X.7	Stabilité du schéma DDFV 3D.....	226
X.8	Estimations d'erreurs du schéma DDFV 3D.....	227
X.8.1	Erreur de consistance $R_{\mathcal{D},T_{\mathcal{D}}}^u$ en vitesse.....	230
X.8.2	Erreur de consistance $R_{\mathcal{D},T_{\mathcal{D}}}^p$ en pression.....	231
X.8.3	Fin de la démonstration du Théorème X.22.....	232
X.9	Tests numériques.....	233
X.10	Conclusions et perspectives.....	235
Conclusions et perspectives		237
Annexe		239

Introduction

L'objectif de ce travail est de proposer et d'étudier des schémas numériques de type volumes finis adaptés à la simulation de certains problèmes intervenant en mécanique des fluides. Le point commun de tous les problèmes cités ci-dessous, du point de vue de la résolution par volumes finis, réside dans la nécessité d'approcher toutes les composantes du gradient de la solution.

Diffusion anisotrope : On s'intéresse tout d'abord à l'écoulement d'un fluide en régime permanent dans un milieu poreux 2D hétérogène, caractérisé par la perméabilité de ses différentes strates. L'écoulement est régi par la loi de Darcy qui relie la vitesse de filtration \mathbf{u} du fluide au gradient de pression p :

$$\mathbf{u} = -A\nabla p,$$

où A est le tenseur de perméabilité. Ce coefficient A est variable et dépend du milieu poreux, il peut donc présenter des discontinuités dans les milieux hétérogènes. Dans un milieu isotrope, ce coefficient est un scalaire, tandis que dans un milieu anisotrope, c'est un tenseur symétrique. Ainsi grâce à la conservation de la masse, on obtient le problème suivant :

$$-\operatorname{div}(A\nabla p) = f,$$

où f est une fonction qui modélise les sources de masse (puits, ...). On étudie la discrétisation de ce type de problèmes pour des conditions aux bords mixtes de type Dirichlet/Fourier (Chapitre II), afin de construire ensuite des algorithmes de Schwarz discret sans recouvrement avec des conditions de transmission de type Fourier (Chapitre III).

Problème de Stokes : Dans une deuxième partie, on se propose de discrétiser des problèmes de Stokes en 2D de la forme :

$$\operatorname{div}(-2\eta(x)\mathbf{D}\mathbf{u} + p\operatorname{Id}) = \mathbf{f}, \quad \text{et} \quad \operatorname{div}(\mathbf{u}) = 0,$$

où $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^2$ est la vitesse du fluide, $\mathbf{D}\mathbf{u} = \frac{1}{2}(\nabla\mathbf{u} + {}^t\nabla\mathbf{u})$ le tenseur des taux de déformation et p la pression du fluide. L'originalité de ces modèles tient dans le fait que la viscosité η peut dépendre de la variable spatiale x . Noter que dans les modèles physiques, la viscosité dépend d'autres caractéristiques de l'écoulement comme la densité, la température, par l'intermédiaire du couplage avec d'autres équations. De plus, dans de nombreuses simulations numériques, les écoulements diphasiques sont modélisés par un ensemble unique de lois de conservation sur l'ensemble du domaine de calcul. Une telle approche conduit à des équations de Navier-Stokes avec une densité et une viscosité variables et éventuellement discontinues. Les équations de Stokes avec une viscosité discontinue peuvent alors être considérées comme un premier pas dans l'étude d'écoulements diphasiques visqueux. On commencera par présenter le cas d'une viscosité constante qu'on prendra égale à 1 (Chapitre V), ainsi le problème se ramène à $-\Delta\mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f}$. On abordera ensuite le cas d'une viscosité dépendant de la variable spatiale de manière régulière (Chapitre VI et Chapitre X en 3D) et pour finir la viscosité sera autorisée à présenter des discontinuités (Chapitre VII).

Dans la suite de cette introduction, je donne une description rapide des différents chapitres du mémoire, certaines notations et énoncés seront précisés dans les chapitres concernés. En annexe, je rassemble la plupart des notations de ce manuscrit. On précise que l'essentiel du manuscrit se place en 2D à l'exception de la Partie 3 qui sera en 3D.

On commence par rappeler le principe des méthodes volumes finis à deux points pour approcher la solution de l'équation de Laplace $-\Delta u = f$ sur un domaine Ω de \mathbb{R}^2 avec des conditions aux bords de Dirichlet homogène : on se donne une partition de $\bar{\Omega} = \bigcup_{\kappa \in \mathfrak{M}} \kappa$ en fermés polygonaux d'intérieur disjoint appelés volumes de contrôle.

A chacun de ces volumes de contrôle κ , on associe un point $x_\kappa \in \Omega$ (x_κ n'est pas forcément dans κ) et on cherche une approximation u_κ de la solution du problème au point x_κ . On obtient alors un schéma numérique en intégrant sur chaque volume de contrôle l'équation de Laplace $-\int_\kappa \Delta u \, dx = \int_\kappa f \, dx$. La formule de Green nous amène à approcher, sur chaque arête $\sigma \subset \partial\kappa$ du maillage, les flux normaux $-\int_\sigma \nabla u(s) \cdot \vec{n}_{\sigma\kappa} \, ds$ où $\vec{n}_{\sigma\kappa}$ est la normale à σ sortant du volume de contrôle κ . Si la solution u est régulière, par un développement de Taylor (voir [EGH00]), on vérifie que le quotient différentiel $m_\sigma \frac{u(x_\kappa) - u(x_\mathcal{L})}{d_{\kappa,\mathcal{L}}}$ est une approximation à l'ordre 1 de $-\int_\sigma \nabla u \cdot \vec{\tau}_{\kappa,\mathcal{L}} \, ds$ où $\sigma = \kappa \cap \mathcal{L}$ est l'arête entre les volumes de contrôles κ et \mathcal{L} , $\vec{\tau}_{\kappa,\mathcal{L}}$ est le vecteur unitaire orienté de x_κ vers $x_\mathcal{L}$ et $d_{\kappa,\mathcal{L}} = d(x_\kappa, x_\mathcal{L})$. En particulier le flux normal est bien approché par ce quotient différentiel à condition que les vecteurs $\vec{n}_{\sigma\kappa}$ et $\vec{\tau}_{\kappa,\mathcal{L}}$ soient colinéaires ou en d'autres termes que la droite $(x_\kappa x_\mathcal{L})$ soit orthogonale à l'arête $\sigma = \kappa \cap \mathcal{L}$. Les approches volumes finis à deux points [EGH00] consistent alors à travailler avec des maillages respectant cette condition d'orthogonalité, ces maillages sont dits *admissibles* et le schéma (appelé VF4) pour le problème de Laplace avec des conditions aux bords de Dirichlet homogène s'écrit alors :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } u^\mathfrak{M} = (u_\kappa)_{\kappa \in \mathfrak{M}} \in \mathbb{R}^\mathfrak{M} \text{ tel que} \\ \forall \kappa \in \mathfrak{M}, \quad \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_\kappa} F_{\kappa,\sigma}(u^\mathfrak{M}) = \int_\kappa f(x) \, dx, \\ \text{avec } F_{\kappa,\sigma}(u^\mathfrak{M}) = -m_\sigma \frac{u_\mathcal{L} - u_\kappa}{d_{\kappa,\mathcal{L}}}, \text{ si } \sigma = \kappa | \mathcal{L} \in \mathcal{E}_{int}, \\ \text{avec } F_{\kappa,\sigma}(u^\mathfrak{M}) = -m_\sigma \frac{-u_\kappa}{d_{\kappa,\sigma}}, \text{ si } \sigma \in \mathcal{E}_{ext}. \end{array} \right. \quad (\text{VF4})$$

Cette condition d'orthogonalité permet donc d'obtenir une bonne approximation de la composante du gradient de la solution dans la direction de deux centres voisins sur chaque arête du maillage. Notons que, si le maillage \mathfrak{M} est composé de triangles, une famille $(x_\kappa)_\kappa$ qui rend le maillage admissible n'est autre que la famille des centres des cercles circonscrits des mailles (si un triangle a un angle obtus alors le centre du cercle circonscrit est à l'extérieur du triangle) ; pour un maillage cartésien, plusieurs choix sont possibles, par exemple la famille des barycentres ; on peut également utiliser les maillages de Delaunay-Voronoï, en effet le maillage de Delaunay donne la triangulation du domaine et les sommets du maillage de Voronoï donnent les points $(x_\kappa)_\kappa$. Malheureusement, dans de nombreuses situations cette condition d'orthogonalité peut ne pas être vérifiée :

- Si on utilise un maillage provenant d'une décomposition de domaines, dont les sous-domaines sont maillés indépendamment les uns des autres.
- Sur des maillages localement raffinés avec des mailles non-conformes, même avec des volumes de contrôle rectangulaires.

De plus, dès que l'on souhaite discrétiser une équation de diffusion plus générale $-\text{div}(A(x)\nabla u) = f$ où A est une matrice 2×2 symétrique définie positive, la condition géométrique nécessaire à la consistance du schéma à deux points devient une condition de A-orthogonalité $A^{-1}(x_\kappa x_\mathcal{L}) \perp \sigma$. Lorsque la matrice d'anisotropie A est à coefficients constants, il peut exister des maillages qui vérifient ces conditions mais dès que les coefficients A varient, il est illusoire d'espérer construire un maillage adapté au problème.

Une façon de lever cette condition d'orthogonalité est de trouver une approximation du gradient dans une direction transverse à $\vec{\tau}_{\kappa,\mathcal{L}}$, ou ceci est équivalent obtenir une approximation de tout le vecteur ∇u sur chaque arête du maillage. Différentes méthodes volumes finis de reconstruction de gradient discret ont été proposées depuis une dizaine d'années. Un grand nombre de ces méthodes ont été comparées dans le benchmark de la conférence FVCA5 [HH08b], pour des problèmes de diffusion scalaire 2D, voir [ABBM98a, ABBM98b, CVV99, Her00, AGW04, BM05, DO05, Pot05, DE06, Dro06, EGH06, EGH07, Her07, MP07, ABH07, BLSS07, BH08, BBL09] pour plus de détails.

On s'intéresse plus particulièrement dans ce manuscrit à l'une des méthodes de reconstruction de gradient, la méthode appelée DDFV acronyme de "Discrete Duality Finite Volume". Les méthodes DDFV ont été introduites et étudiées dans [Her00, DO05] pour approcher les solutions du problème de Laplace sur des classes de maillages très larges incluant des maillages déformés et localement raffinés, sans supposer la condition d'orthogonalité.

Pour cela, on considère une partition du domaine de calcul \mathfrak{M} , formée de polygones. Le maillage primal est constitué de cette partition \mathfrak{M} et de l'ensemble des arêtes du bord du domaine. Ces arêtes sont appelées par la suite les mailles primales dégénérées, et l'ensemble de ces mailles du bord est noté $\partial\mathfrak{M}$. L'ensemble $\partial\mathfrak{M}$ est introduit pour imposer les conditions aux bords. Le principe de la méthode DDFV consiste alors à ajouter des inconnues aux sommets des volumes de contrôle. Ces sommets sont alors vus comme des centres de volumes de contrôle d'un nouveau maillage appelé maillage dual $\mathfrak{M}^* \cup \partial\mathfrak{M}^*$, comme le montre la Figure 1.

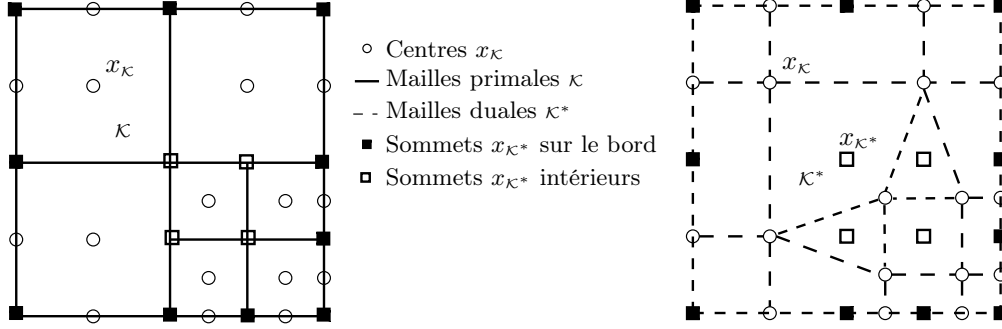


FIG. 1 – Un maillage primal $\mathfrak{M} \cup \partial\mathfrak{M}$ (à gauche). Le maillage dual $\mathfrak{M}^* \cup \partial\mathfrak{M}^*$ correspondant (à droite).

Les inconnues aux sommets sont considérées comme des inconnues à part entière du schéma pour lesquelles une équation est obtenue en intégrant le problème de départ sur les mailles duales. Ces inconnues aux centres et aux sommets du maillage primal sont rassemblées dans la famille :

$$u^\tau = \left((u_\kappa)_{\kappa \in (\mathfrak{M} \cup \partial\mathfrak{M})}, (u_{\kappa^*})_{\kappa^* \in (\mathfrak{M}^* \cup \partial\mathfrak{M}^*)} \right) \in \mathbb{R}^\tau.$$

Ainsi pour le problème de Laplace avec des conditions de Dirichlet homogène, on intègre l'équation sur les mailles intérieures du maillage primal et dual :

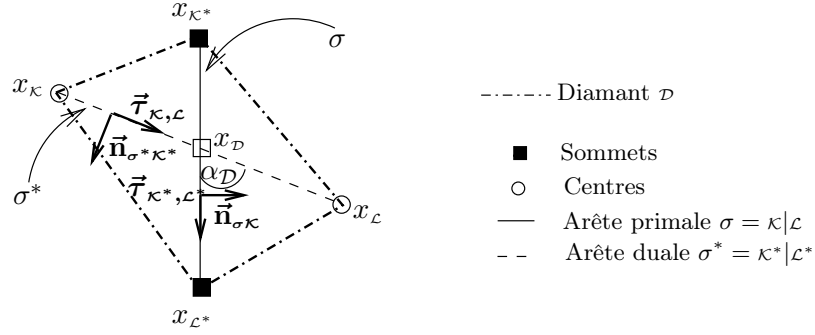
$$\begin{aligned} \forall \kappa \in \mathfrak{M}, \quad \int_{\kappa} f(x) dx &= - \int_{\kappa} \Delta u(x) dx = - \sum_{\sigma \in \partial\kappa} \int_{\sigma} \nabla u(s) \cdot \vec{n}_{\sigma\kappa} ds, \\ \forall \kappa^* \in \mathfrak{M}^*, \quad \int_{\kappa^*} f(x) dx &= - \int_{\kappa^*} \Delta u(x) dx = - \sum_{\sigma^* \in \partial\kappa^*} \int_{\sigma^*} \nabla u(s) \cdot \vec{n}_{\sigma^*\kappa^*} ds. \end{aligned}$$

Il faut maintenant approcher les deux flux normaux suivants $\int_{\sigma} \nabla u(s) \cdot \vec{n}_{\sigma\kappa} ds$ et $\int_{\sigma^*} \nabla u(s) \cdot \vec{n}_{\sigma^*\kappa^*} ds$. Pour cela on utilise un gradient discret défini sur le quadrangle de diagonales σ et σ^* , appelé diamant $\mathcal{D}_{\sigma,\sigma^*}$, (voir la Figure 2). Ceci est possible car on remarque qu'en deux dimensions, les deux directions complémentaires (la direction de σ^* , c'est-à-dire des centres de deux volumes de contrôle du maillage et la direction de σ , c'est-à-dire des deux sommets de l'arête) permettent de définir entièrement un gradient discret $\nabla^{\mathcal{D}} : \mathbb{R}^\tau \rightarrow (\mathbb{R}^2)^{\mathcal{D}}$ (voir Définition I.7), avec pour $\mathcal{D} \in \mathcal{D}$:

$$\nabla^{\mathcal{D}} u^\tau = \frac{1}{\sin(\alpha_{\mathcal{D}})} \left(\frac{u_{\mathcal{L}} - u_{\kappa}}{m_{\sigma^*}} \vec{n}_{\sigma\kappa} + \frac{u_{\mathcal{L}^*} - u_{\kappa^*}}{m_{\sigma}} \vec{n}_{\sigma^*\kappa^*} \right) \iff \begin{cases} \nabla^{\mathcal{D}} u^\tau \cdot \vec{\tau}_{\kappa^*,\mathcal{L}^*} = \frac{u_{\mathcal{L}^*} - u_{\kappa^*}}{m_{\sigma}}, \\ \nabla^{\mathcal{D}} u^\tau \cdot \vec{\tau}_{\kappa,\mathcal{L}} = \frac{u_{\mathcal{L}} - u_{\kappa}}{m_{\sigma^*}}. \end{cases}$$

On définit également une divergence discrète $\text{div}^\tau : (\mathbb{R}^2)^{\mathcal{D}} \rightarrow \mathbb{R}^\tau$ (voir Définition I.9) par :

$$\begin{aligned} \forall \kappa \in \mathfrak{M}, \quad \text{div}^\kappa \xi^{\mathcal{D}} &= \frac{1}{m_{\kappa}} \sum_{\mathcal{D}_{\sigma,\sigma^*} \in \mathcal{D}_{\kappa}} m_{\sigma} \xi^{\mathcal{D}} \cdot \vec{n}_{\sigma\kappa}, \\ \forall \kappa^* \in \mathfrak{M}^*, \quad \text{div}^{\kappa^*} \xi^{\mathcal{D}} &= \frac{1}{m_{\kappa^*}} \sum_{\mathcal{D}_{\sigma,\sigma^*} \in \mathcal{D}_{\kappa^*}} m_{\sigma^*} \xi^{\mathcal{D}} \cdot \vec{n}_{\sigma^*\kappa^*}, \\ \forall \kappa^* \in \partial\mathfrak{M}^*, \quad \text{div}^{\kappa^*} \xi^{\mathcal{D}} &= \frac{1}{m_{\kappa^*}} \left(\sum_{\mathcal{D}_{\sigma,\sigma^*} \in \mathcal{D}_{\kappa^*}} m_{\sigma^*} \xi^{\mathcal{D}} \cdot \vec{n}_{\sigma^*\kappa^*} + \sum_{\mathcal{D}_{\sigma,\sigma^*} \in \mathcal{D}_{\kappa^*} \cap \mathcal{D}_{\text{ext}}} d_{\kappa^*,\mathcal{L}} \xi^{\mathcal{D}} \cdot \vec{n}_{\sigma\kappa} \right). \end{aligned}$$

FIG. 2 – Un diamant $\mathcal{D} = \mathcal{D}_{\sigma, \sigma^*}$.

La formule de Green montre que ces deux opérateurs sont en dualité, ceci a donné le nom à la méthode.

Théorème 1 (Formule de Green)

Pour tout $\xi^{\mathcal{D}}, u^{\tau} \in (\mathbb{R}^2)^{\mathcal{D}} \times \mathbb{E}_0$, on a

$$[\operatorname{div}^{\tau} \xi^{\mathcal{D}}, u^{\tau}]_{\mathcal{T}} = -(\xi^{\mathcal{D}}, \nabla^{\mathcal{D}} u^{\tau})_{\mathcal{D}},$$

où $\mathbb{E}_0 = \{v^{\tau} \in \mathbb{R}^{\tau} \text{ tel que } v_{\kappa} = 0, \forall \kappa \in \partial \mathfrak{M} \text{ et } v_{\kappa^*} = 0, \forall \kappa^* \in \partial \mathfrak{M}^*\}$, et les produits scalaires sont définis par (I.11).

Le schéma discret du problème de Laplace avec des conditions de Dirichlet homogène s'écrit alors

$$\begin{cases} \text{Trouver } u^{\tau} \in \mathbb{E}_0 & \text{tel que} \\ \forall \kappa \in \mathfrak{M}, & -m_{\kappa} \operatorname{div}^{\kappa}(\nabla^{\mathcal{D}} u^{\tau}) = \int_{\kappa} f(x) dx, \\ \forall \kappa^* \in \mathfrak{M}^*, & -m_{\kappa^*} \operatorname{div}^{\kappa^*}(\nabla^{\mathcal{D}} u^{\tau}) = \int_{\kappa^*} f(x) dx. \end{cases}$$

Les méthodes DDFV ont été développées avec succès depuis quelques années, en 2D : pour les problèmes de diffusion scalaire anisotrope [BHK10, DO05, Her00, Her03]; pour les problèmes de convection-diffusion [CM10]; pour les systèmes Div-Rot [DDO07]; pour les équations elliptiques linéaires et/ou non linéaires de type Leray-Lions [ABH07, BH08]; pour le problème de Stokes et de Navier-Stokes [Del07]; pour des problèmes en électrocardiologie [CPRT09]; pour les équations de Maxwell [HLO08]; en 3D : pour les problèmes de diffusion scalaire anisotrope [CPT08, ABK08, Her07], pour les équations elliptiques linéaires et/ou non linéaires de type Leray-Lions [CH09]. Cette approche double essentiellement le nombre d'inconnues en 2D mais a des avantages multiples, les plus significatifs étant : le peu de contraintes imposées sur les maillages et la conservation de la structure du problème continu, notamment la symétrie, qui permet une adaptation efficace aux problèmes non-linéaires. Le benchmark [HH08b] fait ressortir que la méthode DDFV 2D est une méthode d'ordre 1 compétitive en ce qui concerne la précision des gradients. On souligne également que l'implémentation des méthodes DDFV est simple étant donné qu'elle nécessite la même structure (avec quelques informations géométriques supplémentaires) que celle utilisée classiquement pour implémenter le schéma (VF4). En particulier, il n'est pas nécessaire de connaître la correspondance entre une maille (primale ou duale) et l'ensemble de ses sommets. Tous les tests numériques 2D de ce manuscrit ont été réalisés à l'aide d'un code en fortran90. Lors de journée numériques de Lille 2010 <https://rn10vf.lille.inria.fr/>, des programmes en scilab, pour les problèmes anisotropes, ont été réalisés par F. Boyer et moi-même à des fins pédagogiques, ils sont accessibles à l'adresse http://www.cmi.univ-mrs.fr/~krell/Projet/VF_scilab.tar.gz.

Chapitre I : Description générale des méthodes DDFV

Dans ce chapitre, nous décrivons les grands principes et les principaux résultats connus sur les opérateurs discrets de la méthode de volumes finis DDFV dans le cadre 2D. On introduit les maillages DDFV et toutes les notations utiles pour les chapitres ultérieurs. La dernière section du premier chapitre est consacrée aux principaux résultats concernant les opérateurs discrets DDFV démontrés pour l'essentiel dans [ABH07], comme par exemple l'inégalité de Poincaré :

Théorème 2 (Inégalité de Poincaré discrète)

Il existe une constante $C > 0$, dépendant uniquement du diamètre de Ω et de $\text{reg}(\mathcal{T})$, telle que $\forall u^\tau \in \mathbb{E}_0$:

$$\|u^\tau\|_2 \leq C \|\nabla^\mathfrak{D} u^\tau\|_2.$$

La régularité géométrique d'un maillage donné sera mesurée par un nombre noté $\text{reg}(\mathcal{T})$ (défini par (I.1)) et qui est utilisé dans tous les théorèmes qui suivent. Ce nombre $\text{reg}(\mathcal{T})$ mesure essentiellement l'aplatissement des diamants et le rapport entre la taille des mailles primales (resp. duales) et la taille des diamants.

Chapitre II : Problèmes de diffusion scalaire anisotrope avec des conditions aux bords mixtes

Le deuxième chapitre est consacré à la discrétisation de problèmes de diffusion scalaire anisotrope et hétérogène avec des conditions aux bords mixtes de type Dirichlet/Fourier :

$$\begin{cases} -\text{div}(A(x) \cdot \nabla u(x)) = f(x), & \text{dans } \Omega, \\ u = g, & \text{sur } \Gamma_D, \\ -(A(s) \cdot \nabla u(s)) \cdot \vec{n} = \lambda u(s) - h(s), & \text{sur } \Gamma_F = \Gamma, \end{cases} \quad (1)$$

On distinguera dans ce chapitre les mailles primales (resp. duales) du bord appartenant aux bords de type Dirichlet, ensemble noté $\partial\mathfrak{M}_D$ (resp. $\partial\mathfrak{M}_D^*$), des mailles primales (resp. duales) du bord appartenant aux bords de type Fourier, ensemble noté $\partial\mathfrak{M}_F$ (resp. $\partial\mathfrak{M}_F^*$). Le but de ce chapitre est de construire un schéma pour le problème (1) et d'établir des estimations d'erreur pour ce schéma. Ce chapitre prépare le chapitre suivant, qui étudie des algorithmes de Schwarz sans recouvrement pour les méthodes DDFV qui utilisent les conditions de Fourier pour les communications entre les sous-domaines. Notons qu'on s'attachera à travailler avec des tenseurs anisotropes pouvant présenter des discontinuités le long des arêtes primales du maillage comme dans [Her03]. On sait que de telles discontinuités peuvent impliquer un défaut de consistance des flux numériques pour les schémas volumes finis. En effet, ce sont les flux normaux, $(A \cdot \nabla u) \cdot \vec{n}$, qui sont continus à travers les interfaces de discontinuité et non le gradient lui-même. On a ainsi pour $\sigma = \tilde{\mathcal{D}}_1 \tilde{\mathcal{D}}_2$ ($\tilde{\mathcal{D}}_1$ et $\tilde{\mathcal{D}}_2$ étant deux demi-diamants) :

$$\int_\sigma (A|_{\tilde{\mathcal{D}}_1} \cdot \nabla u|_{\tilde{\mathcal{D}}_1}) \cdot \vec{n}_{\sigma\kappa} ds = \int_\sigma (A|_{\tilde{\mathcal{D}}_2} \cdot \nabla u|_{\tilde{\mathcal{D}}_2}) \cdot \vec{n}_{\sigma\kappa} ds. \quad (2)$$

Par conséquent, notre schéma numérique doit conserver la continuité de ces flux normaux discrets à travers les interfaces, sinon on observe une diminution de la vitesse de convergence. Pour imposer cette continuité, on ajoute une inconnue u_σ sur chaque arête du maillage primal, ceci nous permet de définir un gradient discret modifié $\nabla^\mathfrak{D} : u^\tau \in \mathbb{R}^\tau \rightarrow (\nabla^\mathfrak{D} u^\tau)_{\tilde{\mathcal{D}} \in \tilde{\mathfrak{D}}} \in (\mathbb{R}^2)^{\tilde{\mathfrak{D}}}$ sur les demi-diamants (voir Définition II.1) avec pour $\tilde{\mathcal{D}} \in \tilde{\mathfrak{D}}$, de sommets x_κ , x_{κ^*} et x_{κ^*} :

$$\nabla^\mathfrak{D} u^\tau = \frac{1}{\sin(\alpha_\mathcal{D})} \left(\frac{u_\sigma - u_\kappa}{m_{\sigma\kappa}} \vec{n}_{\sigma\kappa} + \frac{u_{\kappa^*} - u_\kappa}{m_\sigma} \vec{n}_{\sigma^*\kappa^*} \right).$$

On détermine les nouvelles inconnues u_σ sur les arêtes du maillage primal, en imposant pour tout $\mathcal{D} \in \mathfrak{D}$ l'équivalent discret de (2), c'est-à-dire :

$$(A_{\tilde{\mathcal{D}}_1} \cdot \nabla^{\tilde{\mathcal{D}}_1} u^\tau) \cdot \vec{n}_{\sigma\kappa} = (A_{\tilde{\mathcal{D}}_2} \cdot \nabla^{\tilde{\mathcal{D}}_2} u^\tau) \cdot \vec{n}_{\sigma\kappa},$$

où $\mathcal{D} = \tilde{\mathcal{D}}_1 \cup \tilde{\mathcal{D}}_2$ et $A_{\tilde{\mathcal{D}}}$ est une matrice définie positive qui approche A sur le demi-diamant $\tilde{\mathcal{D}}$. On définit alors les flux sur les diamants par $\mathcal{A}^\mathfrak{D}(\nabla^\mathfrak{D}) : \mathbb{R}^\tau \rightarrow (\mathbb{R}^2)^\mathfrak{D}$, où $\mathcal{A}_\mathcal{D}(\nabla^\mathfrak{D} u^\tau) = \frac{1}{m_\mathcal{D}} \sum_{\tilde{\mathcal{D}} \in \tilde{\mathfrak{D}}_\mathcal{D}} m_{\tilde{\mathcal{D}}} A_{\tilde{\mathcal{D}}} \cdot \nabla^{\tilde{\mathcal{D}}} u^\tau$, pour tout $\mathcal{D} \in \mathfrak{D}$ et $u^\tau \in \mathbb{R}^\tau$.

La nouveauté de ce travail se situe dans les conditions aux bord de type mixte. Tout d'abord, on intègre l'équation de diffusion sur le maillage primal intérieur \mathfrak{M} et dual intérieur \mathfrak{M}^* et la condition de Dirichlet est imposée sur les mailles primales dégénérées du bord Dirichlet $\partial\mathfrak{M}_D$ et sur les mailles duales du bord Dirichlet $\partial\mathfrak{M}_D^*$. La prise en compte des conditions de Fourier peut se faire de différentes façons :

- Méthode 1 : On intègre l'équation de diffusion sur le maillage dual du bord Fourier $\partial\mathfrak{M}_F^*$, puis on impose la condition de Fourier sur les mailles primales dégénérées du bord Fourier $\partial\mathfrak{M}_F$.

- Méthode 2 : On intègre l'équation de diffusion sur le maillage dual du bord Fourier $\partial\mathfrak{M}_F^*$, en remplaçant les flux normaux, c'est-à-dire $(A \cdot \nabla u) \cdot \vec{n}$, sur les arêtes du bord par la condition de Fourier $h - \lambda u$. Puis on impose la condition de Fourier sur les mailles primales dégénérées du bord Fourier $\partial\mathfrak{M}_F$.
- Méthode 3 : On intègre l'équation de diffusion sur le maillage dual du bord Fourier $\partial\mathfrak{M}_F^*$, mais cette fois-ci, on remplace les flux normaux des arêtes du bord Fourier par de nouvelles inconnues de flux, notées φ^τ , (situées sur les demi-arêtes du bord). Ces nouvelles inconnues doivent alors approcher les flux normaux sur les mailles primales dégénérées du bord Fourier $\partial\mathfrak{M}_F$. Finalement, on impose la condition de Fourier sur chaque demi-arête du bord Fourier. Pour cette méthode, on ajoute exactement deux fois le nombre d'arêtes de l'interface d'inconnues. Ceci n'augmente pas considérablement le nombre total d'inconnues du système.

La stratégie proposée par F. Hermeline est la seconde. Il montre dans [Her00, Her03] que le schéma correspondant à la méthode 2 est bien posé pour des maillages DDFV généraux. Nous montrerons au Chapitre III qu'en utilisant la méthode 3 l'algorithme de Schwarz DDFV converge vers le schéma DDFV, ceci n'est pas forcément le cas pour les autres méthodes (voir la Remarque III.7). Le schéma correspondant à la méthode 3 pour un tenseur anisotrope discontinu s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } u^\tau, \varphi^\tau \in \mathbb{R}^\tau \times \Phi_\Gamma^\tau \text{ tels que,} \\ u_\kappa = g_\kappa, \quad \forall \kappa \in \partial\mathfrak{M}_D, \\ u_{\kappa^*} = g_{\kappa^*}, \quad \forall \kappa^* \in \partial\mathfrak{M}_D^*, \\ -\operatorname{div}^\kappa \left(\mathcal{A}^\mathfrak{D}(\nabla^{\tilde{\mathfrak{D}}} u^\tau) \right) = f_\kappa, \quad \forall \kappa \in \mathfrak{M}, \\ -\operatorname{div}^{\kappa^*} \left(\mathcal{A}^\mathfrak{D}(\nabla^{\tilde{\mathfrak{D}}} u^\tau) \right) = f_{\kappa^*}, \quad \forall \kappa^* \in \mathfrak{M}^*, \\ - \sum_{\mathfrak{D}_{\sigma, \sigma^*} \in \mathfrak{D}_{\kappa^*}} \frac{m_{\sigma^*}}{m_{\kappa^*}} \mathcal{A}_\mathfrak{D}(\nabla^{\tilde{\mathfrak{D}}} u^\tau) \cdot \vec{n}_{\sigma^* \kappa^*} - \sum_{\mathfrak{D} \in \mathfrak{D}_{\kappa^*} \cap \mathfrak{D}_\Gamma} \frac{d_{\kappa^*, \mathcal{L}}}{m_{\kappa^*}} \varphi_{\kappa^*, \mathcal{L}} = f_{\kappa^*}, \quad \forall \kappa^* \in \partial\mathfrak{M}_F^*, \\ \frac{d_{\kappa^*, \mathcal{L}}}{m_\sigma} \varphi_{\kappa^*, \mathcal{L}} + \frac{d_{\mathcal{L}^*, \mathcal{L}}}{m_\sigma} \varphi_{\mathcal{L}^*, \mathcal{L}} - \mathcal{A}_\mathfrak{D}(\nabla^{\tilde{\mathfrak{D}}} u^\tau) \cdot \vec{n}_{\sigma \mathcal{L}} = 0, \quad \forall \mathcal{L} = [x_{\kappa^*} x_{\mathcal{L}^*}] \in \partial\mathfrak{M}_F, \\ \varphi_{\kappa^*, \mathcal{L}} + \lambda \frac{u_{\kappa^*} + u_{\mathcal{L}}}{2} = h_{\kappa^*, \mathcal{L}}, \quad \forall [x_{\kappa^*} x_{\mathcal{L}}] \in \partial\mathfrak{A}_F. \end{array} \right. \quad (3)$$

On montre que le schéma (3) est bien posé pour des maillages généraux. Pour simplifier un peu les notations, on note maintenant le fait que (u^τ, φ^τ) est solution de (3) de la manière compacte suivante :

$$\mathcal{L}_{\Omega, \Gamma}^\tau(u^\tau, \varphi^\tau, f^\tau, g^\tau, h^\tau) = 0. \quad (4)$$

On établit l'estimation d'erreur associée.

Théorème 3 (Estimation d'erreur)

On suppose que la solution de (1) u est $W^{2, \infty}$ par demi-diamants. Soit $u^\tau \in \mathbb{R}^\tau$ la solution du schéma (4). Il existe une constante $C > 0$, dépendant uniquement de A , de u et $\operatorname{reg}(T)$, telle que

$$\|u - u^\tau\|_2 + \|\nabla u - \nabla^{\tilde{\mathfrak{D}}} u^\tau\|_2 \leq C \operatorname{size}(T).$$

Pour montrer ce résultat, on s'est servi de l'estimation d'erreur faite dans [BH08], obtenue uniquement pour des conditions aux bords de Dirichlet. L'adaptation de ce résultat a nécessité l'obtention d'un théorème de trace (voir Théorème II.15) et d'une nouvelle étude de l'erreur de consistance due au bord Fourier (voir Section II.7).

Dans la Section II.9, les tests numériques illustrent le comportement du schéma (3). On remarque que l'ordre de convergence n'est pas sensible à la présence de mailles non-conformes. On observe également une super convergence en norme L^2 pour la solution qui est classique en volumes finis. Rappelons que la démonstration de cette super convergence pour des maillages généraux est toujours un problème ouvert même pour le problème de Laplace (voir la Section II.11).

Chapitre III : Algorithmes de Schwarz sans recouvrement dans le cadre DDFV

On étudie dans le Chapitre III une méthode de Schwarz discrète sans recouvrement afin d'approcher les solutions du problème de diffusion anisotrope en profitant d'une décomposition en sous-domaines. En 1870, H.A.

Schwarz a proposé des méthodes itératives qui consistent à transférer la solution ou sa dérivée normale d'un sous-domaine à l'autre, afin de traiter des domaines complexes. Cette méthode de Schwarz classique converge uniquement quand les sous-domaines se recouvrent. De plus, cette convergence est d'autant plus lente que le recouvrement est de petite taille. P.L. Lions montre dans [Lio90] qu'avec des conditions de transmission de type Fourier l'algorithme de Schwarz pour l'opérateur de Laplace converge même en l'absence de recouvrement. Cette méthode a été adaptée au cadre discret pour plusieurs problèmes de diffusion isotrope [AJNM02, CHH04, GJMN05] et pour des problèmes d'advection-diffusion-réaction [GH07, DG09]. Ce chapitre est consacré au développement de la version DDFV de cette méthode itérative de Schwarz sans recouvrement pour des problèmes de diffusion anisotrope. L'idée est d'utiliser le schéma (4) (avec la notation $\mathcal{L}_{\Omega_i, \Gamma}^{\tau_i}$) sur chaque sous-domaine Ω_i en les couplant à travers des conditions de Fourier à l'interface. Plus précisément, on propose l'algorithme suivant :

- Pour $i \in \{1, 2\}$, on choisit $h_0^{\tau_i} \in \Phi_{\Gamma}^{\tau_i}$.
- Pour tout $n \geq 0$, et pour $i, j \in \{1, 2\}$, $j \neq i$:
 - On obtient $(u_{n+1}^{\tau_i}, \varphi_{n+1}^{\tau_i}) \in \mathbb{R}^{\tau_i} \times \Phi_{\Gamma}^{\tau_i}$ solution de

$$\mathcal{L}_{\Omega_i, \Gamma}^{\tau_i}(u_{n+1}^{\tau_i}, \varphi_{n+1}^{\tau_i}, f^{\tau_i}, g^{\tau_i}, h_n^{\tau_j}) = 0. \quad (5)$$

- On évalue $h_{n+1}^{\tau_i}$ grâce à

$$\forall [x_{\kappa^*} x_{\mathcal{L}}] \in \partial \mathfrak{A}_F, \quad h_{i, \kappa^*, \mathcal{L}}^{n+1} = -\varphi_{i, \kappa^*, \mathcal{L}}^{n+1} + \lambda \frac{u_{i, \kappa^*}^{n+1} + u_{i, \mathcal{L}}^{n+1}}{2}. \quad (6)$$

On rappelle que la notation $\mathcal{L}_{\Omega_i, \Gamma}^{\tau_i}$ désigne le schéma DDFV correspondant à la méthode 3. Cependant, on a vu que plusieurs méthodes étaient possibles pour prendre en compte les conditions de Fourier. Chacune de ces stratégies conduit à un algorithme de Schwarz différent (voir la Remarque III.7). Il faut alors étudier la limite de l'algorithme de Schwarz, cette limite est la solution du schéma DDFV avec des conditions aux bords de type Dirichlet sur tout le domaine uniquement pour la méthode 3, c'est-à-dire pour l'algorithme (5)-(6).

Théorème 4 (Lien avec le schéma DDFV)

Soit u^{τ} la solution du schéma DDFV avec des conditions aux bords de type Dirichlet (c'est le système (3) avec $\Gamma = \emptyset$) sur tout le domaine. Pour $i \in \{1, 2\}$, il existe $(u^{\tau_i}, \varphi^{\tau_i}, h^{\tau_i}) \in \mathbb{R}^{\tau_i} \times \Phi_{\Gamma}^{\tau_i} \times \Phi_{\Gamma}^{\tau_i}$ tel que

$$\mathcal{L}_{\Omega_i, \Gamma}^{\tau_i}(u^{\tau_i}, \varphi^{\tau_i}, f^{\tau_i}, g^{\tau_i}, h^{\tau_i}) = 0, \quad (7)$$

pour $i = 1, 2$, on a $u_{i, \kappa} = u_{\kappa}$, pour $\kappa \in \mathfrak{M}_i \cup \partial \mathfrak{M}_{i, D}$, $u_{i, \kappa^*} = u_{\kappa^*}$, pour $\kappa^* \in \mathfrak{M}_i^* \cup \partial \mathfrak{M}_i^*$, et $\sum_{[x_{\kappa^*}, x_{\mathcal{L}}] \in \partial \mathfrak{A}_{\Gamma}} (\varphi_{i, \kappa^*, \mathcal{L}} - \varphi_{i, \mathcal{L}^*, \mathcal{L}}) = 0$ pour $i = 1, 2$.

On impose la condition de normalisation $\sum_{[x_{\kappa^*}, x_{\mathcal{L}}] \in \partial \mathfrak{A}_{\Gamma}} (\varphi_{i, \kappa^*, \mathcal{L}} - \varphi_{i, \mathcal{L}^*, \mathcal{L}}) = 0$ afin de définir de manière unique

les inconnues de flux $\varphi_{i, \kappa^*, \mathcal{L}}$. Dès lors, on peut établir la convergence de l'algorithme (5)-(6) vers la solution du schéma DDFV sur le domaine complet.

Théorème 5 (Convergence de l'algorithme de Schwarz)

Pour tout $h_0^{\tau_i} \in \Phi_{\Gamma}^{\tau_i}$, $i \in \{1, 2\}$, la solution $(u_n^{\tau_i})_{i=1,2}$ de l'algorithme itératif (5)-(6) converge vers la solution u^{τ} du schéma DDFV avec des conditions aux bords de type Dirichlet (c'est le système (3) avec $\Gamma = \emptyset$) sur tout le domaine Ω , quand $n \rightarrow \infty$.

De plus, si on suppose que $h_0^{\tau_i}$ est choisi de sorte que

$$\sum_{[x_{\kappa^*}, x_{\mathcal{L}}] \in \partial \mathfrak{A}_{\Gamma}} (h_{i, \kappa^*, \mathcal{L}}^0 - h_{i, \mathcal{L}^*, \mathcal{L}}^0) = \frac{\lambda}{2} (g(x) - g(y)), \quad i = \{1, 2\},$$

où l'intersection de Γ et $\partial \Omega$ est réduite aux deux sommets x et y , alors, les inconnues $\varphi_{i, \kappa^*, \mathcal{L}}^{n+1}$ données par l'algorithme (5)-(6) convergent aussi vers les inconnues $\varphi_{i, \kappa^*, \mathcal{L}}^{\tau}$ du schéma (7) quand $n \rightarrow \infty$.

Idee de démonstration : On définit l'erreur sur chaque sous-domaine à l'itération n comme suit $e_i^n = u_i^{\tau} - u_i^n$ et l'erreur sur les flux à l'interface par $\psi_{i, \kappa^*, \mathcal{L}}^n = \varphi_{i, \kappa^*, \mathcal{L}} - \varphi_{i, \kappa^*, \mathcal{L}}^n$. On calcule $-\text{div}^{\tau}(\mathcal{A}^{\mathfrak{D}}(\nabla^{\mathfrak{D}} e_i^{n+1})), e_i^{n+1}]_{\mathcal{I}_i} -$

$[\operatorname{div}^\tau(\mathcal{A}^\mathfrak{D}(\nabla^{\tilde{\mathfrak{D}}} e_j^{n+1})), e_j^{n+1}]_{\mathcal{T}_j} = 0$ directement et en utilisant la formule de Green, afin d'obtenir

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{\mathfrak{D} \in \mathfrak{D}_i} m_{\mathfrak{D}} \mathcal{A}_{\mathfrak{D}}(\nabla^{\tilde{\mathfrak{D}}} e_i^{n+1}) \cdot \nabla^{\mathfrak{D}} e_i^{n+1} + \sum_{\mathfrak{D} \in \mathfrak{D}_j} m_{\mathfrak{D}} \mathcal{A}_{\mathfrak{D}}(\nabla^{\tilde{\mathfrak{D}}} e_j^{n+1}) \cdot \nabla^{\mathfrak{D}} e_j^{n+1} \\ &\quad - \sum_{[x_{\mathcal{K}^*}, x_{\mathcal{L}}] \in \partial \mathfrak{A}_\Gamma} m_{\mathcal{K}^*, \mathcal{L}} \psi_{i, \mathcal{K}^*, \mathcal{L}}^{n+1} \gamma_{\mathcal{K}^*, \mathcal{L}}(e_i^{n+1}) - \sum_{[x_{\mathcal{K}^*}, x_{\mathcal{L}}] \in \partial \mathfrak{A}_\Gamma} m_{\mathcal{K}^*, \mathcal{L}} \psi_{j, \mathcal{K}^*, \mathcal{L}}^{n+1} \gamma_{\mathcal{K}^*, \mathcal{L}}(e_j^{n+1}). \end{aligned}$$

On applique la formule $-ab = \frac{1}{4\lambda} ((a - \lambda b)^2 - (a + \lambda b)^2)$, à chaque terme $\psi_{i, \mathcal{K}^*, \mathcal{L}}^{n+1} \gamma_{\mathcal{K}^*, \mathcal{L}}(e_i^{n+1})$ et $\psi_{j, \mathcal{K}^*, \mathcal{L}}^{n+1} \gamma_{\mathcal{K}^*, \mathcal{L}}(e_j^{n+1})$. Ensuite en considérant le schéma vérifié par e_i^{n+1} et e_j^{n+1} , il vient que

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{\mathfrak{D} \in \mathfrak{D}_i} m_{\mathfrak{D}} \mathcal{A}_{\mathfrak{D}}(\nabla^{\tilde{\mathfrak{D}}} e_i^{n+1}) \cdot \nabla^{\mathfrak{D}} e_i^{n+1} + \sum_{\mathfrak{D} \in \mathfrak{D}_j} m_{\mathfrak{D}} \mathcal{A}_{\mathfrak{D}}(\nabla^{\tilde{\mathfrak{D}}} e_j^{n+1}) \cdot \nabla^{\mathfrak{D}} e_j^{n+1} \\ &\quad + \sum_{[x_{\mathcal{K}^*}, x_{\mathcal{L}}] \in \partial \mathfrak{A}_\Gamma} \frac{m_{\mathcal{K}^*, \mathcal{L}}}{4\lambda} \left[(-\psi_{i, \mathcal{K}^*, \mathcal{L}}^{n+1} + \lambda \gamma_{\mathcal{K}^*, \mathcal{L}}(e_i^{n+1}))^2 - (-\psi_{i, \mathcal{K}^*, \mathcal{L}}^n + \lambda \gamma_{\mathcal{K}^*, \mathcal{L}}(e_i^n))^2 \right] \\ &\quad + \sum_{[x_{\mathcal{K}^*}, x_{\mathcal{L}}] \in \partial \mathfrak{A}_\Gamma} \frac{m_{\mathcal{K}^*, \mathcal{L}}}{4\lambda} \left[(-\psi_{j, \mathcal{K}^*, \mathcal{L}}^{n+1} + \lambda \gamma_{\mathcal{K}^*, \mathcal{L}}(e_j^{n+1}))^2 - (-\psi_{j, \mathcal{K}^*, \mathcal{L}}^n + \lambda \gamma_{\mathcal{K}^*, \mathcal{L}}(e_j^n))^2 \right]. \end{aligned}$$

On somme cette égalité pour n variant de 1 à M . Ceci donne l'existence d'une constante $C > 0$, indépendante de M , telle que

$$\sum_{n=1}^M \sum_{\mathfrak{D} \in \mathfrak{D}_i} m_{\mathfrak{D}} \mathcal{A}_{\mathfrak{D}}(\nabla^{\tilde{\mathfrak{D}}} e_i^{n+1}) \cdot \nabla^{\mathfrak{D}} e_i^{n+1} + \sum_{n=1}^M \sum_{\mathfrak{D} \in \mathfrak{D}_j} m_{\mathfrak{D}} \mathcal{A}_{\mathfrak{D}}(\nabla^{\tilde{\mathfrak{D}}} e_j^{n+1}) \cdot \nabla^{\mathfrak{D}} e_j^{n+1} \leq C.$$

On en déduit grâce à la définition des flux $\mathcal{A}_{\mathfrak{D}}(\nabla^{\tilde{\mathfrak{D}}})$ que

$$\sum_{n=1}^M \|\nabla^{\mathfrak{D}_i} e_i^{n+1}\|_2^2 + \sum_{n=1}^M \|\nabla^{\mathfrak{D}_j} e_j^{n+1}\|_2^2 \leq C_A C.$$

Par conséquent on a que pour $i = 1, 2$

$$\|\nabla^{\mathfrak{D}_i} e_i^{n+1}\|_2^2 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

Grâce à l'inégalité de Poincaré discrète, on obtient la convergence de e_i^{n+1} vers 0 quand n tend vers ∞ . \blacksquare

Finalement des tests numériques illustrent le comportement de notre algorithme de Schwarz DDFV sans recouvrement comme solveur itératif dans la Section III.5 et comme préconditionneur dans la Section III.6. Ce travail a donné lieu à une publication dans *IMA J.N.A.* [BHK10] en collaboration avec F. Boyer et F. Hubert.

Chapitre IV : Introduction des méthodes DDFV pour Stokes

La seconde partie est consacrée à l'approximation des solutions du problème de Stokes stationnaire par les méthodes DDFV. L'approximation des solutions du problème de Stokes par des volumes finis est un sujet de recherche actuel, on réfère à [EHL06, Del07, DE09, BdVGLM09, BdVL10] pour la description et l'analyse de certains schémas disponibles jusqu'à présent.

Insistons encore sur le fait que le choix de la méthode DDFV est d'une part dû au large choix de maillages que l'on peut considérer et d'autre part au fait que la présence d'une viscosité variable (Chapitres VI et VII), nécessite la reconstruction de tout le gradient de vitesse sur tout le domaine permettant une discrétisation naturelle du tenseur des taux de déformation.

La méthode DDFV pour le problème de Stokes conduit naturellement à décaler les inconnues en vitesse et en pression, c'est-à-dire que les inconnues discrètes (les composantes de la vitesse et la pression) sont localisées en des points différents. Les schémas décalés les plus célèbres sont le schéma MAC (Marker and Cell) [HW65] qui est limité à des maillages rectangulaires, les schémas éléments finis utilisant les éléments de Crouzeix/Raviart [CR73] pour des triangles ou de Rannacher/Turek [RT92] pour des quadrilatères, par exemple. Une généralisation des schémas MAC à des maillages triangulaires ou de forme plus générale est donnée par les méthodes dites de covolumes qui ont été étudiées dans [HN92, Nic92a, Nic92b, NPH95, Cho97, CK97], elles utilisent un couple de maillages composés de "volumes complémentaires". Par exemple, on peut utiliser le couple de maillage Delaunay-Voronoi, formé de volumes triangulaires pour le premier maillage et de volumes polygonaux pour le second maillage. Ces maillages ont la propriété suivante : les arêtes de chaque maillage sont orthogonales aux arêtes de

l'autre maillage. Etant donné un maillage du domaine de calcul, les schémas MAC et covolume utilisent comme inconnues de vitesse les composantes normales du champ de vitesse sur les arêtes des volumes de contrôle tandis que les inconnues de pression sont situées au centre des cercles circonscrits. Le schéma MAC discrétise la formulation vitesse-pression du problème de Stokes (8) tandis que le schéma covolume discrétise la formulation tourbillon-vitesse-pression du problème de Stokes en utilisant le fait que $-\Delta \mathbf{u} = \nabla \times \nabla \times \mathbf{u} - \nabla \operatorname{div} \mathbf{u}$. Il est prouvé dans [NPH95] que la discrétisation MAC peut être obtenue par le schéma covolume en utilisant des maillages triangulaires bien choisis.

On présente une autre manière de généraliser le schéma MAC grâce à la méthode DDFV en gardant la formulation vitesse-pression du problème de Stokes (8). Pour cela, on va utiliser toutes les composantes de la vitesse. En effet, le schéma DDFV que nous étudions consiste à associer à chaque maille primale $\kappa \in \mathfrak{M} \cup \partial\mathfrak{M}$ une inconnue $\mathbf{u}_\kappa \in \mathbb{R}^2$ en vitesse, à chaque maille duale $\kappa^* \in \mathfrak{M}^* \cup \partial\mathfrak{M}^*$ une inconnue $\mathbf{u}_{\kappa^*} \in \mathbb{R}^2$ en vitesse et à chaque diamant $\mathcal{D} \in \mathfrak{D}$ une inconnue $p^\mathcal{D} \in \mathbb{R}$ en pression. L'ensemble de ces inconnues est noté :

$$\mathbf{u}^\tau = \left((\mathbf{u}_\kappa)_{\kappa \in (\mathfrak{M} \cup \partial\mathfrak{M})}, (\mathbf{u}_{\kappa^*})_{\kappa^* \in (\mathfrak{M}^* \cup \partial\mathfrak{M}^*)} \right) \in (\mathbb{R}^2)^\tau, \quad p^\mathfrak{D} = (p^\mathcal{D})_{\mathcal{D} \in \mathfrak{D}} \in \mathbb{R}^\mathfrak{D}.$$

On montrera dans le Chapitre VI que, sur des maillages rectangulaires avec une viscosité constante, notre schéma DDFV (13) est équivalent (excepté sur le bord) à des schémas MAC découplés écrits sur deux maillages différents et décalés (voir la Section VI.5).

Dans le Chapitre IV, on définit les opérateurs discrets et les projections discrètes dans le cadre vectoriel. On montre que le gradient discret DDFV $\nabla^\mathfrak{D} : (\mathbb{R}^2)^\tau \rightarrow (\mathcal{M}_2(\mathbb{R}))^\mathfrak{D}$ (voir Définition IV.1) et la divergence discrète $\operatorname{div}^\tau : (\mathcal{M}_2(\mathbb{R}))^\mathfrak{D} \rightarrow (\mathbb{R}^2)^\tau$ (voir Définition IV.4) sont en dualité (voir Théorème IV.9). Grâce au gradient discret, on peut également définir un tenseur des taux de déformation $\mathbf{D}^\mathfrak{D} \mathbf{u}^\tau = \frac{\nabla^\mathfrak{D} \mathbf{u}^\tau + {}^t(\nabla^\mathfrak{D} \mathbf{u}^\tau)}{2}$ et une divergence discrète $\operatorname{div}^\mathfrak{D} \mathbf{u}^\tau = \operatorname{Tr}(\nabla^\mathfrak{D} \mathbf{u}^\tau)$ d'un champ de vecteurs $\mathbf{u}^\tau \in (\mathbb{R}^2)^\tau$. La dernière section de ce chapitre est consacrée aux principaux résultats sur les opérateurs discrets DDFV dans le cadre vectoriel, qui sont pour la plupart des généralisations de ceux montrés dans le Chapitre I.

Chapitre V : Le problème de Stokes standard

Dans ce chapitre, on se place dans le cas d'une viscosité constante (qu'on prendra égale à 1) ; le problème est donc le suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } \mathbf{u} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2 \text{ une vitesse et } p : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ une pression telles que} \\ \quad -\Delta \mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f}, \quad \text{dans } \Omega, \\ \quad \operatorname{div}(\mathbf{u}) = 0, \quad \text{dans } \Omega, \\ \quad \mathbf{u} = \mathbf{g}, \quad \text{sur } \partial\Omega, \quad \int_{\Omega} p(x) dx = 0, \end{array} \right. \quad (8)$$

où Ω est un domaine ouvert borné polygonal de \mathbb{R}^2 , \mathbf{f} appartient à $(L^2(\Omega))^2$ et \mathbf{g} appartient à $(H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega))^2$ qui vérifie la condition de compatibilité suivante :

$$\int_{\partial\Omega} \mathbf{g}(s) \cdot \vec{\mathbf{n}} ds = 0, \quad (9)$$

où $\vec{\mathbf{n}}$ est le vecteur normal sortant du domaine Ω . Le caractère bien-posé du problème (8) est étudié par exemple dans [Tem77, BF91]. Il faut noter que l'obtention d'estimation d'erreur, pour n'importe quel schéma, nécessite des hypothèses de régularité de la solution exacte (\mathbf{u}, p) du problème (8). Par soucis de simplicité, on restreindra notre étude à des termes sources réguliers. Auquel cas si Ω est un polygone convexe et \mathbf{g} est nulle, alors dans [KO76, Tem77] la régularité de la solution est :

$$\mathbf{u} \in (H^2(\Omega))^2 \text{ et } p \in H^1(\Omega).$$

La stratégie DDFV pour le problème de Stokes est la suivante : la vitesse approchée \mathbf{u}^τ est définie aux centres et aux sommets du maillage et la pression approchée $p^\mathfrak{D}$ sur les diamants, là où existe le gradient discret de vitesse. Ensuite, on intègre le bilan de quantité de mouvement du problème (8) sur les mailles primales intérieures \mathfrak{M} et sur les mailles duales $\mathfrak{M}^* \cup \partial\mathfrak{M}^*$. L'équation du bilan de masse est directement approchée sur les diamants \mathfrak{D} . On impose la condition de Dirichlet uniquement sur les mailles primales du bord $\partial\mathfrak{M}$, on parlera de conditions

de Dirichlet faibles car sur les mailles duales du bord $\partial\mathfrak{M}^*$, on a intégré le bilan de quantité de mouvement, on ne peut donc pas imposer la condition de Dirichlet. Finalement l'intégrale de la pression doit être nulle et on doit également imposer que l'intégrale sur les mailles primales de la vitesse doit être égale à l'intégrale sur les mailles duales de la vitesse. Ceci vient de la condition de Dirichlet faible qui requiert cette condition de compatibilité supplémentaire pour la solution approchée. Avec les opérateurs discrets définis dans la Section IV.2, le schéma correspondant s'écrit

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } \mathbf{u}^\tau \in (\mathbb{R}^2)^\tau \text{ et } p^\mathfrak{D} \in \mathbb{R}^\mathfrak{D} \text{ tels que,} \\ \mathbf{div}^\tau(-\nabla^\mathfrak{D} \mathbf{u}^\tau + p^\mathfrak{D} \text{Id}) = \mathbf{f}^\tau, \\ \mathbf{div}^\mathfrak{D}(\mathbf{u}^\tau) = 0, \\ \boldsymbol{\gamma}^\tau(\mathbf{u}^\tau) = \mathbf{g}^{\partial\mathfrak{M}}, \\ \sum_{\kappa \in \mathfrak{M}} m_\kappa \mathbf{u}_\kappa - \sum_{\kappa^* \in \mathfrak{M}^* \cup \partial\mathfrak{M}^*} m_{\kappa^*} \mathbf{u}_{\kappa^*} = 0, \\ \sum_{\mathfrak{D} \in \mathfrak{D}} m_\mathfrak{D} p^\mathfrak{D} = 0. \end{array} \right. \quad (10)$$

Malheureusement, ce schéma (10) n'est bien posé que pour des maillages particuliers (voir la thèse [Del07]). Il faut noter que pour obtenir ce résultat, on a besoin d'intégrer le bilan de quantité de mouvement sur les mailles primales intérieures \mathfrak{M} et toutes les mailles duales intérieures et du bord $\mathfrak{M}^* \cup \partial\mathfrak{M}^*$. C'est pour cette raison que l'on utilise dans ce chapitre des conditions de Dirichlet faibles, c'est-à-dire uniquement sur $\partial\mathfrak{M}$. En effet, le résultat d'existence et unicité repose sur une condition inf-sup discrète, qui est à l'heure actuelle un problème ouvert pour des maillages généraux. Pour surmonter cette difficulté, on propose de stabiliser l'équation du bilan de masse en y ajoutant un terme de stabilisation proportionnel à la pression et/ou un autre correspondant à une approximation volume fini non consistante de l'opérateur de Laplace (voir Définition IV.10), noté $-\lambda d_\mathfrak{D}^2 \Delta^\mathfrak{D} p^\mathfrak{D}$, inspiré de la méthode de Brezzi-Pitkäranta bien connue en éléments finis [BP84]. Cette dernière stabilisation pénalise les oscillations de la pression. D'autres stratégies de stabilisation sont possibles comme par exemple les méthodes GLS [FF92, FH93], les méthodes de projection locales [BB01, CB97, CB00a, CB00b], les méthodes par cluster [EHLP07, EHLP09] ... mais elles ne seront pas considérées dans ce travail. Le schéma DDFV stabilisé que l'on considérera s'écrit

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } \mathbf{u}^\tau \in (\mathbb{R}^2)^\tau \text{ et } p^\mathfrak{D} \in \mathbb{R}^\mathfrak{D} \text{ tels que,} \\ \mathbf{div}^\tau(-\nabla^\mathfrak{D} \mathbf{u}^\tau + p^\mathfrak{D} \text{Id}) = \mathbf{f}^\tau, \\ \mathbf{div}^\mathfrak{D}(\mathbf{u}^\tau) + \mu \text{size}(\mathcal{T}) p^\mathfrak{D} - \lambda d_\mathfrak{D}^2 \Delta^\mathfrak{D} p^\mathfrak{D} = 0, \\ \boldsymbol{\gamma}^\tau(\mathbf{u}^\tau) = \mathbf{g}^{\partial\mathfrak{M}}, \\ \sum_{\kappa \in \mathfrak{M}} m_\kappa \mathbf{u}_\kappa - \sum_{\kappa^* \in \mathfrak{M}^* \cup \partial\mathfrak{M}^*} m_{\kappa^*} \mathbf{u}_{\kappa^*} = 0, \\ \sum_{\mathfrak{D} \in \mathfrak{D}} m_\mathfrak{D} p^\mathfrak{D} = 0, \end{array} \right. \quad (11)$$

avec les paramètres de stabilisation $\mu, \lambda \geq 0$ donnés. Le schéma DDFV stabilisé (11) est bien posé pour des maillages généraux si $\mu + \lambda > 0$ (voir Théorème V.2). Si $\mu > 0$, on obtient une première estimation (voir Théorème V.4) qui ne donne que de l'ordre 0.5 en norme L^2 pour le gradient de vitesse uniquement. Il faut noter que l'obtention d'une estimation en norme L^2 sur la vitesse repose sur une inégalité de Poincaré non vérifiée pour des conditions aux bords faibles. Pour obtenir de l'ordre 1 pour le gradient de vitesse et la pression, il suffit d'utiliser la stabilisation de type Brezzi-Pitkäranta (ie $\lambda > 0$). En effet, dans la Section V.12, on montre le résultat suivant.

Théorème 6 (Stabilité du schéma)

On suppose $\lambda > 0$. Il existe deux constantes $C_1, C_2 > 0$, dépendant uniquement de Ω , λ et $\text{reg}(\mathcal{T})$, telles que pour chaque couple $(\mathbf{u}^\tau, p^\mathfrak{D}) \in (\mathbb{R}^2)^\tau \times \mathbb{R}^\mathfrak{D}$ avec $\boldsymbol{\gamma}^\tau(\mathbf{u}^\tau) = 0$ et $\sum_{\mathfrak{D} \in \mathfrak{D}} m_\mathfrak{D} p^\mathfrak{D} = 0$, il existe $\tilde{\mathbf{u}}^\tau \in (\mathbb{R}^2)^\tau$ et $\tilde{p}^\mathfrak{D} \in \mathbb{R}^\mathfrak{D}$ avec $\boldsymbol{\gamma}^\tau(\tilde{\mathbf{u}}^\tau) = 0$ vérifiant :

$$\|\nabla^\mathfrak{D} \tilde{\mathbf{u}}^\tau\|_2 + \|\tilde{p}^\mathfrak{D}\|_2 \leq C_1 (\|\nabla^\mathfrak{D} \mathbf{u}^\tau\|_2 + \|p^\mathfrak{D}\|_2),$$

et

$$\|\nabla^\mathfrak{D} \mathbf{u}^\tau\|_2^2 + \|p^\mathfrak{D}\|_2^2 \leq C_2 B(\mathbf{u}^\tau, p^\mathfrak{D}; \tilde{\mathbf{u}}^\tau, \tilde{p}^\mathfrak{D}),$$

où B est la forme bilinéaire associée au schéma (11) pour tout $(\mathbf{u}^\tau, p^\mathfrak{D}), (\tilde{\mathbf{u}}^\tau, \tilde{p}^\mathfrak{D}) \in (\mathbb{R}^2)^\tau \times \mathbb{R}^\mathfrak{D}$

$$B(\mathbf{u}^\tau, p^\mathfrak{D}; \tilde{\mathbf{u}}^\tau, \tilde{p}^\mathfrak{D}) = \llbracket \text{div}^\tau(-\nabla^\mathfrak{D} \mathbf{u}^\tau + p^\mathfrak{D} \text{Id}), \tilde{\mathbf{u}}^\tau \rrbracket_\tau + (\text{div}^\mathfrak{D}(\mathbf{u}^\tau) + \mu \text{size}(\mathcal{T}) p^\mathfrak{D} - \lambda d_2^2 \Delta^\mathfrak{D} p^\mathfrak{D}, \tilde{p}^\mathfrak{D})_\mathfrak{D}.$$

Ainsi on en déduit le résultat important de ce chapitre : l'estimation d'ordre 1 en norme L^2 pour le gradient de vitesse et pour la pression.

Théorème 7 (Estimation d'erreur)

On suppose que la solution (\mathbf{u}, p) du problème de Stokes (8) appartient à $(H^2(\Omega))^2 \times H^1(\Omega)$. Soit $\lambda > 0$ et $(\mathbf{u}^\tau, p^\mathfrak{D}) \in (\mathbb{R}^2)^\tau \times \mathbb{R}^\mathfrak{D}$ la solution du schéma (11). Alors il existe une constante $C > 0$ dépendant uniquement de Ω , $\text{reg}(\mathcal{T})$, λ , $\|\mathbf{u}\|_{H^2}$ et $\|p\|_{H^1}$, telle que

$$\|\nabla \mathbf{u} - \nabla^\mathfrak{D} \mathbf{u}^\tau\|_2 \leq C \text{size}(\mathcal{T}) \quad \text{et} \quad \|p - p^\mathfrak{D}\|_2 \leq C \text{size}(\mathcal{T}).$$

Notons que l'on n'a pas de résultat sur la norme L^2 de la vitesse, toujours à cause des conditions aux bords imposées faiblement sur $\partial\mathfrak{M}$. Cette restriction sera levée au chapitre suivant en modifiant la prise en compte des conditions aux bords. Dans la Section V.4, les tests numériques illustrent le comportement du schéma (11) et plus particulièrement les trois cas suivants :

- $\mu = 0$, $\lambda = 0$, schéma non stabilisé (US) : c'est le schéma (10), qui semble être le plus naturel pour approcher le problème.
- $\mu = 0$, $\lambda > 0$, schéma (BPS) : c'est un schéma stabilisé de type Brezzi-Pitkäranta.
- $\mu > 0$, $\lambda = 0$, schéma (PS) : cela correspond au schéma stabilisé par un terme d'ordre 0 de la pression comme dans [BEH05].

Il faut remarquer que la programmation du schéma (PS) est plus simple que celle du schéma (BPS), qui nécessite de connaître les diamants voisins de chaque diamant. On observe une super convergence en norme L^2 pour la vitesse qui est classique en volumes finis. On remarque également que l'ordre de convergence n'est pas sensible à la présence de mailles non-conformes. On observe que la stabilisation provoque un gain de précision sur la vitesse pour le schéma (PS), ou sur la pression pour le schéma (BPS). Néanmoins, à cause de la détérioration de l'approximation de la pression, le schéma (PS) ne semble pas apporter d'importantes améliorations. C'est pourquoi malgré sa simplicité de programmation, dans la suite du manuscrit, on ne s'intéressera plus à la stabilisation avec un terme d'ordre 0 en pression mais uniquement à la stabilisation de type Brezzi-Pitkäranta.

Chapitre VI : Le problème de Stokes avec une viscosité variable régulière

Dans ce Chapitre VI, on travaille avec une viscosité qui dépend de x de façon régulière. C'est un travail publié dans [Kre10b]. On veut approcher la solution du problème suivant :

$$\begin{aligned} \text{Trouver } \mathbf{u} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2 \text{ une vitesse et } p : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ une pression telles que} \\ \text{div}(-2\eta(x)\text{Du} + p\text{Id}) = \mathbf{f}, \quad \text{dans } \Omega, \\ \text{div}(\mathbf{u}) = 0, \quad \text{dans } \Omega, \\ \mathbf{u} = \mathbf{g}, \quad \text{sur } \partial\Omega, \quad \int_{\Omega} p(x)dx = 0, \end{aligned} \tag{12}$$

où $\text{Du} = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u} + {}^t\nabla \mathbf{u})$ est la partie symétrique du gradient de vitesse, la viscosité η appartient à $W^{1,\infty}(\Omega)$ avec $\inf_{\Omega} \eta > 0$. On procède de la manière suivante : on intègre le bilan de quantité de mouvement du problème (12) sur les mailles primales intérieures \mathfrak{M} et uniquement sur les mailles duales intérieures \mathfrak{M}^* . L'équation du bilan de masse est directement approchée sur les diamants \mathfrak{D} en ajoutant le terme de stabilisation de type Brezzi-Pitkäranta. Pour lever les soucis liés à l'inégalité de Poincaré vus dans le chapitre précédent, on impose dorénavant la condition de Dirichlet sur les mailles primales et duales du bord $\partial\mathfrak{M} \cup \partial\mathfrak{M}^*$, on parlera de conditions aux bord de Dirichlet fortes. Finalement, l'intégrale de la pression doit être nulle. Le schéma DDFV

correspondant s'écrit alors

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } \mathbf{u}^\tau \in \mathbb{E}_g \text{ et } p^\mathfrak{D} \in \mathbb{R}^\mathfrak{D} \text{ tels que,} \\ \mathbf{div}^\mathfrak{M}(-2\eta^\mathfrak{D} \mathbf{D}^\mathfrak{D} \mathbf{u}^\tau + p^\mathfrak{D} \text{Id}) = \mathbf{f}^\mathfrak{M}, \\ \mathbf{div}^{\mathfrak{M}*}(-2\eta^\mathfrak{D} \mathbf{D}^\mathfrak{D} \mathbf{u}^\tau + p^\mathfrak{D} \text{Id}) = \mathbf{f}^{\mathfrak{M}*}, \\ \mathbf{div}^\mathfrak{D}(\mathbf{u}^\tau) - \lambda d_\mathfrak{D}^2 \Delta^\mathfrak{D} p^\mathfrak{D} = 0, \\ \sum_{\mathfrak{D} \in \mathfrak{D}} m_\mathfrak{D} p^\mathfrak{D} = 0, \end{array} \right. \quad (13)$$

avec $\lambda > 0$ et $\eta^\mathfrak{D} = \left(\int_{\mathcal{D}} \eta(s) d\mu_\mathfrak{D}(s) \right)_{\mathfrak{D} \in \mathfrak{D}}$ où $\mu_\mathfrak{D}$ est une mesure de probabilité sur \mathcal{D} , qui permet d'inclure dans l'analyse les cas $\eta_\mathfrak{D} = \eta(x_\mathfrak{D})$, $\eta_\mathfrak{D} = \frac{1}{m_\mathfrak{D}} \int_{\mathcal{D}} \eta(x) dx$ ou toute autre formule de quadrature utilisée pour approcher la viscosité sur le diamant. Ce schéma (13) est bien posé pour des maillages généraux (voir Théorème VI.9). Le coeur de la démonstration est l'obtention d'une inégalité de Korn discrète.

Théorème 8 (Inégalité de Korn discrète)

Pour tout $\mathbf{u}^\tau \in \mathbb{E}_0$, on a

$$\|\nabla^\mathfrak{D} \mathbf{u}^\tau\|_2 \leq \sqrt{2} \|\mathbf{D}^\mathfrak{D} \mathbf{u}^\tau\|_2.$$

Grâce au terme de stabilisation $-\lambda d_\mathfrak{D}^2 \Delta^\mathfrak{D} p^\mathfrak{D}$, on peut montrer comme dans le Théorème 6 la stabilité du schéma en introduisant la forme bilinéaire associée définie pour tout $(\mathbf{u}^\tau, p^\mathfrak{D}), (\tilde{\mathbf{u}}^\tau, \tilde{p}^\mathfrak{D}) \in (\mathbb{R}^2)^\tau \times \mathbb{R}^\mathfrak{D}$ par

$$B(\mathbf{u}^\tau, p^\mathfrak{D}; \tilde{\mathbf{u}}^\tau, \tilde{p}^\mathfrak{D}) = \llbracket \mathbf{div}^\tau(-2\eta^\mathfrak{D} \mathbf{D}^\mathfrak{D} \mathbf{u}^\tau + p^\mathfrak{D} \text{Id}), \tilde{\mathbf{u}}^\tau \rrbracket_\tau + (\mathbf{div}^\mathfrak{D}(\mathbf{u}^\tau) - \lambda d_\mathfrak{D}^2 \Delta^\mathfrak{D} p^\mathfrak{D}, \tilde{p}^\mathfrak{D})_\mathfrak{D}.$$

Ce résultat de stabilité nous permet d'établir le résultat important de ce chapitre : l'estimation d'erreur d'ordre 1 en norme L^2 pour la vitesse, pour le gradient de vitesse et pour la pression.

Théorème 9 (Estimation d'erreur du schéma DDFV)

On suppose que la solution (\mathbf{u}, p) du problème (V.1) appartient à $(H^2(\Omega))^2 \times H^1(\Omega)$. Soit $(\mathbf{u}^\tau, p^\mathfrak{D}) \in (\mathbb{R}^2)^\tau \times \mathbb{R}^\mathfrak{D}$ la solution du schéma (13). Il existe une constante $C > 0$ dépendant uniquement de Ω , $\text{reg}(\mathcal{T})$, λ , η , $\|\mathbf{u}\|_{H^2}$ et $\|p\|_{H^1}$, telle que :

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}^\tau\|_2 + \|\nabla \mathbf{u} - \nabla^\mathfrak{D} \mathbf{u}^\tau\|_2 \leq C \text{size}(\mathcal{T}) \quad \text{et} \quad \|p - p^\mathfrak{D}\|_2 \leq C \text{size}(\mathcal{T}).$$

Dans les tests numériques de la Section VI.6, on observe le comportement du schéma (13) avec une viscosité variable. Le premier test est réalisé avec une viscosité régulière polynomiale. Les ordres obtenus pour la vitesse, son gradient et la pression, sont même plus grands que ceux donnés par le Théorème 9. Ceci est lié à une certaine uniformité des mailles primales considérées. Ensuite, on s'est intéressé au cas d'une viscosité discontinue à travers l'interface $\{y = 0.5\}$ dans le cas test 3. Dans ce test, les hypothèses du Théorème 9 ne sont plus satisfaites et \mathbf{Du} est discontinu à travers l'interface $\{y = 0.5\}$. On observe que le schéma converge encore mais qu'il n'est plus d'ordre 1, comme attendu. Dans ce cas, la discontinuité de la viscosité doit être prise en compte par le schéma pour surmonter la perte de consistance des contraintes à l'interface. C'est ce que l'on propose de faire dans le chapitre suivant.

Chapitre VII : Le problème de Stokes avec une viscosité discontinue

Dans ce chapitre, on travaille avec une viscosité discontinue. Une hypothèse importante de notre analyse est que \mathcal{T} le maillage DDFV respecte les discontinuités de la viscosité. On travaille alors avec une viscosité qui peut présenter des discontinuités le long des arêtes primales et duales du maillage. On a ainsi que la viscosité est régulière par quart de diamant $\mathfrak{Q} \in \mathfrak{Q}$ et on note $\eta_\mathfrak{Q} = \frac{1}{m_\mathfrak{Q}} \int_{\mathfrak{Q}} \eta(s) ds$ la moyenne de η sur un quart de diamant $\mathfrak{Q} \in \mathfrak{Q}$.

Sous ces hypothèses, on observe numériquement une perte de précision du schéma (13). En effet, même pour les problèmes de diffusion scalaire de la Partie 1, on sait que les discontinuités de coefficients de diffusion induisent un défaut de consistance des flux numériques construits pour des coefficients réguliers. Le but de ce

chapitre est d'expliciter la construction d'un schéma modifié qui prend en compte les sauts des coefficients du problème et d'en faire son étude. Ce travail est soumis pour publication [Kre10a].

Construction de nouveaux opérateurs discrets

On suppose que la viscosité η peut présenter des sauts à travers les arêtes primales et duales du maillage. Au niveau continu, ce sont les composantes normales du tenseur des contraintes $\varphi(\mathbf{u}, p) = 2\eta \mathbf{D}\mathbf{u} - p\text{Id}$ qui sont continues à travers les arêtes primales et duales du maillage. Par exemple, on a

$$\int_{\sigma_{\mathcal{K}^*}} \varphi|_{\mathcal{Q}_{\mathcal{K}, \mathcal{K}^*}}(\mathbf{u}, p) \vec{\mathbf{n}}_{\sigma \mathcal{K}} ds = \int_{\sigma_{\mathcal{K}^*}} \varphi|_{\mathcal{Q}_{\mathcal{L}, \mathcal{K}^*}}(\mathbf{u}, p) \vec{\mathbf{n}}_{\sigma \mathcal{K}} ds. \quad (14)$$

On a besoin d'imposer l'équivalent de cette propriété dans le cadre discret. Ainsi on exprime un tenseur des contraintes discret $\varphi_{\mathcal{Q}}$ comme $\varphi_{\mathcal{Q}} = 2\eta_{\mathcal{Q}} \mathbf{D}_{\mathcal{Q}}^{\mathcal{N}} \mathbf{u}^{\mathcal{T}} - p^{\mathcal{Q}} \text{Id}$ par quart de diamant, (voir Définition VII.6) grâce à des inconnues en pression en plus $p^{\mathcal{Q}} = (p^{\mathcal{Q}})_{\mathcal{Q} \in \mathcal{Q}_{\mathcal{D}}}$ et un tenseur des taux de déformation modifié $\mathbf{D}_{\mathcal{Q}}^{\mathcal{N}}$. Pour cela, on commence par définir un gradient discret modifié sur les quarts de diamants (voir Définition VII.2) comme suit

$$\nabla_{\mathcal{Q}}^{\mathcal{N}} \mathbf{u}^{\mathcal{T}} = \nabla^{\mathcal{D}} \mathbf{u}^{\mathcal{T}} + {}^t \delta^{\mathcal{D}t} B_{\mathcal{Q}}, \text{ pour tout } \mathcal{D} \in \mathcal{D} \text{ et pour tout } \mathcal{Q} \in \mathcal{Q}_{\mathcal{D}},$$

avec $\delta^{\mathcal{D}} \in \mathcal{M}_{4,2}(\mathbb{R})$ un ensemble d'inconnues artificielles en vitesse et $B_{\mathcal{Q}}$ des matrices dans $\mathcal{M}_{2,4}(\mathbb{R})$ connues explicitement. Le tenseur des taux de déformation modifié $\mathbf{D}_{\mathcal{Q}}^{\mathcal{N}}$ est alors donné par $\mathbf{D}_{\mathcal{Q}}^{\mathcal{N}} \mathbf{u}^{\mathcal{T}} = \frac{1}{2} \left(\nabla_{\mathcal{Q}}^{\mathcal{N}} \mathbf{u}^{\mathcal{T}} + {}^t (\nabla_{\mathcal{Q}}^{\mathcal{N}} \mathbf{u}^{\mathcal{T}}) \right)$, pour tout $\mathcal{Q} \in \mathcal{Q}$, (voir Définition VII.3). Avec cette définition du tenseur des taux de déformation, le tenseur des contraintes peut s'écrire :

$$\varphi_{\mathcal{Q}}(\mathbf{D}^{\mathcal{D}} \mathbf{u}^{\mathcal{T}}, \delta^{\mathcal{D}}, p^{\mathcal{Q}}) = 2\eta_{\mathcal{Q}} \mathbf{D}^{\mathcal{D}} \mathbf{u}^{\mathcal{T}} + \eta_{\mathcal{Q}} (B_{\mathcal{Q}} \delta^{\mathcal{D}} + {}^t \delta^{\mathcal{D}t} B_{\mathcal{Q}}) - p^{\mathcal{Q}} \text{Id}.$$

Pour chaque diamant \mathcal{D} , on a 12 inconnues scalaires $(\delta^{\mathcal{D}}, p^{\mathcal{Q}})$ à déterminer en fonction des inconnues principales $(\mathbf{u}^{\mathcal{T}}, p^{\mathcal{D}})$ du schéma. On commence par imposer la version discrète de (14) sur $\mathcal{D} = \mathcal{Q}_{\mathcal{K}, \mathcal{K}^*} \cup \mathcal{Q}_{\mathcal{K}, \mathcal{L}^*} \cup \mathcal{Q}_{\mathcal{L}, \mathcal{K}^*} \cup \mathcal{Q}_{\mathcal{L}, \mathcal{L}^*}$:

$$\begin{cases} \varphi_{\mathcal{Q}_{\mathcal{K}, \mathcal{K}^*}}(\mathbf{D}^{\mathcal{D}} \mathbf{u}^{\mathcal{T}}, \delta^{\mathcal{D}}, p^{\mathcal{Q}}) \vec{\mathbf{n}}_{\sigma \mathcal{K}} = \varphi_{\mathcal{Q}_{\mathcal{L}, \mathcal{K}^*}}(\mathbf{D}^{\mathcal{D}} \mathbf{u}^{\mathcal{T}}, \delta^{\mathcal{D}}, p^{\mathcal{Q}}) \vec{\mathbf{n}}_{\sigma \mathcal{K}}, \\ \varphi_{\mathcal{Q}_{\mathcal{K}, \mathcal{L}^*}}(\mathbf{D}^{\mathcal{D}} \mathbf{u}^{\mathcal{T}}, \delta^{\mathcal{D}}, p^{\mathcal{Q}}) \vec{\mathbf{n}}_{\sigma \mathcal{K}} = \varphi_{\mathcal{Q}_{\mathcal{L}, \mathcal{L}^*}}(\mathbf{D}^{\mathcal{D}} \mathbf{u}^{\mathcal{T}}, \delta^{\mathcal{D}}, p^{\mathcal{Q}}) \vec{\mathbf{n}}_{\sigma \mathcal{K}}, \\ \varphi_{\mathcal{Q}_{\mathcal{K}, \mathcal{K}^*}}(\mathbf{D}^{\mathcal{D}} \mathbf{u}^{\mathcal{T}}, \delta^{\mathcal{D}}, p^{\mathcal{Q}}) \vec{\mathbf{n}}_{\sigma \mathcal{K}^*} = \varphi_{\mathcal{Q}_{\mathcal{L}, \mathcal{L}^*}}(\mathbf{D}^{\mathcal{D}} \mathbf{u}^{\mathcal{T}}, \delta^{\mathcal{D}}, p^{\mathcal{Q}}) \vec{\mathbf{n}}_{\sigma \mathcal{K}^*}, \\ \varphi_{\mathcal{Q}_{\mathcal{L}, \mathcal{K}^*}}(\mathbf{D}^{\mathcal{D}} \mathbf{u}^{\mathcal{T}}, \delta^{\mathcal{D}}, p^{\mathcal{Q}}) \vec{\mathbf{n}}_{\sigma \mathcal{L}^*} = \varphi_{\mathcal{Q}_{\mathcal{L}, \mathcal{L}^*}}(\mathbf{D}^{\mathcal{D}} \mathbf{u}^{\mathcal{T}}, \delta^{\mathcal{D}}, p^{\mathcal{Q}}) \vec{\mathbf{n}}_{\sigma \mathcal{L}^*}. \end{cases} \quad (15)$$

Ceci donne 8 équations. Pour déterminer les autres équations, il faut se rappeler que l'on considère des fluides incompressibles, c'est-à-dire que la vitesse vérifie $\text{div } \mathbf{u} = 0$. Au niveau discret, on a ajouté un terme de stabilisation ainsi on n'a pas $\text{div}^{\mathcal{D}} \mathbf{u}^{\mathcal{T}}$ égal à zéro. Néanmoins, on souhaite imposer $\text{Tr}(\nabla_{\mathcal{Q}}^{\mathcal{N}} \mathbf{u}^{\mathcal{T}}) = \text{div}^{\mathcal{D}} \mathbf{u}^{\mathcal{T}}$ pour tout $\mathcal{Q} \in \mathcal{Q}_{\mathcal{D}}$ et pour tout $\mathcal{D} \in \mathcal{D}$. Pour cela on impose que

$$\text{Tr}({}^t \delta^{\mathcal{D}t} B_{\mathcal{Q}}) = 0, \quad \forall \mathcal{Q} \in \mathcal{Q}_{\mathcal{D}}. \quad (16)$$

Comme les matrices $B_{\mathcal{Q}}$ vérifient $\sum_{\mathcal{Q} \in \mathcal{Q}_{\mathcal{D}}} m_{\mathcal{Q}} B_{\mathcal{Q}} = 0$, ces équations ne sont pas indépendantes, on ajoute donc la condition

$$\sum_{\mathcal{Q} \in \mathcal{Q}_{\mathcal{D}}} m_{\mathcal{Q}} p^{\mathcal{Q}} = m_{\mathcal{D}} p^{\mathcal{D}}. \quad (17)$$

Les 13 équations (15)-(16)-(17) forment un système linéaire rectangle dont le noyau n'est pas forcément trivial. On ajoute donc une condition d'orthogonalité sur le noyau qui est $(\delta^{\mathcal{D}} : \delta_0) = 0$ avec δ_0 définie dans la Proposition VII.7, c'est le vecteur qui engendre l'espace des solutions de ${}^t \delta^{\mathcal{D}t} B_{\mathcal{Q}} + B_{\mathcal{Q}} \delta^{\mathcal{D}} = 0$, pour tout $\mathcal{Q} \in \mathcal{Q}_{\mathcal{D}}$. On montre que les conditions (15)-(16)-(17) et $(\delta^{\mathcal{D}} : \delta_0) = 0$ sont équivalentes, au système linéaire

$$\begin{cases} \sum_{\mathcal{Q} \in \mathcal{Q}_{\mathcal{D}}} m_{\mathcal{Q}} \varphi_{\mathcal{Q}}(\mathbf{D}^{\mathcal{D}} \mathbf{u}^{\mathcal{T}}, \delta^{\mathcal{D}}, p^{\mathcal{Q}}) B_{\mathcal{Q}} = 0, \\ \text{Tr}({}^t \delta^{\mathcal{D}t} B_{\mathcal{Q}}) = 0, \quad \forall \mathcal{Q} \in \mathcal{Q}_{\mathcal{D}}, \quad \sum_{\mathcal{Q} \in \mathcal{Q}_{\mathcal{D}}} m_{\mathcal{Q}} p^{\mathcal{Q}} = m_{\mathcal{D}} p^{\mathcal{D}}, \\ (\delta^{\mathcal{D}} : \delta_0) = 0. \end{cases} \quad (18)$$

Ceci utilise les valeurs explicites des matrices $B_{\mathcal{Q}}$ qui seront précisées dans la Définition VII.2. On montre ainsi pour chaque diamant \mathcal{D} le théorème suivant qui nous permettra de déterminer les inconnues intermédiaires de manière locale diamant par diamant.

Théorème 10

Pour tout $\mathcal{D} \in \mathfrak{D}$ et pour tout $(D^{\mathcal{D}}\mathbf{u}^{\mathcal{T}}, p^{\mathcal{D}}) \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}$, il existe un unique couple $(\delta^{\mathcal{D}}, p^{\mathcal{Q}_{\mathcal{D}}}) \in \mathcal{M}_{4,2}(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^4$ vérifiant (18).

Le gradient discret modifié $\nabla_{\mathcal{Q}}^{\mathcal{N}}$ et le tenseur des taux de déformation discret modifié $D_{\mathcal{Q}}^{\mathcal{N}}$ sont maintenant complètement déterminés par

$$\begin{aligned} \nabla_{\mathcal{Q}}^{\mathcal{N}}\mathbf{u}^{\mathcal{T}} &= \nabla^{\mathcal{D}}\mathbf{u}^{\mathcal{T}} + {}^t\delta^{\mathcal{D}}(D^{\mathcal{D}}\mathbf{u}^{\mathcal{T}}, p^{\mathcal{D}})^t B_{\mathcal{Q}}, \quad \forall \mathcal{Q} \in \mathcal{Q}_{\mathcal{D}}, \forall \mathcal{D} \in \mathfrak{D}. \\ D_{\mathcal{Q}}^{\mathcal{N}}\mathbf{u}^{\mathcal{T}} &= D^{\mathcal{D}}\mathbf{u}^{\mathcal{T}} + B_{\mathcal{Q}}\delta^{\mathcal{D}}(D^{\mathcal{D}}\mathbf{u}^{\mathcal{T}}, p^{\mathcal{D}}) + {}^t\delta^{\mathcal{D}}(D^{\mathcal{D}}\mathbf{u}^{\mathcal{T}}, p^{\mathcal{D}})^t B_{\mathcal{Q}}, \quad \forall \mathcal{Q} \in \mathcal{Q}_{\mathcal{D}}, \forall \mathcal{D} \in \mathfrak{D}. \end{aligned}$$

Exemple de calcul des inconnues artificielles

On peut expliciter le calcul des inconnues artificielles $(\delta^{\mathcal{D}}, p^{\mathcal{Q}_{\mathcal{D}}})$ dans le cas où la viscosité η est constante par maille primale, égale à η_1 sur κ et à η_2 sur \mathcal{L} . La solution $\left({}^t(\delta_{\kappa}, \delta_{\mathcal{L}}, \delta_{\kappa^*}, \delta_{\mathcal{L}^*}), {}^t(p_{\mathcal{Q}_{\kappa}, \kappa^*}, p_{\mathcal{Q}_{\kappa}, \mathcal{L}^*}, p_{\mathcal{Q}_{\mathcal{L}}, \kappa^*}, p_{\mathcal{Q}_{\mathcal{L}}, \mathcal{L}^*})\right)$,

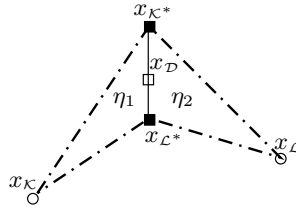


FIG. 3 – La viscosité constante par maille primale.

dans le cas de la Figure 3, vaut

$$\begin{aligned} \delta_{\kappa} = \delta_{\mathcal{L}} = 0, \quad \delta_{\kappa^*} = \delta_{\mathcal{L}^*} &= -\frac{m_{\mathcal{Q}_{\kappa}, \kappa^*} m_{\mathcal{Q}_{\mathcal{L}}, \kappa^*} (\eta_1 - \eta_2) (D^{\mathcal{D}}\mathbf{u}^{\mathcal{T}} \cdot \vec{\mathbf{n}}_{\sigma\kappa}) \cdot \vec{\tau}_{\kappa^*, \mathcal{L}^*}}{\eta_2 m_{\mathcal{Q}_{\kappa}, \kappa^*} + \eta_1 m_{\mathcal{Q}_{\mathcal{L}}, \kappa^*}} \vec{\tau}_{\kappa^*, \mathcal{L}^*} \\ p_{\mathcal{Q}_{\kappa}, \kappa^*} &= p^{\mathcal{D}} + 2(\eta_1 - \eta_2) (D^{\mathcal{D}}\mathbf{u}^{\mathcal{T}} \cdot \vec{\mathbf{n}}_{\sigma\kappa}) \cdot \vec{\mathbf{n}}_{\sigma\kappa} \frac{m_{\mathcal{Q}_{\mathcal{L}}, \kappa^*}}{m_{\mathcal{Q}_{\kappa}, \kappa^*} + m_{\mathcal{Q}_{\mathcal{L}}, \kappa^*}}, \quad p_{\mathcal{Q}_{\kappa}, \mathcal{L}^*} = p_{\mathcal{Q}_{\kappa}, \kappa^*}, \\ p_{\mathcal{Q}_{\mathcal{L}}, \kappa^*} &= p^{\mathcal{D}} + 2(\eta_2 - \eta_1) (D^{\mathcal{D}}\mathbf{u}^{\mathcal{T}} \cdot \vec{\mathbf{n}}_{\sigma\kappa}) \cdot \vec{\mathbf{n}}_{\sigma\kappa} \frac{m_{\mathcal{Q}_{\kappa}, \kappa^*}}{m_{\mathcal{Q}_{\kappa}, \kappa^*} + m_{\mathcal{Q}_{\mathcal{L}}, \kappa^*}}, \quad p_{\mathcal{Q}_{\mathcal{L}}, \mathcal{L}^*} = p_{\mathcal{Q}_{\mathcal{L}}, \kappa^*}. \end{aligned}$$

Dans la Figure 3, le vecteur $\vec{\mathbf{n}}_{\sigma\kappa}$ est colinéaire à l'axe des abscisses, ceci va simplifier l'expression du tenseur des contraintes modifié dans la base canonique donnée ci-dessous. Dans ce cas, si on note le tenseur des taux de déformation par la matrice $D^{\mathcal{D}}\mathbf{u}^{\mathcal{T}} = \begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ \gamma & \beta \end{pmatrix}$ dans la base canonique, le tenseur des contraintes modifié $\frac{1}{m_{\mathcal{D}}} \sum_{\mathcal{Q} \in \mathcal{Q}_{\mathcal{D}}} m_{\mathcal{Q}} (2\eta_{\mathcal{Q}} D_{\mathcal{Q}}^{\mathcal{N}}\mathbf{u}^{\mathcal{T}} - p^{\mathcal{Q}} \text{Id})$, noté $\varphi^{\mathcal{D}}(D^{\mathcal{D}}\mathbf{u}^{\mathcal{T}}, p^{\mathcal{D}})$ vaut

$$\varphi^{\mathcal{D}}(D^{\mathcal{D}}\mathbf{u}^{\mathcal{T}}, p^{\mathcal{D}}) = 2 \left(\begin{pmatrix} \frac{m_{\sigma\kappa}\eta_1 + m_{\sigma\mathcal{L}}\eta_2}{m_{\sigma\kappa} + m_{\sigma\mathcal{L}}} \alpha & \frac{(m_{\sigma\kappa} + m_{\sigma\mathcal{L}})\eta_1\eta_2}{m_{\sigma\kappa}\eta_1 + m_{\sigma\mathcal{L}}\eta_2} \gamma \\ \frac{(m_{\sigma\kappa} + m_{\sigma\mathcal{L}})\eta_1\eta_2}{m_{\sigma\mathcal{L}}\eta_1 + m_{\sigma\kappa}\eta_2} \gamma & \frac{m_{\sigma\kappa}\eta_1 + m_{\sigma\mathcal{L}}\eta_2}{m_{\sigma\kappa} + m_{\sigma\mathcal{L}}} \beta \end{pmatrix} - p^{\mathcal{D}} \text{Id} \right).$$

On constate que la partie visqueuse de $\varphi^{\mathcal{D}}(D^{\mathcal{D}}\mathbf{u}^{\mathcal{T}}, p^{\mathcal{D}})$ n'est pas proportionnelle au tenseur des taux de déformation $D^{\mathcal{D}}\mathbf{u}^{\mathcal{T}}$. On a une moyenne arithmétique de la viscosité sur les termes diagonaux et une moyenne harmonique de la viscosité sur les termes non diagonaux. On remarque que, sur des maillages rectangulaires, notre schéma (19) permet de généraliser les schémas MAC appliqués à des écoulements multiphasiques (voir la Remarque VII.16).

Le schéma m-DDFV

On va travailler à nouveau avec un terme de stabilisation de type Brezzi-Pitkäranta qui prend en compte cette fois les sauts de pression entre quarts de diamant (voir Définition VII.13) $-\lambda d_{\mathcal{D}}^2 \underline{\Delta}^{\mathcal{D}} p^{\mathcal{D}}$. Le schéma DDFV modifié, dénommé m-DDFV, consiste à remplacer dans le schéma DDFV (13) le tenseur des contraintes discret

$2\eta^{\mathfrak{D}} D^{\mathfrak{D}} \mathbf{u}^{\mathcal{T}} - p^{\mathfrak{D}} \text{Id}$ par le tenseur modifié $\varphi^{\mathfrak{D}}(D^{\mathfrak{D}} \mathbf{u}^{\mathcal{T}}, p^{\mathfrak{D}})$ et le terme de stabilisation $-\lambda d_{\mathfrak{D}}^2 \Delta^{\mathfrak{D}} p^{\mathfrak{D}}$ par le nouveau terme $-\lambda d_{\mathfrak{D}}^2 \underline{\Delta}^{\mathfrak{D}} p^{\mathfrak{D}}$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } \mathbf{u}^{\mathcal{T}} \in \mathbb{E}_0 \text{ et } p^{\mathfrak{D}} \in \mathbb{R}^{\mathfrak{D}} \text{ tels que,} \\ \mathbf{div}^{\mathfrak{m}}(-\varphi^{\mathfrak{D}}(D^{\mathfrak{D}} \mathbf{u}^{\mathcal{T}}, p^{\mathfrak{D}})) = \mathbf{f}^{\mathfrak{m}}, \\ \mathbf{div}^{\mathfrak{m}*}(-\varphi^{\mathfrak{D}}(D^{\mathfrak{D}} \mathbf{u}^{\mathcal{T}}, p^{\mathfrak{D}})) = \mathbf{f}^{\mathfrak{m}*}, \\ \mathbf{div}^{\mathfrak{D}}(\mathbf{u}^{\mathcal{T}}) - \lambda d_{\mathfrak{D}}^2 \underline{\Delta}^{\mathfrak{D}} p^{\mathfrak{D}} = 0, \\ \sum_{\mathfrak{D} \in \mathfrak{D}} m_{\mathfrak{D}} p^{\mathfrak{D}} = 0, \end{array} \right. \quad (19)$$

Comme les inconnues artificielles $(\delta^{\mathfrak{D}}, p^{\mathfrak{D}})$ sont entièrement définies sur chaque diamant à l'aide du couple $(D^{\mathfrak{D}} \mathbf{u}^{\mathcal{T}}, p^{\mathfrak{D}})$ et ce de façon linéaire, le système reste linéaire et le nombre d'inconnues du schéma modifié est le même que celui du schéma DDFV (13). On illustre dans les Tableaux VII.1 et VII.2 le nombre d'éléments non nuls des matrices correspondantes aux schémas DDFV (13) et m-DDFV (19). Pour les deux schémas, les nombres d'éléments non nuls sont équivalents. En fait, le schéma m-DDFV (19) ajoute moins d'un pourcent d'éléments non nuls dans les deux cas tests considérés. Cette différence n'est due qu'à la forme particulière du nouveau terme de stabilisation proposé.

Une inégalité de Korn discrète

Là encore l'étude de ce schéma repose sur une inégalité de Korn discrète pour les opérateurs discrets modifiés, dont la démonstration est sensiblement plus technique que celle du Théorème 8, car elle nécessite de travailler avec les inconnues artificielles.

Théorème 11 (Inégalité de Korn discrète)

Il existe une constante $C > 0$ dépendant uniquement de η et $\text{reg}(\mathcal{T})$ telle que :

$$\|\nabla_{\mathfrak{D}}^{\mathcal{N}} \mathbf{u}^{\mathcal{T}}\|_2 \leq C \|D_{\mathfrak{D}}^{\mathcal{N}} \mathbf{u}^{\mathcal{T}}\|_2, \quad \forall \mathbf{u}^{\mathcal{T}} \in \mathbb{E}_0.$$

La démonstration repose sur les deux résultats suivants, le premier concerne les inconnues artificielles $\delta^{\mathfrak{D}}$, il peut être vu comme une inégalité de Korn locale au diamant (on majore les matrices $B_{\mathfrak{Q}} \delta^{\mathfrak{D}}$ par leurs parties symétriques). Le deuxième montre l'équivalence des normes des tenseurs des taux de déformation $D^{\mathfrak{D}}$ et $D_{\mathfrak{D}}^{\mathcal{N}}$.

Lemme 12

Pour tout $\mathfrak{D} \in \mathfrak{D}$ et pour tout $\delta^{\mathfrak{D}} \in \mathcal{M}_{n_{\mathfrak{D}}, 2}(\mathbb{R})$ tel que $(\delta^{\mathfrak{D}} : \delta_0) = 0$, il existe une constante $C > 0$, dépendant uniquement de $\text{reg}(\mathcal{T})$, telle que

$$\sum_{\mathfrak{Q} \in \mathfrak{D}} m_{\mathfrak{Q}} \|B_{\mathfrak{Q}} \delta^{\mathfrak{D}}\|_{\mathcal{F}}^2 \leq C \sum_{\mathfrak{Q} \in \mathfrak{D}} m_{\mathfrak{Q}} \|B_{\mathfrak{Q}} \delta^{\mathfrak{D}} + {}^t \delta^{\mathfrak{D}} B_{\mathfrak{Q}}\|_{\mathcal{F}}^2.$$

Lemme 13

Il existe une constante $C > 0$, dépendant uniquement de η , telle que pour tout $\mathbf{u}^{\mathcal{T}} \in (\mathbb{R}^2)^{\mathcal{T}}$:

$$\|D^{\mathfrak{D}} \mathbf{u}^{\mathcal{T}}\|_2 \leq \|D_{\mathfrak{D}}^{\mathcal{N}} \mathbf{u}^{\mathcal{T}}\|_2 \leq C \|D^{\mathfrak{D}} \mathbf{u}^{\mathcal{T}}\|_2.$$

Pour insister sur l'importance des inconnues artificielles introduites et sur l'utilisation des conditions de continuité des contraintes (18), on détaille la démonstration de ce dernier résultat.

Démonstration : Estimation de gauche. Soit $\mathfrak{D} \in \mathfrak{D}$. L'estimation est juste une conséquence de la propriété sur les matrices $B_{\mathfrak{Q}}$ qui est $\sum_{\mathfrak{Q} \in \mathfrak{D}} m_{\mathfrak{Q}} B_{\mathfrak{Q}} = 0$. Ainsi on a $\|D_{\mathfrak{D}}^{\mathcal{N}} \mathbf{u}^{\mathcal{T}}\|_2^2 = \|D^{\mathfrak{D}} \mathbf{u}^{\mathcal{T}}\|_2^2 + \frac{1}{4} \|B_{\mathfrak{Q}} \delta^{\mathfrak{D}} + {}^t \delta^{\mathfrak{D}} B_{\mathfrak{Q}}\|_2^2$.

Estimation de droite. Soit $\mathfrak{D} \in \mathfrak{D}$. On multiplie la première relation de (18) par $\delta^{\mathfrak{D}}$ et on en prend la trace, ceci fournit la relation fondamentale suivante

$$\sum_{\mathfrak{Q} \in \mathfrak{D}} m_{\mathfrak{Q}} \eta_{\mathfrak{Q}} \underbrace{(2D^{\mathfrak{D}} \mathbf{u}^{\mathcal{T}} + B_{\mathfrak{Q}} \delta^{\mathfrak{D}} + {}^t \delta^{\mathfrak{D}} B_{\mathfrak{Q}} : B_{\mathfrak{Q}} \delta^{\mathfrak{D}} + {}^t \delta^{\mathfrak{D}} B_{\mathfrak{Q}})}_{= 2D_{\mathfrak{D}}^{\mathcal{N}} \mathbf{u}^{\mathcal{T}}} = 0. \quad (20)$$

Comme $D_{\mathcal{Q}}^{\mathcal{N}} \mathbf{u}^{\mathcal{T}} = D^{\mathcal{D}} \mathbf{u}^{\mathcal{T}} + \frac{1}{2}(B_{\mathcal{Q}} \delta^{\mathcal{D}} + {}^t \delta^{\mathcal{D}} B_{\mathcal{Q}})$, il vient que

$$\sum_{\mathcal{Q} \in \Omega_{\mathcal{D}}} m_{\mathcal{Q}} \eta_{\mathcal{Q}} \|D_{\mathcal{Q}}^{\mathcal{N}} \mathbf{u}^{\mathcal{T}}\|_{\mathcal{F}}^2 = \sum_{\mathcal{Q} \in \Omega_{\mathcal{D}}} m_{\mathcal{Q}} \eta_{\mathcal{Q}} (D_{\mathcal{Q}}^{\mathcal{N}} \mathbf{u}^{\mathcal{T}} : D^{\mathcal{D}} \mathbf{u}^{\mathcal{T}}).$$

On utilise le fait que η est bornée par \overline{C}_{η} et \underline{C}_{η} pour obtenir

$$\underline{C}_{\eta} \sum_{\mathcal{Q} \in \Omega_{\mathcal{D}}} m_{\mathcal{Q}} \|D_{\mathcal{Q}}^{\mathcal{N}} \mathbf{u}^{\mathcal{T}}\|_{\mathcal{F}}^2 \leq \overline{C}_{\eta} \sum_{\mathcal{Q} \in \Omega_{\mathcal{D}}} m_{\mathcal{Q}} (D_{\mathcal{Q}}^{\mathcal{N}} \mathbf{u}^{\mathcal{T}} : D^{\mathcal{D}} \mathbf{u}^{\mathcal{T}}).$$

En appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on en déduit l'estimation avec $C = \frac{\overline{C}_{\eta}}{\underline{C}_{\eta}}$. ■

En fait, l'égalité (20) est une propriété importante car elle nous permet à la fois de comparer $\|D_{\mathcal{Q}}^{\mathcal{N}} \mathbf{u}^{\mathcal{T}}\|_2$ et $\|D^{\mathcal{D}} \mathbf{u}^{\mathcal{T}}\|_2$, et de comparer $\|B_{\mathcal{Q}} \delta^{\mathcal{D}} + {}^t \delta^{\mathcal{D}} B_{\mathcal{Q}}\|_2$ et $\|D^{\mathcal{D}} \mathbf{u}^{\mathcal{T}}\|_2$. Cette dernière comparaison, le lemme 13 et les deux inégalités de Korn nous permettent de comparer également le gradient discret avec le gradient modifié. Il faut remarquer que le résultat suivant est déduit des inégalités de Korn. Il ne semble pas possible de le montrer de manière indépendante, du moins en ce qui concerne l'inégalité de droite.

Lemme 14

Il existe une constante $C > 0$, dépendant uniquement de η et $\text{reg}(\mathcal{T})$, telle que pour tout $\mathbf{u}^{\mathcal{T}} \in \mathbb{E}_0$:

$$\|\nabla^{\mathcal{D}} \mathbf{u}^{\mathcal{T}}\|_2 \leq \|\nabla_{\mathcal{Q}}^{\mathcal{N}} \mathbf{u}^{\mathcal{T}}\|_2 \leq C_2 \|\nabla^{\mathcal{D}} \mathbf{u}^{\mathcal{T}}\|_2.$$

Stabilité du schéma m-DDFV

L'étude de la stabilité du schéma (19) est plus complexe que pour le schéma (13), car il faut travailler avec les inconnues artificielles (bien qu'elles soient algébriquement éliminées dans le système).

Théorème 15 (Stabilité du schéma m-DDFV)

On suppose que $\lambda > 0$ est assez petit. Il existe deux constantes $C_1, C_2 > 0$, dépendant uniquement de Ω , λ , η et $\text{reg}(\mathcal{T})$, telles que pour tout couple $(\mathbf{u}^{\mathcal{T}}, p^{\mathcal{D}}) \in \mathbb{E}_0 \times \mathbb{R}^{\mathcal{D}}$ tel que $\sum_{\mathcal{D} \in \mathcal{D}} m_{\mathcal{D}} p^{\mathcal{D}} = 0$, il existe un couple $(\tilde{\mathbf{u}}^{\mathcal{T}}, \tilde{p}^{\mathcal{D}}) \in \mathbb{E}_0 \times \mathbb{R}^{\mathcal{D}}$ avec :

$$\|\nabla_{\mathcal{Q}}^{\mathcal{N}} \tilde{\mathbf{u}}^{\mathcal{T}}\|_2 + \|\tilde{p}^{\mathcal{D}}\|_2 \leq C_1 (\|\nabla_{\mathcal{Q}}^{\mathcal{N}} \mathbf{u}^{\mathcal{T}}\|_2 + \|p^{\mathcal{D}}\|_2),$$

et

$$\|\nabla_{\mathcal{Q}}^{\mathcal{N}} \mathbf{u}^{\mathcal{T}}\|_2^2 + \|p^{\mathcal{D}}\|_2^2 \leq C_2 B(\mathbf{u}^{\mathcal{T}}, p^{\mathcal{D}}; \tilde{\mathbf{u}}^{\mathcal{T}}, \tilde{p}^{\mathcal{D}}),$$

avec $(\delta^{\mathcal{D}}, p^{\mathcal{D}})$ (resp. $(\tilde{\delta}^{\mathcal{D}}, \tilde{p}^{\mathcal{D}})$) la solution de (18) pour $D^{\mathcal{D}} \mathbf{u}^{\mathcal{T}}$ et $p^{\mathcal{D}}$ (resp. $D^{\mathcal{D}} \tilde{\mathbf{u}}^{\mathcal{T}}$ et $\tilde{p}^{\mathcal{D}}$), et la forme bilinéaire associée au schéma (19) pour tout $(\mathbf{u}^{\mathcal{T}}, p^{\mathcal{D}}), (\tilde{\mathbf{u}}^{\mathcal{T}}, \tilde{p}^{\mathcal{D}}) \in (\mathbb{R}^2)^{\mathcal{T}} \times \mathbb{R}^{\mathcal{D}}$:

$$B(\mathbf{u}^{\mathcal{T}}, p^{\mathcal{D}}; \tilde{\mathbf{u}}^{\mathcal{T}}, \tilde{p}^{\mathcal{D}}) = \llbracket \text{div}^{\mathcal{T}}(-\varphi^{\mathcal{D}}(D^{\mathcal{D}} \mathbf{u}^{\mathcal{T}}, p^{\mathcal{D}})), \tilde{\mathbf{u}}^{\mathcal{T}} \rrbracket_{\mathcal{T}} + (\text{div}^{\mathcal{D}}(\mathbf{u}^{\mathcal{T}}) - \lambda d_{\mathcal{D}}^2 \underline{\Delta}^{\mathcal{D}} p^{\mathcal{D}}, \tilde{p}^{\mathcal{D}})_{\mathcal{D}}.$$

On en déduit le caractère bien posé du schéma (19).

Théorème 16 (Existence et unicité du schéma m-DDFV)

Le schéma (19) avec $\lambda > 0$ assez petit admet une unique solution $(\mathbf{u}^{\mathcal{T}}, p^{\mathcal{D}}) \in (\mathbb{R}^2)^{\mathcal{T}} \times \mathbb{R}^{\mathcal{D}}$.

Estimation d'erreur du schéma m-DDFV

On obtient enfin des estimations d'erreur en vitesse et en pression pour le schéma m-DDFV.

Théorème 17 (Estimation d'erreur du schéma m-DDFV)

On suppose que $\lambda > 0$ est assez petit et que la solution (\mathbf{u}, p) de (12) est régulière sur les quarts de diamant. Soit $(\mathbf{u}^{\mathcal{T}}, p^{\mathcal{D}}) \in (\mathbb{R}^2)^{\mathcal{T}} \times \mathbb{R}^{\mathcal{D}}$ la solution du schéma (19). Il existe une constante $C > 0$ dépendant uniquement

de Ω , $\text{reg}(\mathcal{T})$, λ , η , de normes de \mathbf{u} et p , telle que :

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}^\tau\|_2 + \|\mathbf{Du} - \mathbf{D}_\Omega^\mathcal{N} \mathbf{u}^\tau\|_2 \leq C \text{size}(\mathcal{T}) \quad \text{et} \quad \|p - p^\mathfrak{D}\|_2 \leq C \text{size}(\mathcal{T}).$$

avec $(\delta^\mathfrak{D}, p^\mathfrak{D})$ la solution de (18) pour $\mathbf{D}^\mathfrak{D} \mathbf{u}^\tau$ et $p^\mathfrak{D}$.

L'erreur de consistance associée à cette estimation d'erreur est assez complexe à prouver. Elle repose sur plusieurs lemmes intermédiaires où l'on a souvent besoin de travailler avec le couple (\mathbf{u}, p) solution exacte de (12). En particulier, le résultat suivant a demandé beaucoup d'efforts. Le couplage vitesse/pression implique que l'estimation de la consistance en vitesse dépend de p .

Lemme 18

On suppose que la solution (\mathbf{u}, p) de (12) est régulière sur les quarts de diamant. Il existe une constante $C > 0$ dépendant uniquement de η et $\text{reg}(\mathcal{T})$, telle que pour tout $\mathfrak{D} \in \mathfrak{D}$, on a

$$\|\mathbf{Du} - \mathbf{D}_\Omega^\mathcal{N} \mathbb{P}_c^\tau \mathbf{u}\|_{\Omega_\mathfrak{D}}^2 \leq C d_\mathfrak{D}^2 \sum_{\mathfrak{Q} \in \Omega_\mathfrak{D}} \int_{\mathfrak{Q}} (\|\nabla \mathbf{u}(z)\|_{\mathcal{F}}^2 + |\nabla^2 \mathbf{u}(z)|^2 + |\nabla p(z)|^2) dz.$$

Il faut noter que le résultat équivalent avec le gradient complet dans le membre de gauche (et non sa partie symétrique) n'est montré qu'en ajoutant une hypothèse sur le maillage DDFV (voir Corollaire VII.40).

La Section VI.6 illustre numériquement le réel gain de cette construction. Il faut souligner que, malgré les notations assez lourdes et une construction qui peut paraître compliquée, la mise en oeuvre du schéma m-DDFV est en fait facile à réaliser et que la résolution du schéma n'est pas plus coûteuse.

Chapitre VIII : Le problème de Navier-Stokes

L'intérêt pour la discrétisation des équation de Navier-Stokes par des méthodes volumes finis s'est développé au cours de ces dernières années, on réfère à [PBH04, EHL07, EH07, Del07, CEH08, DE09] par exemple. Dans ce chapitre, on présente un travail préliminaire sur le problème de Navier-Stokes instationnaire avec une viscosité variable :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } \mathbf{u} : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^2 \text{ et } p : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R} \text{ tels que} \\ \partial_t \mathbf{u} + \text{div}(-2\eta(x)\mathbf{Du} + p\text{Id}) + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} = \mathbf{f}, \text{ dans } \Omega \times]0, T[, \\ \text{div}(\mathbf{u}) = 0, \text{ dans } \Omega \times]0, T[, \\ \mathbf{u} = 0, \text{ sur } \partial\Omega \times]0, T[, \\ \mathbf{u}(\cdot, 0) = \mathbf{u}_{\text{ini}}, \text{ dans } \Omega, \quad \int_{\Omega} p(x) dx = 0, \end{array} \right. \quad (21)$$

où Ω est un domaine ouvert borné polygonal de \mathbb{R}^2 , $T > 0$, \mathbf{f} appartient à $(L^2(\Omega \times [0, T]))^2$, \mathbf{u}_{ini} appartient à $(L^\infty(\Omega))^2$, $\mathbf{Du} = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u} + {}^t \nabla \mathbf{u})$ est la partie symétrique du gradient de vitesse et la viscosité η appartient à $W^{1,\infty}(\Omega)$ avec $\inf_{\Omega} \eta > 0$. On travaille dans le cas d'une viscosité variable mais régulière comme dans le Chapitre VI. Par soucis de simplicité, on restreint notre étude à des conditions de Dirichlet homogène. On commence par introduire les nouveaux opérateurs discrets utilisés pour discrétiser le terme de convection non-linéaire $(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u}$ qui est linéarisé en explicitant la vitesse d'advection $(\mathbf{u}^n \cdot \nabla)\mathbf{u}^{n+1}$. On utilise ainsi un schéma linéaire à chaque pas de temps qui est bien posé pour des maillages généraux (voir Théorème VIII.5). Dans un travail en cours, il reste à établir l'analyse de convergence du schéma DDFV correspondant au problème (21) et à étudier son comportement numérique.

Chapitre IX : Introduction aux méthodes DDFV en 3D

Dans ce chapitre, nous présentons les méthodes DDFV dans le cadre 3D afin de généraliser à des maillages DDFV polyédraux 3D les résultats du Chapitre VI. Il est intéressant de noter que le passage 2D-3D dans le cas de la diffusion scalaire a conduit à trois formulations DDFV différentes. Comme en 2D, toutes ces approches font intervenir, outre le maillage initial, le maillage des mailles duales construites autour des sommets du maillage primal. Mais cela ne suffit pas, en 3D, car la construction d'un gradient discret nécessite trois directions indépendantes. On a naturellement deux directions : la direction des centres des mailles primales et

la direction des sommets des mailles primales. Le choix de la troisième direction diffère selon les approches (voir [CPT08, ABK08], [Her07] et [CH09]). Dans le cas où les interfaces du maillage primal sont des triangles ou des quadrilatères, les auteurs de [CPT08] définissent un gradient discret par faces du maillage primal, grâce à la direction des centres et deux directions complémentaires données grâce aux sommets de la face. Une extension à des polyèdres généraux mais conformes est proposée dans [ABK08]. F. Hermeline propose quant à lui dans [Her07] de définir un gradient discret pour chaque couple face-arête du maillage primal. En effet pour un couple face-arête $= (f, e)$, on a deux polyèdres p_K et p_L tels que $f = p_K|p_L$ et on a deux sommets v_A et v_B tels que $e = [v_A, v_B] \subset f$, ainsi les trois directions complémentaires sont la direction des centres de p_K et p_L , la direction des sommets v_A et v_B et la direction des centres de f et e . Deux inconnues auxiliaires sont formellement introduites aux faces et aux arêtes du maillage primal, et sont ensuite éliminées algébriquement. Le schéma obtenu pour des maillages polyédraux généraux conduit à des opérateurs linéaires non-symétriques, ceci rend l'analyse théorique de ce schéma plus difficile. Dans [CH09], les degrés de liberté aux faces et aux arêtes sont introduits comme dans [Her07]. Dans cette troisième approche, les nouvelles inconnues aux faces et aux arêtes vont jouer un rôle analogue aux autres inconnues. Les auteurs construisent alors un troisième maillage autour des inconnues face-arête et obtiennent ainsi une structure variationnelle semblable au 2D. Le maillage global \mathcal{T} est constitué d'un *triplet de maillages* $\mathcal{T} := (\mathcal{M}^P, \mathcal{M}^V, \mathcal{M}^{\mathcal{E}\mathcal{F}})$ composé du maillage primal \mathcal{M}^P , du maillage "sommets" \mathcal{M}^V et du maillage "face-arête" $\mathcal{M}^{\mathcal{E}\mathcal{F}}$ (voir la Figure 5). Le *maillage diamant* \mathcal{D} est alors associé à chaque couple face-arête.

Pour les problèmes de diffusion scalaires, les inconnues sont localisées sur le triplet de maillages \mathcal{T} et l'équation de diffusion est intégrée sur chacune des mailles intérieures de ce triplet de maillages \mathcal{T} . Le gradient discret $\nabla^{\mathcal{D}} u^T$, localisé sur le maillage diamant \mathcal{D} , est défini comme l'*unique* vecteur tridimensionnel constant sur \mathcal{D} (voir la Figure 4) qui vérifie

$$\nabla^{\mathcal{D}} u^T \cdot \overrightarrow{KL} = u_L - u_K, \quad \nabla^{\mathcal{D}} u^T \cdot \overrightarrow{AB} = u_B - u_A, \quad \nabla^{\mathcal{D}} u^T \cdot \overrightarrow{EF} = u_F - u_E.$$

Ainsi cette méthode DDFV peut être appliquée à des maillages polyédraux très généraux, elle conduit toujours

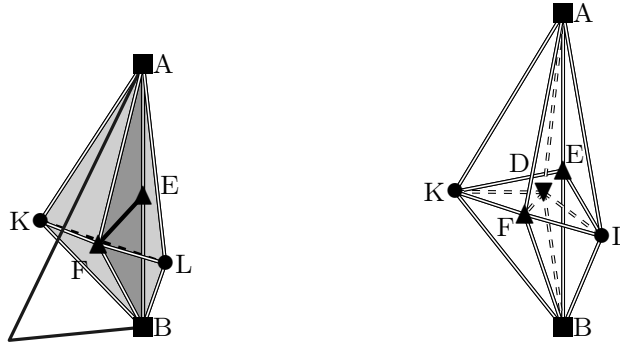


FIG. 4 – Le diamant et les sept points géométriques associés.

à un opérateur linéaire symétrique et l'analyse de la convergence peut être faite, comme dans [CH09].

Chapitre X : Méthode DDFV 3D pour le problème de Stokes

Dans ce chapitre, nous généralisons à des maillages DDFV polyédraux 3D les résultats du Chapitre VI, dans le cas du problème de Stokes stationnaire avec une viscosité régulière. Avec G. Manzini (article soumis [KM10]), nous avons choisi de considérer l'approche de [CH09] pour le problème de Stokes. Plus précisément, les inconnues en vitesse sont définies sur le triplet de maillages \mathcal{T} , c'est-à-dire aux centres, aux sommets, aux faces et aux arêtes du maillage primal et les inconnues en pression sont définies sur le maillage diamant \mathcal{D} . Les difficultés de l'extension au 3D de la discrétisation DDFV du problème de Stokes se trouvent dans l'établissement de l'inégalité de Korn et l'écriture appropriée du terme de stabilisation. Sous des hypothèses très générales sur le maillage, en particulier pour des polyèdres non-convexes et non-conformes, nous avons montré la stabilité et le caractère bien posé du schéma DDFV 3D pour le problème de Stokes. Nous avons aussi établi des estimations *a priori* pour les erreurs d'approximation en vitesse, en gradient de vitesse et en pression. Finalement, des tests numériques confirment les résultats théoriques.

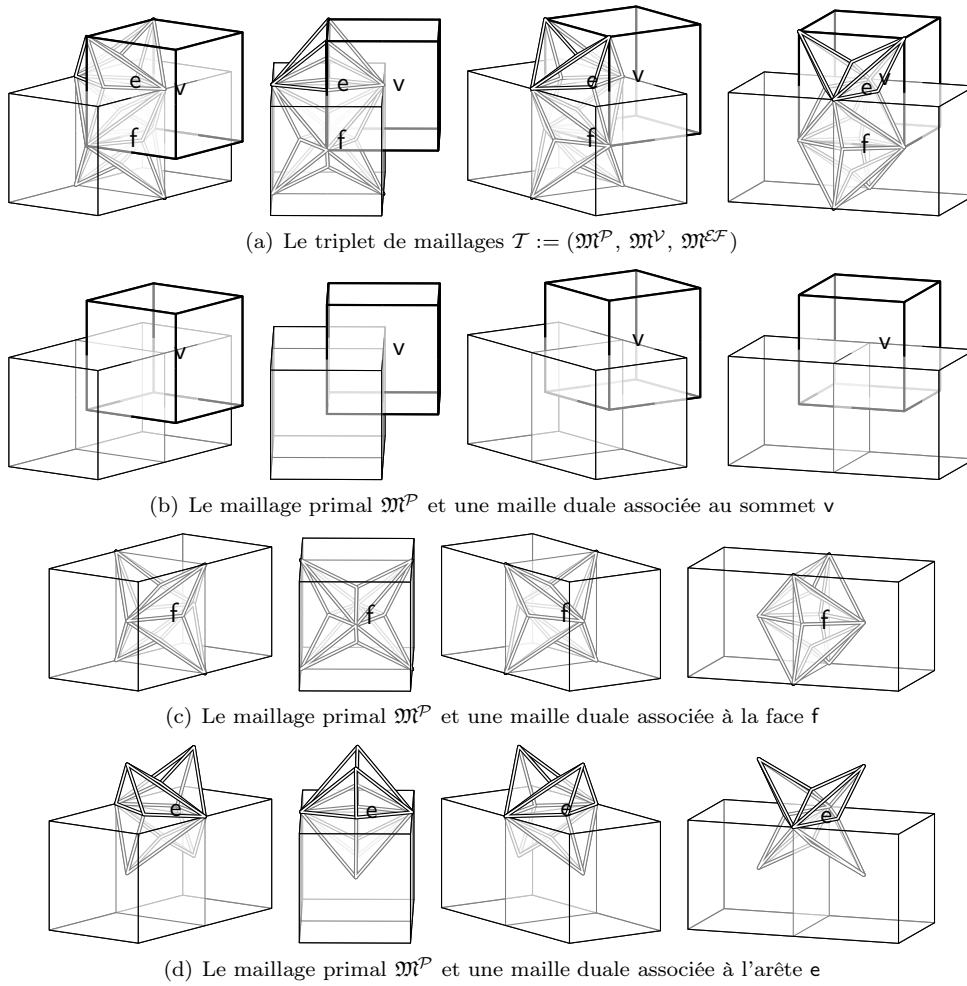


FIG. 5 – Vue 3D du triplet de maillages \mathcal{T} associé à une grille cartésienne.

Partie 1

Discrétisation DDFV des problèmes de diffusion scalaire anisotrope

Chapitre I

Description générale des méthodes DDFV

Dans ce chapitre¹, on commence par introduire les maillages DDFV et les notations associées que nous utiliserons tout au long de ce manuscrit dans le cadre 2D. Toutes les notations sont rassemblées dans l'annexe de ce manuscrit. Cette méthode numérique peut être vue comme agissant sur trois grilles décalées que l'on nomme maillage primal, maillage dual (centré sur les sommets du maillage primal) et maillage diamant noté \mathfrak{D} (centré sur les arêtes du maillage primal). Le maillage dual (aussi appelé maillage dual direct) est construit à l'aide des centres des mailles primales. Dans certains cas, les mailles duales directes peuvent se recouvrir. Pour éliminer ces cas particuliers, on introduit le maillage dual barycentrique qui est construit grâce aux centres et aux milieux des arêtes des mailles primales. Le couple du maillage primal et du maillage dual constitue le maillage DDFV noté \mathcal{T} . A chaque maille primale et duale, on associe une inconnue. A l'aide de ces deux jeux d'inconnues, on peut définir un gradient discret DDFV $\nabla^{\mathfrak{D}} : \mathbb{R}^{\mathcal{T}} \rightarrow (\mathbb{R}^2)^{\mathfrak{D}}$ (voir Définition I.7). La stratégie volumes finis qui consiste à intégrer l'équation sur chaque volume de contrôle et à se ramener à une approximation des flux normaux, nous permet de construire une divergence discrète $\text{div}^{\mathcal{T}} : (\mathbb{R}^2)^{\mathfrak{D}} \rightarrow \mathbb{R}^{\mathcal{T}}$ (voir Définition I.9) en dualité (voir Théorème I.10) avec le gradient discret. La dernière section de ce chapitre est consacrée aux principaux résultats essentiellement démontrés dans [ABH07] concernant les opérateurs discrets DDFV.

I.1 Construction des maillages DDFV

Rappelons le cadre géométrique 2D de la méthode *Discrete Duality Finite Volume*. On se donne un maillage primal \mathfrak{M} constitué de polygones disjoints κ appelés mailles primales dont leur réunion recouvre $\overline{\Omega}$. On note $\partial\mathfrak{M}$ l'ensemble des arêtes des mailles primales de \mathfrak{M} incluses dans $\partial\Omega$ qui sont considérées comme des mailles primales dégénérées. On associe à chacune des mailles primales un point x_{κ} , appelé centre de la maille, voir la Figure I.1. On précise que le point x_{κ} est situé au milieu des mailles primales dégénérées du bord. Pour toutes les mailles primales voisines κ et \mathcal{L} , on suppose que $\partial\kappa \cap \partial\mathcal{L}$ est un segment que l'on appelle une arête σ du maillage primal \mathfrak{M} , notée $\sigma = \kappa|\mathcal{L}$. D'après cette définition, une arête peut intersecter de façon non triviale plusieurs autres mailles. On note \mathcal{E} l'ensemble de ces arêtes. On ne considère pas ici d'hypothèse de type *admissibilité du maillage*. Autrement dit, il n'est pas nécessaire que soit vérifiée une condition d'orthogonalité entre les arêtes et les droites joignant les centres des mailles.

Hypothèse I.1

On suppose que toute maille primale $\kappa \in \mathfrak{M}$ est étoilée par rapport à x_{κ} .

Cette hypothèse simplifie un peu l'analyse (voir la Remarque I.6) et n'est pas très restrictive. En particulier si les mailles primales sont toutes convexes, c'est hypothèse est triviale.

¹Un aide mémoire rassemblant les notations de ce chapitre est disponible pages 240 et 241.

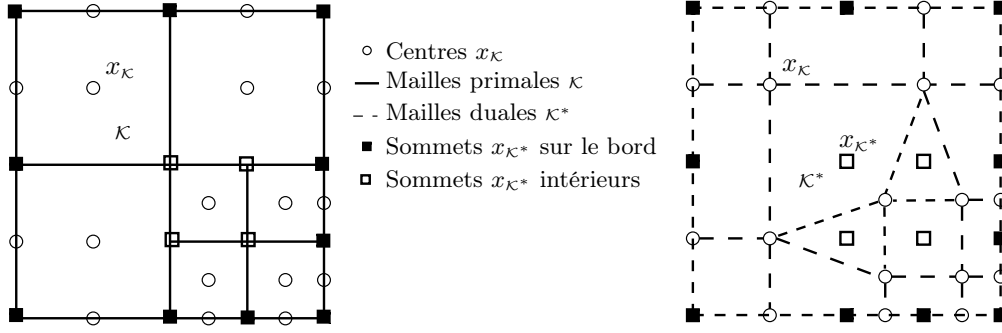


FIG. I.1 – Un maillage primal $\mathfrak{M} \cup \partial\mathfrak{M}$ (à gauche). Le maillage dual $\mathfrak{M}^* \cup \partial\mathfrak{M}^*$ correspondant (à droite).

A partir de ce maillage primal, on forme le maillage dual associé. Une maille duale κ^* est associée à un sommet x_{κ^*} du maillage primal. Les mailles duales dites directes sont obtenues en joignant (dans le sens trigonométrique par exemple) les centres des mailles primales qui ont pour sommets x_{κ^*} . Le point x_{κ^*} est alors appelé le centre de la maille duale directe κ^* . Les mailles duales directes sont donc des polygones qui ne sont pas forcément d'intérieurs disjoints. On distinguera par la suite les mailles duales intérieures, celles dont le sommet associé x_{κ^*} n'appartient pas à $\partial\Omega$, ensemble noté \mathfrak{M}^* et les mailles duales du bord, celles dont le sommet associé x_{κ^*} appartient à $\partial\Omega$, ensemble noté $\partial\mathfrak{M}^*$. On désigne par $\sigma^* = \kappa^*|_{\mathcal{L}^*}$ les arêtes du maillage dual direct $\mathfrak{M}^* \cup \partial\mathfrak{M}^*$ et \mathcal{E}^* désigne l'ensemble de ces arêtes. Dans certains cas, les mailles duales directes peuvent se recouvrir, ceci est illustré dans la Figure I.2. Pour éliminer ces cas, on peut supposer que tous les diamants sont convexes ou alors on peut prendre comme définition des mailles duales la définition barycentrique.

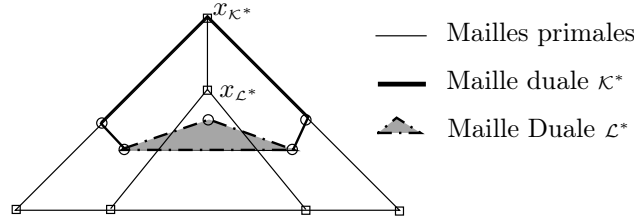


FIG. I.2 – Un exemple où deux mailles duales directes κ^* et \mathcal{L}^* se recouvrent : $\mathcal{L}^* \subset \kappa^*$.

Hypothèse I.2

On suppose que toute maille duale $\kappa^ \in \mathfrak{M}^* \cup \partial\mathfrak{M}^*$ est étoilée par rapport à x_{κ^*} .*

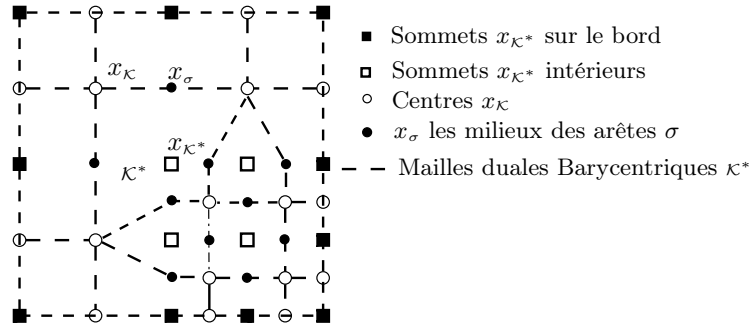
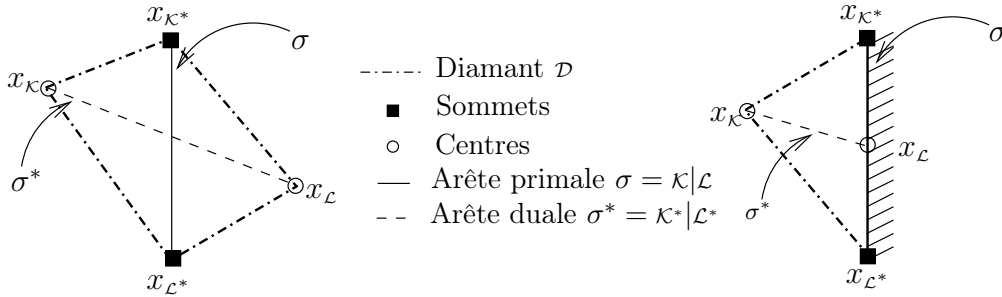
Cette hypothèse permet encore de simplifier un peu l'analyse (voir la Remarque I.6).

Les mailles duales barycentriques (voir la Figure I.3) sont obtenues en joignant (dans le sens trigonométrique par exemple) les centres des mailles primales qui ont pour sommets x_{κ^*} et x_σ les milieux des arêtes qui ont pour sommet x_{κ^*} . Avec ce choix barycentrique, les mailles duales sont d'intérieurs disjoints grâce à l'Hypothèse I.1.

Remarque I.3

Dans le cas d'un maillage dual barycentrique la notation σ^ désignera le segment $[x_\kappa, x_\mathcal{L}]$ (droite joignant deux centres voisins) et non pas une arête. En effet, les arêtes des mailles duales barycentriques sont les segments $[x_\kappa, x_\sigma]$ qui seront notés σ_κ .*

Un maillage DDFV est un couple constitué d'un maillage primal $\mathfrak{M} \cup \partial\mathfrak{M}$ (voir la Figure I.1 à gauche) et d'un maillage dual $\mathfrak{M}^* \cup \partial\mathfrak{M}^*$ direct (voir la Figure I.1 à droite) ou barycentrique (voir la Figure I.3), il sera désigné par \mathcal{T} . Dans tous les chapitres suivants, la plupart des résultats fonctionnent avec les maillages dual direct ou dual barycentrique, ainsi on parlera souvent de maillage dual, on ajoutera la précision direct ou barycentrique que lorsqu'elle est nécessaire.

FIG. I.3 – Un maillage dual barycentrique $\mathcal{M}^* \cup \partial\mathcal{M}^*$ correspondant au maillage primal de la Figure I.1.FIG. I.4 – Un diamant $\mathcal{D} = \mathcal{D}_{\sigma, \sigma^*}$.

Le maillage diamant est constitué de quadrilatères (voir la Figure I.4) d'intérieurs disjoints (grâce à l'Hypothèse I.1) tels que leurs diagonales principales soient une arête primale $\sigma = \kappa|\mathcal{L} = [x_{\kappa^*}, x_{\mathcal{L}^*}]$ et le segment $\sigma^* = [x_{\kappa}, x_{\mathcal{L}}]$, appelés diamants et notés \mathcal{D} ou $\mathcal{D}_{\sigma, \sigma^*}$. Un diamant est ainsi le quadrilatère de sommets $x_{\kappa}, x_{\mathcal{L}}, x_{\kappa^*}$ et $x_{\mathcal{L}^*}$. On remarque que les diamants sont une réunion de deux triangles disjoints $(x_{\kappa}, x_{\kappa^*}, x_{\mathcal{L}^*})$ et $(x_{\mathcal{L}}, x_{\kappa^*}, x_{\mathcal{L}^*})$ et que les diamants ne sont pas forcément convexes. En outre, si $\sigma \in \mathcal{E} \cap \partial\Omega$, le quadrilatère $\mathcal{D}_{\sigma, \sigma^*}$ est dégénéré, c'est un triangle. L'ensemble des diamants est noté \mathcal{D} et on a $\overline{\Omega} = \bigcup_{\mathcal{D} \in \mathcal{D}} \mathcal{D}$. On distingue les diamants intérieurs et diamants sur le bord :

- $\mathcal{D}_{ext} = \{\mathcal{D}_{\sigma, \sigma^*} \in \mathcal{D}, \text{ tel que } \sigma \subset \partial\Omega\},$
- $\mathcal{D}_{int} = \mathcal{D} \setminus \mathcal{D}_{ext}.$

Remarque I.4

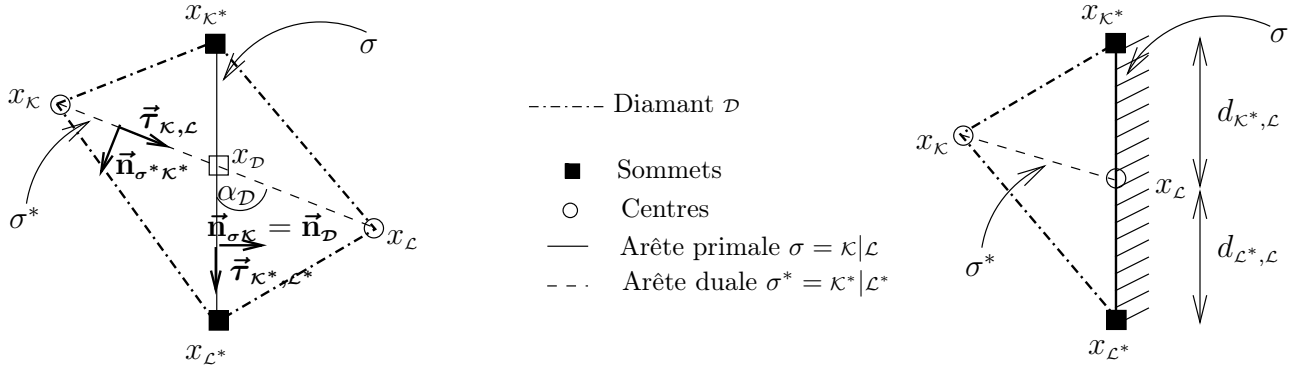
On a ainsi une bijection entre les diamants $\mathcal{D} \in \mathcal{D}$ et les arêtes \mathcal{E} du maillage primal, de même entre les diamants $\mathcal{D} \in \mathcal{D}$ et les arêtes \mathcal{E}^* du maillage dual.

Notations : On introduit maintenant quelques notations. Pour une maille primale $\kappa \in \mathcal{M} \cup \partial\mathcal{M}$, on définit :

- m_{κ} la mesure de la maille κ ,
- \mathcal{E}_{κ} l'ensemble des arêtes de $\kappa \in \mathcal{M}$ et l'arête $\sigma = \kappa$ pour $\kappa \in \partial\mathcal{M}$,
- $\mathcal{D}_{\kappa} = \{\mathcal{D}_{\sigma, \sigma^*} \in \mathcal{D}, \sigma \in \mathcal{E}_{\kappa}\},$
- \vec{n}_{κ} la normale extérieure à κ ,
- d_{κ} le diamètre de κ ,
- $B_{\kappa} := B(x_{\kappa}, \rho_{\kappa}) \cap \partial\Omega \subset \kappa$ pour $\kappa \in \partial\mathcal{M}$, $m_{B_{\kappa}}$ sa longueur, la valeur ρ_{κ} est choisie de telle sorte que l'inclusion soit vérifiée.

De même pour une maille duale $\kappa^* \in \mathcal{M}^* \cup \partial\mathcal{M}^*$, on définit :

- m_{κ^*} la mesure de la maille κ^* ,
- \mathcal{E}_{κ^*} l'ensemble des droites σ^* de $\kappa^* \in \mathcal{M}^* \cup \partial\mathcal{M}^*$,
- $\mathcal{D}_{\kappa^*} = \{\mathcal{D}_{\sigma, \sigma^*} \in \mathcal{D}, \sigma^* \in \mathcal{E}_{\kappa^*}\},$
- \vec{n}_{κ^*} la normale extérieure à κ^* ,
- d_{κ^*} le diamètre de κ^* ,
- $B_{\kappa^*} := B(x_{\kappa^*}, \rho_{\kappa^*}) \cap \partial\Omega \subset \kappa^*$ pour $\kappa^* \in \partial\mathcal{M}^*$, $m_{B_{\kappa^*}}$ sa longueur, la valeur ρ_{κ^*} est choisie de telle sorte que l'inclusion soit vérifiée.

FIG. I.5 – Les notations d'un diamant $\mathcal{D}_{\sigma, \sigma^*}$.

Pour un diamant $\mathcal{D}_{\sigma, \sigma^*}$ dont les sommets sont $(x_\kappa, x_{\kappa^*}, x_\mathcal{L}, x_{\mathcal{L}^*})$ (voir la Figure I.5), on note :

- x_σ le milieu de l'arête σ ,
- $x_\mathcal{D}$ le centre du diamant $\mathcal{D} : x_\mathcal{D} = \sigma \cap \sigma^*$ pour un maillage dual direct et $x_\mathcal{D} = x_\sigma$ pour un maillage dual barycentrique,
- m_σ la longueur de l'arête σ ,
- m_{σ^*} la longueur de σ^* ,
- $m_\mathcal{D}$ la mesure du diamant $\mathcal{D}_{\sigma, \sigma^*}$,
- $d_\mathcal{D}$ le diamètre du diamant $\mathcal{D}_{\sigma, \sigma^*}$,
- $\alpha_\mathcal{D}$ l'angle entre σ et σ^* ,
- $d_{\kappa^*, \mathcal{L}}$ la distance entre x_{κ^*} et $x_\mathcal{L}$,
- $d_{\mathcal{L}^*, \mathcal{L}}$ la distance entre $x_{\mathcal{L}^*}$ et $x_\mathcal{L}$.

Pour tout $\mathcal{D} \in \mathcal{D}_{ext}$, on a $x_\mathcal{D} = x_\mathcal{L}$, d'où $m_{\sigma_{\kappa^*}} = d_{\kappa^*, \mathcal{L}}$ et $m_{\sigma_{\mathcal{L}^*}} = d_{\mathcal{L}^*, \mathcal{L}}$.

On introduit pour chaque diamant dans la Figure I.5 les deux bases orthonormées directes $(\vec{\tau}_{\kappa^*, \mathcal{L}^*}, \vec{n}_{\sigma\kappa})$ et $(\vec{n}_{\sigma^*\kappa^*}, \vec{\tau}_{\kappa, \mathcal{L}})$, où

- $\vec{n}_{\sigma\kappa}$ la normale unitaire à σ sortante de κ ,
- $\vec{\tau}_{\kappa^*, \mathcal{L}^*}$ le vecteur tangent unitaire à σ orienté de κ^* à \mathcal{L}^* ,
- $\vec{n}_{\sigma^*\kappa^*}$ la normale unitaire à σ^* sortante de κ^* ,
- $\vec{\tau}_{\kappa, \mathcal{L}}$ le vecteur tangent unitaire à σ^* orienté de κ à \mathcal{L} .

On a les relations suivantes : $\vec{\tau}_{\kappa, \mathcal{L}} \cdot \vec{n}_{\sigma^*\kappa^*} = \vec{\tau}_{\kappa^*, \mathcal{L}^*} \cdot \vec{n}_{\sigma\kappa} = 0$, $\vec{\tau}_{\kappa^*, \mathcal{L}^*} \cdot \vec{n}_{\sigma^*\kappa^*} = \vec{\tau}_{\kappa, \mathcal{L}} \cdot \vec{n}_{\sigma\kappa} = \sin(\alpha_\mathcal{D})$.

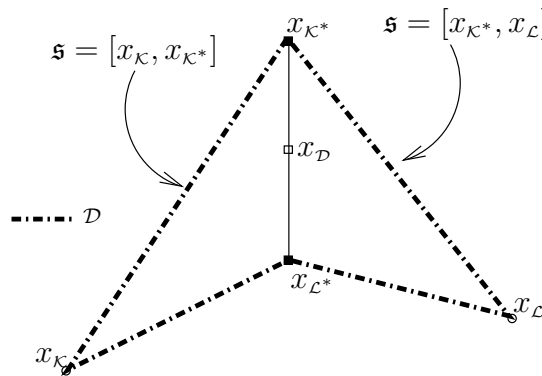


FIG. I.6 – Un diamant et ses côtés.

On note, pour chaque diamant \mathcal{D} ,

- ses côtés \mathfrak{s} (par exemple $\mathfrak{s} = [x_\kappa, x_{\kappa^*}]$ voir la Figure I.6),
- $\mathcal{E}_\mathcal{D} = \{\mathfrak{s} \subset \partial\mathcal{D} \text{ et } \mathfrak{s} \not\subset \partial\Omega\}$ l'ensemble des côtés intérieurs du diamant \mathcal{D} ,
- $m_\mathfrak{s}$ la longueur d'un côté du diamant \mathfrak{s} ,
- $\vec{n}_{\mathfrak{s}\mathcal{D}}$ la normale unitaire à \mathfrak{s} sortante de \mathcal{D} ,
- \mathfrak{S} l'ensemble des côtés intérieurs de tous les diamants.

Le maillage dual barycentrique nécessite de nouvelles notations (voir la Figure I.7), pour un diamant $\mathcal{D} = \mathcal{D}_{\sigma, \sigma^*}$ où :

- σ_κ (resp. $\sigma_\mathcal{L}$) le segment $[x_\kappa, x_\mathcal{D}]$ (resp. $[x_\mathcal{D}, x_\mathcal{L}]$),
- σ_{κ^*} (resp. $\sigma_{\mathcal{L}^*}$) le segment $[x_{\kappa^*}, x_\mathcal{D}]$ (resp. $[x_\mathcal{D}, x_{\mathcal{L}^*}]$),
- α_κ l'angle entre σ_κ et σ ,
- $\alpha_\mathcal{L}$ l'angle entre $\sigma_\mathcal{L}$ et σ ,
- m_ς la longueur de ς et x_ς le milieu du segment ς pour chaque $\varsigma \in \{\sigma_\kappa, \sigma_\mathcal{L}, \sigma_{\kappa^*}, \sigma_{\mathcal{L}^*}\}$.

On introduit pour chaque diamant dans la Figure I.7 les deux autres bases orthonormées directes $(\vec{n}_{\sigma_\kappa \kappa^*}, \vec{\tau}_{\sigma_\kappa \kappa^*})$ et $(\vec{n}_{\sigma_\mathcal{L} \mathcal{L}^*}, \vec{\tau}_{\sigma_\mathcal{L} \mathcal{L}^*})$, où

- $\vec{n}_{\sigma_\kappa \kappa^*}$ la normale unitaire à σ_κ orienté de x_{κ^*} à $x_{\mathcal{L}^*}$,
- $\vec{\tau}_{\sigma_\kappa \kappa^*}$ le vecteur tangent unitaire à σ_κ orienté de x_κ à $x_\mathcal{D}$,
- $\vec{n}_{\sigma_\mathcal{L} \mathcal{L}^*}$ la normale unitaire à $\sigma_\mathcal{L}$ orienté de x_{κ^*} à $x_{\mathcal{L}^*}$,
- $\vec{\tau}_{\sigma_\mathcal{L} \mathcal{L}^*}$ le vecteur tangent unitaire à $\sigma_\mathcal{L}$ orienté de $x_\mathcal{D}$ à $x_\mathcal{L}$.

Pour tout $\mathcal{D} \in \mathfrak{D}$, on remarque que l'on a $m_{\sigma^*} \vec{n}_{\sigma^* \kappa^*} = m_{\sigma_\kappa} \vec{n}_{\sigma_\kappa \kappa^*} + m_{\sigma_\mathcal{L}} \vec{n}_{\sigma_\mathcal{L} \mathcal{L}^*}$.

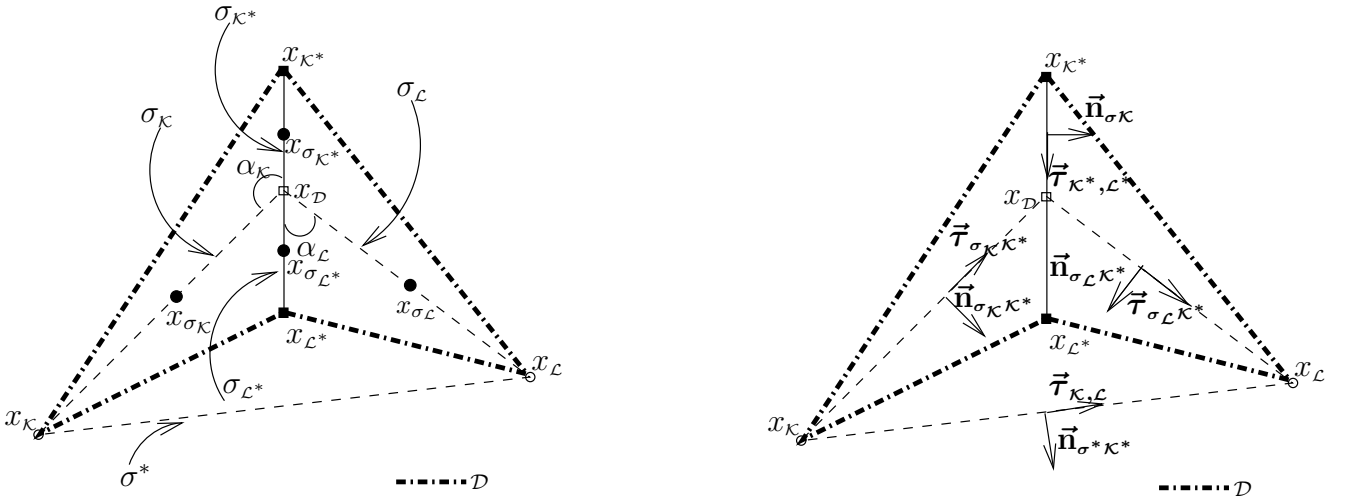


FIG. I.7 – Les notations d'un diamant $\mathcal{D}_{\sigma, \sigma^*}$ avec un maillage dual barycentrique.

Remarque I.5

On a que toute maille diamant \mathcal{D} est étoilée par rapport à $x_\mathcal{D}$.

A chaque diamant $\mathcal{D} \in \mathfrak{D}$, on associe des demi-diamants de la manière suivante $\tilde{\mathcal{D}}_p = \mathcal{D} \cap p$ tel que $p \cap \mathcal{D} \neq \emptyset$ pour $p \in \{\kappa, \mathcal{L}\}$. Si $\mathcal{D} \in \mathfrak{D}_{int}$, on a $\mathcal{D} = \tilde{\mathcal{D}}_\kappa \cup \tilde{\mathcal{D}}_\mathcal{L}$ et si $\mathcal{D} \in \mathfrak{D}_{ext}$, on a $\mathcal{D} = \tilde{\mathcal{D}}_\kappa$. L'ensemble des demi-diamants est noté par $\tilde{\mathfrak{D}}$. Pour un demi-diamant $\tilde{\mathcal{D}} \in \tilde{\mathfrak{D}}$, on note $m_{\tilde{\mathcal{D}}}$ sa mesure. Pour chaque diamant $\mathcal{D} \in \mathfrak{D}$, on définit un sous-ensemble de demi-diamant de \mathcal{D} : $\tilde{\mathfrak{D}}_\mathcal{D} = \{\tilde{\mathcal{D}} \in \tilde{\mathfrak{D}}, \tilde{\mathcal{D}} \subset \mathcal{D}\}$.

Ensuite à chaque diamant $\mathcal{D} \in \mathfrak{D}$, on associe des quarts de diamant de la manière suivante $\mathcal{Q}_{p,d} = \mathcal{D} \cap p \cap d$, tel que $p \cap \mathcal{D} \neq \emptyset$ et $d \cap \mathcal{D} \neq \emptyset$, pour $p \in \{\kappa, \mathcal{L}\}$ et $d \in \{\kappa^*, \mathcal{L}^*\}$, comme le montre la Figure I.8. Si $\mathcal{D} \in \mathfrak{D}_{int}$, on a $\mathcal{D} = \mathcal{Q}_{\kappa, \kappa^*} \cup \mathcal{Q}_{\kappa, \mathcal{L}^*} \cup \mathcal{Q}_{\mathcal{L}, \kappa^*} \cup \mathcal{Q}_{\mathcal{L}, \mathcal{L}^*}$ et si $\mathcal{D} \in \mathfrak{D}_{ext}$, on a $\mathcal{D} = \mathcal{Q}_{\kappa, \kappa^*} \cup \mathcal{Q}_{\kappa, \mathcal{L}^*}$. L'ensemble des quarts de diamant de \mathfrak{D} est noté $\mathfrak{Q}_\mathfrak{D}$ et $\mathfrak{Q} = \bigcup_{\mathcal{D} \in \mathfrak{D}} \mathfrak{Q}_\mathfrak{D}$ désigne l'ensemble de tous les quarts de diamant. Pour un quart de diamant $\mathcal{Q} \in \mathfrak{Q}$, on note :

- $x_\mathcal{Q}$ son barycentre,
- $m_\mathcal{Q}$ sa mesure,
- $d_\mathcal{Q}$ son diamètre,
- $\mathcal{E}_\mathcal{Q} = \{\mathfrak{s}, \mathfrak{s} \subset \partial \mathcal{Q} \text{ et } \mathfrak{s} \not\subset \partial \mathcal{D}\}$ l'ensemble des côtés du quart de diamant $\mathcal{Q} \in \mathfrak{Q}_\mathfrak{D}$ qui sont à l'intérieur du diamant $\mathcal{D} \in \mathfrak{D}$.

On remarque que l'on a un lien entre les demi-diamants et les quarts de diamant : on a $\tilde{\mathcal{D}}_\kappa = \mathcal{Q}_{\kappa, \kappa^*} \cup \mathcal{Q}_{\kappa, \mathcal{L}^*}$ et $\tilde{\mathcal{D}}_\mathcal{L} = \mathcal{Q}_{\mathcal{L}, \kappa^*} \cup \mathcal{Q}_{\mathcal{L}, \mathcal{L}^*}$.

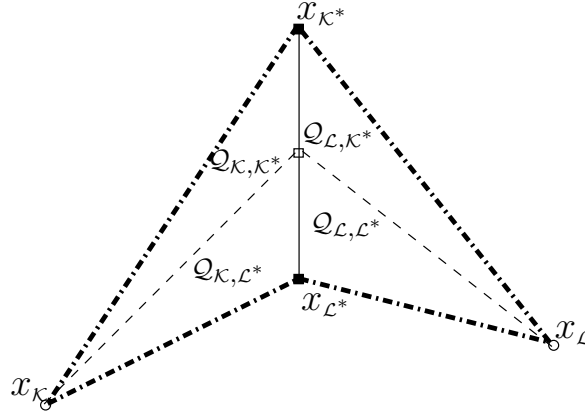


FIG. I.8 – Les quarts de diamant.

Régularité du maillage : Soit $\text{size}(\mathcal{T})$ le maximum des diamètres des diamants. Pour mesurer l'applatisssement des diamants, on note $\alpha_{\mathcal{T}}$ l'unique réel dans $]0, \frac{\pi}{2}]$ tel que $\sin(\alpha_{\mathcal{T}}) := \min_{\mathcal{D} \in \mathcal{D}} |\sin(\alpha_{\mathcal{D}})|$ si le maillage dual est direct et $\sin(\alpha_{\mathcal{T}}) := \min_{\mathcal{D} \in \mathcal{D}} (|\sin(\alpha_{\mathcal{K}})|, |\sin(\alpha_{\mathcal{L}})|)$ si le maillage dual est barycentrique. On introduit un nombre positif $\text{reg}(\mathcal{T})$ qui mesure la régularité d'un maillage donné et qui est utilisé pour réaliser la convergence des schémas :

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_{\mathcal{T}} &= \sup_{x \in \Omega} \text{Card} \left(\mathcal{D} / x \in \widehat{\mathcal{D} \cup \mathcal{K}}, \mathcal{D} \in \mathcal{D}_{\mathcal{K}}, \mathcal{K} \in \mathfrak{M} \right) + \sup_{x \in \Omega} \text{Card} \left(\mathcal{D} / x \in \widehat{\mathcal{D} \cup \mathcal{K}^*}, \mathcal{D} \in \mathcal{D}_{\mathcal{K}^*}, \mathcal{K}^* \in \mathfrak{M}^* \cup \partial \mathfrak{M}^* \right), \\ \text{reg}(\mathcal{T}) &= \max \left(\frac{1}{\sin(\alpha_{\mathcal{T}})}, \mathcal{N}, \mathcal{N}^*, \mathcal{N}_{\mathcal{T}}, \max_{\mathcal{D} \in \mathcal{D}} \max_{\substack{\mathcal{Q} \in \mathcal{Q}_{\mathcal{D}} \\ \sigma \in \partial \mathcal{Q}}} \frac{d_{\mathcal{D}}}{\min m_{\sigma}}, \max_{\mathcal{K} \in \mathfrak{M}} \left(\frac{d_{\mathcal{K}}}{\sqrt{m_{\mathcal{K}}}} \right), \max_{\mathcal{K}^* \in \mathfrak{M}^*} \left(\frac{d_{\mathcal{K}^*}}{\sqrt{m_{\mathcal{K}^*}}} \right), \right. \\ &\quad \left. \max_{\mathcal{K} \in \mathfrak{M}} \max_{\mathcal{D} \in \mathcal{D}_{\mathcal{K}}} \left(\frac{d_{\mathcal{K}}}{d_{\mathcal{D}}} \right), \max_{\mathcal{K}^* \in \mathfrak{M}^*} \max_{\mathcal{D} \in \mathcal{D}_{\mathcal{K}^*}} \left(\frac{d_{\mathcal{K}^*}}{d_{\mathcal{D}}} \right) \right), \end{aligned} \quad (\text{I.1})$$

où \widehat{P} désigne l'enveloppe convexe d'un ensemble P , \mathcal{N} et \mathcal{N}^* sont le nombre maximum d'arêtes d'une maille primale et le nombre maximum d'arêtes incidentes d'un sommet du maillage primal. Ce nombre $\text{reg}(\mathcal{T})$ mesure essentiellement l'applatisssement des diamants et le rapport entre la taille des mailles primales (resp. duales) et la taille des diamants et il doit être uniformément borné quand $\text{size}(\mathcal{T}) \rightarrow 0$ pour avoir la convergence. Par exemple, ce nombre $\text{reg}(\mathcal{T})$ implique les résultats géométriques suivants : il existe une constante $C > 0$, dépendant uniquement de $\text{reg}(\mathcal{T})$ telle que

$$\frac{d_{\mathcal{D}}}{\sqrt{m_{\mathcal{D}}}} \leq C, \quad \forall \mathcal{D} \in \mathcal{D}, \quad \frac{d_{\mathcal{Q}}}{\sqrt{m_{\mathcal{Q}}}} \leq C, \quad \forall \mathcal{Q} \in \mathcal{Q} \quad \text{et} \quad d_{\mathcal{D}} \leq C \min(m_{\sigma}, m_{\sigma^*}), \quad \forall \mathcal{D}_{\sigma, \sigma^*} \in \mathcal{D}.$$

Remarque I.6

Grâce aux Hypothèses I.1 et I.2, on a également :

$$\text{diam}(\widehat{\mathcal{K}}) \leq 2d_{\mathcal{K}}, \quad \forall \mathcal{K} \in \mathfrak{M} \quad \text{et} \quad \text{diam}(\widehat{\mathcal{K}^*}) \leq 2d_{\mathcal{K}^*}, \quad \forall \mathcal{K}^* \in \mathfrak{M}^* \cup \partial \mathfrak{M}^*,$$

de plus la Remarque I.5 implique :

$$\text{diam}(\widehat{\mathcal{D}}) \leq 2d_{\mathcal{D}}, \quad \forall \mathcal{D} \in \mathcal{D}.$$

I.2 Espaces d'approximation et définitions des projections sur les maillages DDFV

La méthode DDFV associe, à chaque maille primale $\mathcal{K} \in \mathfrak{M} \cup \partial \mathfrak{M}$, une inconnue scalaire $u_{\mathcal{K}}$ et, à chaque maille duale $\mathcal{K}^* \in \mathfrak{M}^* \cup \partial \mathfrak{M}^*$, une inconnue scalaire $u_{\mathcal{K}^*}$. Ainsi l'ensemble des inconnues associé au maillage

DDFV \mathcal{T} est défini de la manière suivante :

$$u^\mathcal{T} \in \mathbb{R}^\mathcal{T} \iff u^\mathcal{T} = \left((u_\kappa)_{\kappa \in (\mathfrak{M} \cup \partial\mathfrak{M})}, (u_{\kappa^*})_{\kappa^* \in (\mathfrak{M}^* \cup \partial\mathfrak{M}^*)} \right). \quad (\text{I.2})$$

On a environ deux fois plus d'inconnues que dans la méthode VF4 mais cela permet de définir une approximation complète du gradient et pas uniquement dans la direction normale, ceci rend la méthode beaucoup plus robuste.

On définit des projections moyennes discrètes, pour toute fonction dans $H^1(\Omega)$: une sur le bord comme suit

$$\mathbb{P}_m^{\partial\Omega} v = \left(\left(\frac{1}{m_{B_\kappa}} \int_{B_\kappa} v(x) dx \right)_{\kappa \in \partial\mathfrak{M}}, \left(\frac{1}{m_{B_{\kappa^*}}} \int_{B_{\kappa^*}} v(x) dx \right)_{\kappa^* \in \partial\mathfrak{M}^*} \right), \quad (\text{I.3})$$

on rappelle que B_κ (resp. B_{κ^*}) est défini pour tout $\kappa \in \partial\mathfrak{M}$ (resp. pour tout $\kappa^* \in \partial\mathfrak{M}^*$). Une autre projection moyenne est définie à l'intérieur :

$$\mathbb{P}_m^\mathfrak{M} v = \left(\left(\frac{1}{m_\kappa} \int_\kappa v(x) dx \right)_{\kappa \in \mathfrak{M}} \right), \quad \mathbb{P}_m^{\mathfrak{M}^*} v = \left(\left(\frac{1}{m_{\kappa^*}} \int_{\kappa^*} v(x) dx \right)_{\kappa^* \in \mathfrak{M}^*} \right). \quad (\text{I.4})$$

Finalement, on les regroupe de la manière suivante :

$$\mathbb{P}_m^\mathcal{T} v = (\mathbb{P}_m^\mathfrak{M} v, \mathbb{P}_m^{\mathfrak{M}^*} v, \mathbb{P}_m^{\partial\Omega} v), \quad \forall v \in H^1(\Omega). \quad (\text{I.5})$$

On introduit également une projection centrée (qui n'est définie que pour les fonctions continues) :

$$\mathbb{P}_c^\mathcal{T} v = ((v(x_\kappa))_{\kappa \in (\mathfrak{M} \cup \partial\mathfrak{M})}, (v(x_{\kappa^*}))_{\kappa^* \in (\mathfrak{M}^* \cup \partial\mathfrak{M}^*)}), \quad \forall v \in \mathcal{C}^0(\overline{\Omega}). \quad (\text{I.6})$$

On spécifie deux sous espaces discrets de $(\mathbb{R}^2)^\mathcal{T}$ utilisés pour prendre en compte les conditions aux bords de Dirichlet

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_0 &= \{v^\mathcal{T} \in \mathbb{R}^\mathcal{T} \text{ tel que } v_\kappa = 0, \forall \kappa \in \partial\mathfrak{M} \text{ et } v_{\kappa^*} = 0, \forall \kappa^* \in \partial\mathfrak{M}^*\}, \\ \mathbb{E}_g &= \{v^\mathcal{T} \in \mathbb{R}^\mathcal{T} \text{ tel que } v_\kappa = (\mathbb{P}_m^{\partial\Omega} g)_\kappa, \forall \kappa \in \partial\mathfrak{M} \text{ et } v_{\kappa^*} = (\mathbb{P}_m^{\partial\Omega} g)_{\kappa^*}, \forall \kappa^* \in \partial\mathfrak{M}^*\}. \end{aligned} \quad (\text{I.7})$$

On définit ensuite la projection $\mathfrak{P}_{m,g}$ sur l'espace \mathbb{E}_g :

$$\begin{aligned} \mathfrak{P}_{m,g} : \mathbb{R}^\mathcal{T} &\longrightarrow \mathbb{E}_g \\ u^\mathcal{T} &\longmapsto ((u_\kappa)_{\kappa \in \mathfrak{M}}, (\mathbb{P}_m^{\partial\Omega} g)_{\kappa \in \partial\mathfrak{M}}, (u_{\kappa^*})_{\kappa^* \in \mathfrak{M}^*}, (\mathbb{P}_m^{\partial\Omega} g)_{\kappa^* \in \partial\mathfrak{M}^*}). \end{aligned} \quad (\text{I.8})$$

I.3 Définitions des opérateurs discrets

Dans cette section, on définit deux opérateurs discrets : un gradient discret et une divergence discrète qui sont en dualité discrète. Ceci est montré dans la section suivante.

Définition I.7 (Gradient discret)

Le gradient discret est défini de la manière suivante : $\nabla^\mathfrak{D} : \mathbb{R}^\mathcal{T} \rightarrow (\mathbb{R}^2)^\mathfrak{D}$. Soit $u^\mathcal{T} \in \mathbb{R}^\mathcal{T}$, on pose $\nabla^\mathfrak{D} u^\mathcal{T} = (\nabla^\mathfrak{D} u^\mathcal{T})_{\mathfrak{D} \in \mathfrak{D}}$, où pour $\mathfrak{D} \in \mathfrak{D}$:

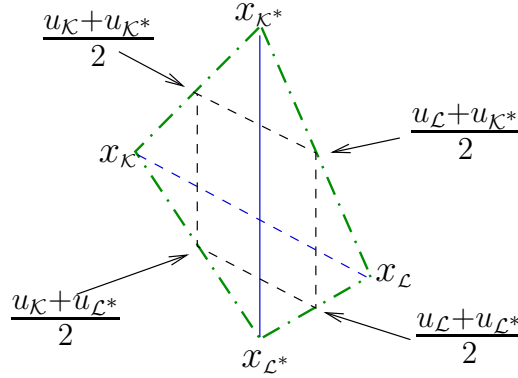
$$\nabla^\mathfrak{D} u^\mathcal{T} = \frac{1}{\sin(\alpha_\mathfrak{D})} \left(\frac{u_\mathfrak{L} - u_\mathfrak{K}}{m_{\sigma^*}} \vec{\mathbf{n}}_{\sigma\mathfrak{K}} + \frac{u_{\mathfrak{L}^*} - u_{\mathfrak{K}^*}}{m_\sigma} \vec{\mathbf{n}}_{\sigma^*\mathfrak{K}^*} \right) \iff \begin{cases} \nabla^\mathfrak{D} u^\mathcal{T} \cdot \vec{\tau}_{\mathfrak{K}^*, \mathfrak{L}^*} = \frac{u_{\mathfrak{L}^*} - u_{\mathfrak{K}^*}}{m_\sigma}, \\ \nabla^\mathfrak{D} u^\mathcal{T} \cdot \vec{\tau}_{\mathfrak{K}, \mathfrak{L}} = \frac{u_\mathfrak{L} - u_\mathfrak{K}}{m_{\sigma^*}}. \end{cases}$$

L'aire $m_\mathfrak{D}$ d'un diamant \mathfrak{D} est la suivante : $m_\mathfrak{D} = \frac{1}{2} m_\sigma m_{\sigma^*} \sin(\alpha_\mathfrak{D})$, on peut alors réécrire le gradient discret :

$$\nabla^\mathfrak{D} u^\mathcal{T} = \frac{1}{2m_\mathfrak{D}} [(u_\mathfrak{L} - u_\mathfrak{K}) m_\sigma \vec{\mathbf{n}}_{\sigma\mathfrak{K}} + (u_{\mathfrak{L}^*} - u_{\mathfrak{K}^*}) m_{\sigma^*} \vec{\mathbf{n}}_{\sigma^*\mathfrak{K}^*}].$$

On peut également définir le gradient discret en utilisant une fonction $\Pi^\mathfrak{D} u^\mathcal{T}$ affine par diamant $((\Pi^\mathfrak{D} u^\mathcal{T})|_\mathfrak{D} \in P^1(\mathfrak{D}), \forall \mathfrak{D} \in \mathfrak{D})$ telle que ses valeurs aux milieux des côtés de \mathfrak{D} soient imposées par la demi-somme des valeurs de $u^\mathcal{T}$ aux sommets correspondant (voir la Figure I.9). On obtient alors que le gradient discret sur le diamant \mathfrak{D} est égal au gradient de la fonction affine $\Pi^\mathfrak{D} u^\mathcal{T}$ restreint à \mathfrak{D} :

$$\nabla^\mathfrak{D} u^\mathcal{T} = (\nabla \Pi^\mathfrak{D} u^\mathcal{T})|_\mathfrak{D}.$$

FIG. I.9 – La fonction $\Pi^{\mathcal{D}} u^T$ affine par diamant.**Remarque I.8**

Pour tout $u^T \in \mathbb{R}^T$, la propriété $\nabla^{\mathcal{D}} u^T = 0$ implique l'existence de deux constantes c_0 et c_1 telles que :

$$\forall \kappa \in (\mathfrak{M} \cup \partial\mathfrak{M}), u_{\kappa} = c_0, \quad \forall \kappa^* \in (\mathfrak{M}^* \cup \partial\mathfrak{M}^*), u_{\kappa^*} = c_1.$$

Si de plus u^T est imposé nul sur une partie du bord (voir définition de \mathbb{E}_0 ou de \mathbb{E}_0^D donné par (II.9)), alors on en déduit $c_0 = c_1 = 0$ et finalement $u^T = 0$.

On remarque que pour une fonction vectorielle régulière ξ , on a en appliquant la formule de Green :

$$\int_{\kappa} \operatorname{div}(\xi(x)) dx = \sum_{\sigma \in \partial\kappa} \int_{\sigma} \xi(s) \cdot \vec{n}_{\sigma\kappa} ds, \quad \forall \kappa \in \mathfrak{M}. \quad (\text{I.9})$$

Par conséquent, la divergence discrète div^T est définie à l'aide de la version discrète de (I.9).

Définition I.9 (Divergence discrète)

L'opérateur de divergence discrète est défini de la manière suivante : $\operatorname{div}^T : (\mathbb{R}^2)^{\mathcal{D}} \rightarrow \mathbb{R}^T$. Soit $\xi^{\mathcal{D}} \in (\mathbb{R}^2)^{\mathcal{D}}$, on pose

$$\operatorname{div}^T \xi^{\mathcal{D}} = \left(\operatorname{div}^{\mathfrak{M}} \xi^{\mathcal{D}}, \operatorname{div}^{\partial\mathfrak{M}} \xi^{\mathcal{D}}, \operatorname{div}^{\mathfrak{M}^*} \xi^{\mathcal{D}}, \operatorname{div}^{\partial\mathfrak{M}^*} \xi^{\mathcal{D}} \right),$$

avec $\operatorname{div}^{\mathfrak{M}} \xi^{\mathcal{D}} = (\operatorname{div}^{\kappa} \xi^{\mathcal{D}})_{\kappa \in \mathfrak{M}}$, $\operatorname{div}^{\partial\mathfrak{M}} \xi^{\mathcal{D}} = 0$, $\operatorname{div}^{\mathfrak{M}^*} \xi^{\mathcal{D}} = (\operatorname{div}^{\kappa^*} \xi^{\mathcal{D}})_{\kappa^* \in \mathfrak{M}^*}$ et $\operatorname{div}^{\partial\mathfrak{M}^*} \xi^{\mathcal{D}} = (\operatorname{div}^{\kappa^*} \xi^{\mathcal{D}})_{\kappa^* \in \partial\mathfrak{M}^*}$:

$$\begin{aligned} \forall \kappa \in \mathfrak{M}, \quad \operatorname{div}^{\kappa} \xi^{\mathcal{D}} &= \frac{1}{m_{\kappa}} \sum_{\mathcal{D}_{\sigma, \sigma^*} \in \mathcal{D}_{\kappa}} m_{\sigma} \xi^{\mathcal{D}} \cdot \vec{n}_{\sigma\kappa}, \\ \forall \kappa^* \in \mathfrak{M}^*, \quad \operatorname{div}^{\kappa^*} \xi^{\mathcal{D}} &= \frac{1}{m_{\kappa^*}} \sum_{\mathcal{D}_{\sigma, \sigma^*} \in \mathcal{D}_{\kappa^*}} m_{\sigma^*} \xi^{\mathcal{D}} \cdot \vec{n}_{\sigma^*\kappa^*}, \\ \forall \kappa^* \in \partial\mathfrak{M}^*, \quad \operatorname{div}^{\kappa^*} \xi^{\mathcal{D}} &= \frac{1}{m_{\kappa^*}} \left(\sum_{\mathcal{D}_{\sigma, \sigma^*} \in \mathcal{D}_{\kappa^*}} m_{\sigma^*} \xi^{\mathcal{D}} \cdot \vec{n}_{\sigma^*\kappa^*} + \sum_{\mathcal{D}_{\sigma, \sigma^*} \in \mathcal{D}_{\kappa^*} \cap \mathcal{D}_{ext}} d_{\kappa^*, \mathcal{L}} \xi^{\mathcal{D}} \cdot \vec{n}_{\sigma\kappa} \right). \end{aligned}$$

I.4 Relation de dualité : Formule de Green

Afin d'écrire la dualité discrète entre les deux opérateurs discrets introduits dans la section précédente, on introduit des opérateurs de traces et des produits scalaires. On définit des opérateurs traces sur \mathbb{R}^T et sur $(\mathbb{R}^2)^{\mathcal{D}}$. Soit $\gamma^T : u^T \in \mathbb{R}^T \mapsto \gamma^T(u^T) = (\gamma_{\sigma}(u^T))_{\sigma \in \partial\mathfrak{M}} \in \mathbb{R}^{\partial\mathfrak{M}}$, tel que :

$$\gamma_{\sigma}(u^T) = \frac{d_{\kappa^*, \mathcal{L}}(u_{\kappa^*} + u_{\mathcal{L}}) + d_{\mathcal{L}^*, \mathcal{L}}(u_{\mathcal{L}^*} + u_{\mathcal{L}})}{2m_{\sigma}}, \quad \forall \sigma = [x_{\kappa^*}, x_{\mathcal{L}^*}] \in \partial\mathfrak{M}. \quad (\text{I.10})$$

Cet opérateur nous permet d'imposer les conditions de Dirichlet au sens faible. Le second opérateur est noté $\gamma^{\mathcal{D}} : \phi^{\mathcal{D}} \in \mathbb{R}^{\mathcal{D}} \mapsto (\phi^{\mathcal{D}})_{\mathcal{D} \in \mathcal{D}_{ext}} \in \mathbb{R}^{\mathcal{D}_{ext}}$, c'est uniquement la restriction sur le sous-ensemble \mathcal{D}_{ext} de \mathcal{D} .

On introduit les produits scalaires sur les espaces d'approximation :

$$\begin{aligned} [v^T, u^T]_T &= \frac{1}{2} \left(\sum_{\kappa \in \mathfrak{M}} m_\kappa u_\kappa v_\kappa + \sum_{\kappa^* \in \mathfrak{M}^* \cup \partial \mathfrak{M}^*} m_{\kappa^*} u_{\kappa^*} v_{\kappa^*} \right), \quad \forall u^T, v^T \in \mathbb{R}^T, \\ (\phi^{\mathfrak{D}}, v^T)_{\partial \Omega} &= \sum_{\mathcal{D}_{\sigma, \sigma^*} \in \mathfrak{D}_{ext}} m_\sigma \phi^{\mathfrak{D}} v_\sigma, \quad \forall \phi^{\mathfrak{D}} \in \mathbb{R}^{\mathfrak{D}_{ext}}, v^T \in \mathbb{R}^{\partial \mathfrak{M}}, \\ (\xi^{\mathfrak{D}}, \phi^{\mathfrak{D}})_{\mathfrak{D}} &= \sum_{\mathcal{D} \in \mathfrak{D}} m_{\mathcal{D}} \xi^{\mathcal{D}} \cdot \phi^{\mathcal{D}}, \quad \forall \xi^{\mathfrak{D}}, \phi^{\mathfrak{D}} \in (\mathbb{R}^2)^{\mathfrak{D}}, \end{aligned} \quad (\text{I.11})$$

et les deux normes correspondantes :

$$\|u^T\|_2 = [u^T, u^T]_T^{\frac{1}{2}}, \quad \forall u^T \in \mathbb{R}^T, \quad \|\xi^{\mathfrak{D}}\|_2 = (\xi^{\mathfrak{D}}, \xi^{\mathfrak{D}})_{\mathfrak{D}}^{\frac{1}{2}}, \quad \forall \xi^{\mathfrak{D}} \in (\mathbb{R}^2)^{\mathfrak{D}}. \quad (\text{I.12})$$

Les deux opérateurs discrets introduits sont en dualité. En effet, grâce aux produits scalaires ci-dessus, on peut écrire une formule de Green. C'est cette propriété de dualité qui a donné le nom à la méthode. La démonstration de cette formule de Green n'est pas donnée ici, on réfère à [DO05, ABH07].

Théorème I.10 (Formule de Green)

Pour tout $\xi^{\mathfrak{D}}, u^T \in (\mathbb{R}^2)^{\mathfrak{D}} \times \mathbb{R}^T$, on a

$$[\text{div}^T \xi^{\mathfrak{D}}, u^T]_T = -(\xi^{\mathfrak{D}}, \nabla^{\mathfrak{D}} u^T)_{\mathfrak{D}} + (\gamma^{\mathfrak{D}}(\xi^{\mathfrak{D}}) \cdot \vec{n}, \gamma^T(u^T))_{\partial \Omega},$$

où \vec{n} est la normale unitaire sortante du domaine.

I.5 Résultats sur les opérateurs discrets et les projections

Dans [ABH07], plusieurs résultats ont été démontrés. On présente les résultats dont on aura besoin dans la suite sans les redémontrer. On introduit tout d'abord l'inégalité de Poincaré discrète suivante.

Théorème I.11 (Inégalité de Poincaré discrète [ABH07, Lemme 3.3])

Soit \mathcal{T} un maillage DDFV associé à Ω . Il existe une constante $C > 0$, dépendant uniquement du diamètre de Ω et de $\text{reg}(\mathcal{T})$, telle que $\forall u^T \in \mathbb{E}_0$:

$$\|u^T\|_2 \leq C \|\nabla^{\mathfrak{D}} u^T\|_2.$$

Lemme I.12 ([DE06, Lemme 6.3] ou [ABH07, Lemme 3.4])

Il existe une constante $C_1 > 0$ telle que pour tout domaine polygonal borné $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^2$ de mesure strictement positive, pour tout $\sigma \subset \mathbb{R}^2$ et toute fonction $v \in H^1(\mathbb{R}^2)$, on a

$$|v_{\mathcal{P}} - v_\sigma|^2 \leq \frac{1}{m_\sigma m_{\mathcal{P}}} \int_\sigma \int_{\mathcal{P}} |v(x) - v(y)|^2 dx dy \leq C_1 \frac{\text{diam}(\widehat{\mathcal{P}}_\sigma)^3}{m_\sigma m_{\mathcal{P}}} \int_{\widehat{\mathcal{P}}_\sigma} |\nabla v(z)|^2 dz,$$

où $v_{\mathcal{P}}$ représente la moyenne de v sur \mathcal{P} , v_σ la moyenne de v sur le segment σ , et $\widehat{\mathcal{P}}_\sigma$ est l'enveloppe convexe de $\mathcal{P} \cup \sigma$.

Les propriétés suivantes de la projection centrée, définie par (I.6), sont utilisées dans l'estimation de l'erreur de consistance pour notre schéma volumes finis.

Lemme I.13 ([ABH07, Relation (7.14)])

Soit \mathcal{T} un maillage DDFV associé à Ω . Il existe une constante $C > 0$, dépendant uniquement de $\text{reg}(\mathcal{T})$, telle que pour toute fonction v dans $H^2(\Omega)$, on a

$$\int_{\mathcal{D}} |\nabla v(x) - \nabla^{\mathcal{D}} \mathbb{P}_c^T v|^2 dx \leq C(\text{reg}(\mathcal{T})) d_{\mathcal{D}}^2 \int_{\widehat{\mathcal{D}}} |\nabla^2 v(s)|^2 ds,$$

où $\widehat{\mathcal{D}}$ est l'enveloppe convexe de \mathcal{D} .

Lemme I.14 ([ABH07, Lemme 7.5])

Soit \mathcal{T} un maillage DDFV associé à Ω . Il existe une constante $C > 0$, dépendant uniquement de $\text{reg}(\mathcal{T})$, telle que pour toute fonction v dans $H^2(\Omega)$, on a

$$\|\nabla v - \nabla^{\mathcal{D}} \mathbb{P}_c^{\tau} v\| \leq C \text{size}(\mathcal{T}) \|\nabla v\|_{H^1}.$$

On a le corollaire immédiat suivant.

Corollaire I.15 ([ABH07, Lemme 7.5])

Soit \mathcal{T} un maillage DDFV associé à Ω . Il existe une constante $C > 0$, dépendant uniquement de $\text{reg}(\mathcal{T})$, telle que pour toute fonction v dans $H^2(\Omega)$, on a

$$\|\nabla^{\mathcal{D}} \mathbb{P}_c^{\tau} v\| \leq C \|\nabla v\|_{H^1}.$$

On a aussi besoin d'évaluer la contribution de l'erreur des deux différentes projections $\mathbb{P}_c^{\tau} v$, $\mathfrak{P}_{m,g} \mathbb{P}_c^{\tau} v$, définies par (I.6) et (I.8), avec $g = \gamma(v)$. Il faut remarquer que ces deux projections diffèrent uniquement sur les mailles du bord. Pour le Lemme I.16 il est crucial que le projecteur $\mathbb{P}_m^{\partial\Omega}$, définie par (I.3), utilise la moyenne sur B_{κ} (resp. B_{κ^*}) avec le point x_{κ} (resp. x_{κ^*}) situé au milieu de B_{κ} (resp. B_{κ^*}).

Lemme I.16 ([ABH07, Lemme 7.4])

Soit \mathcal{T} un maillage DDFV associé à Ω . Il existe une constante $C > 0$, dépendant uniquement de $\text{reg}(\mathcal{T})$, telle que pour toute fonction v dans $H^2(\Omega)$, dont la trace est notée $g = \gamma(v)$, on a

$$\|\nabla^{\mathcal{D}} \mathbb{P}_c^{\tau} v - \nabla^{\mathcal{D}} \mathfrak{P}_{m,g} \mathbb{P}_c^{\tau} v\| \leq C \text{size}(\mathcal{T}) \|v\|_{H^2}.$$

Le lemme ci-après donne les propriétés principales de la projection moyenne, définie par (I.5), pour des fonctions dans H^1 .

Lemme I.17 ([ABH07, Lemme 3.5 et Proposition 3.6])

Soit \mathcal{T} un maillage DDFV associé à Ω . Il existe une constante $C > 0$, dépendant uniquement de $\text{reg}(\mathcal{T})$, telle que :

$$\begin{aligned} \|\nabla^{\mathcal{D}} \mathbb{P}_m^{\tau} v\| &\leq C \|\nabla v\|_2, & \forall v \in H^1(\Omega), \\ \|v - \mathbb{P}_m^{\tau} v\|_2 &\leq C \text{size}(\mathcal{T}) \|\nabla v\|_2, & \forall v \in H^1(\Omega). \end{aligned}$$

On donne ci-dessous les propriétés principales de la projection centrée, définie par (I.6).

Lemme I.18

Soit \mathcal{T} un maillage DDFV associé à Ω . Il existe une constante $C > 0$, dépendant uniquement de $\text{reg}(\mathcal{T})$, telle que :

$$\begin{aligned} \|v - \mathbb{P}_c^{\tau} v\|_2 &\leq C \text{size}(\mathcal{T}) \|\nabla v\|_{H^1}, & \forall v \in H^2(\Omega), \\ \|v - \mathfrak{P}_{m,g} \mathbb{P}_c^{\tau} v\|_2 &\leq C \text{size}(\mathcal{T}) \|\nabla v\|_{H^1}, & \forall v \in H^2(\Omega), \end{aligned}$$

avec $g = \gamma(v)$.

Démonstration : On prouve uniquement la deuxième inégalité. La définition de la projection $\mathfrak{P}_{m,g}$ implique que $\mathfrak{P}_{m,g} \mathbb{P}_c^{\tau} v$ et $\mathbb{P}_c^{\tau} v$ diffèrent uniquement sur les bords $\partial\mathfrak{M}$ et $\partial\mathfrak{M}^*$ tandis que $\mathfrak{P}_{m,g} \mathbb{P}_c^{\tau} v$ et $\mathbb{P}_m^{\tau} v$ coïncident sur les bords $\partial\mathfrak{M}$ et $\partial\mathfrak{M}^*$. Ainsi on obtient

$$\begin{aligned} \|v - \mathfrak{P}_{m,g} \mathbb{P}_c^{\tau} v\|_2^2 &= \frac{1}{2} \sum_{\kappa \in \mathfrak{M}} \int_{\kappa} |v(x) - v(x_{\kappa})|^2 dx + \frac{1}{2} \sum_{\kappa^* \in \mathfrak{M}^*} \int_{\kappa^*} |v(x) - v(x_{\kappa^*})|^2 dx \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{\kappa^* \in \partial\mathfrak{M}^*} \int_{\kappa^*} \left| v(x) - \frac{1}{m_{B_{\kappa^*}}} \int_{B_{\kappa^*}} v(z) dz \right|^2 dx. \end{aligned}$$

On déduit que

$$\|v - \mathfrak{P}_{m,g} \mathbb{P}_c^{\tau} v\|_2^2 \leq \|v - \mathbb{P}_c^{\tau} v\|_2^2 + \|v - \mathbb{P}_m^{\tau} v\|_2^2.$$

Le Lemme I.17 et la première inégalité concluent la démonstration. ■

Lemme I.19

Soit \mathcal{T} un maillage DDFV associé à Ω . Il existe une constante $C > 0$, dépendant uniquement de $\text{reg}(\mathcal{T})$, telle que pour tout $u^\tau \in \mathbb{R}^\tau$, on a

$$\sum_{\mathcal{D} \in \mathfrak{D}} m_{\sigma^*} \left| |u_{\mathcal{K}^*}|^2 - |u_{\mathcal{L}^*}|^2 \right| \leq C \|\nabla^{\mathfrak{D}} u^\tau\|_2 \|u^\tau\|_2,$$

et

$$\sum_{\mathcal{D} \in \mathfrak{D}} m_{\sigma} \left| |u_{\mathcal{K}}|^2 - |u_{\mathcal{L}}|^2 \right| \leq C \|\nabla^{\mathfrak{D}} u^\tau\|_2 \|u^\tau\|_2.$$

Démonstration : On a

$$\sum_{\mathcal{D} \in \mathfrak{D}} m_{\sigma^*} \left| |u_{\mathcal{K}^*}|^2 - |u_{\mathcal{L}^*}|^2 \right| \leq \sum_{\mathcal{D} \in \mathfrak{D}} m_{\sigma} m_{\sigma^*} \left| \frac{|u_{\mathcal{K}^*}|^2 - |u_{\mathcal{L}^*}|^2}{m_{\sigma}} \right|.$$

D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on obtient

$$\sum_{\mathcal{D} \in \mathfrak{D}} m_{\sigma^*} \left| |u_{\mathcal{K}^*}|^2 - |u_{\mathcal{L}^*}|^2 \right| \leq \frac{2C}{\sin(\alpha_{\mathcal{T}})} \left(\sum_{\mathcal{D} \in \mathfrak{D}} m_{\mathcal{D}} \left| \frac{u_{\mathcal{K}^*} - u_{\mathcal{L}^*}}{m_{\sigma}} \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{\mathcal{D} \in \mathfrak{D}} m_{\sigma} m_{\sigma^*} (|u_{\mathcal{K}^*}| + |u_{\mathcal{L}^*}|)^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

On réorganise la dernière somme :

$$\sum_{\mathcal{D} \in \mathfrak{D}} m_{\sigma} m_{\sigma^*} (|u_{\mathcal{K}^*}| + |u_{\mathcal{L}^*}|)^2 \leq 2 \sum_{\mathcal{D} \in \mathfrak{D}} m_{\sigma} m_{\sigma^*} (|u_{\mathcal{K}^*}|^2 + |u_{\mathcal{L}^*}|^2) \leq 2 \sum_{\mathcal{K}^* \in \mathfrak{M}^* \cup \partial \mathfrak{M}^*} |u_{\mathcal{K}^*}|^2 \sum_{\mathcal{D} \in \mathfrak{D}_{\mathcal{K}^*}} m_{\sigma} m_{\sigma^*}.$$

On utilise le fait que

$$m_{\sigma} m_{\sigma^*} \leq d_{\mathcal{K}^*}^2 \frac{d_{\mathcal{D}}}{m_{\sigma^*}} \leq C(\text{reg}(\mathcal{T})) m_{\mathcal{K}^*},$$

et que le nombre maximal d'arêtes d'une maille duale est borné, il vient que

$$\sum_{\mathcal{D} \in \mathfrak{D}} m_{\sigma} m_{\sigma^*} (|u_{\mathcal{K}^*}|^2 + |u_{\mathcal{L}^*}|^2) \leq C(\text{reg}(\mathcal{T})) \sum_{\mathcal{K}^* \in \mathfrak{M}^* \cup \partial \mathfrak{M}^*} m_{\mathcal{K}^*} |u_{\mathcal{K}^*}|^2.$$

d'où

$$\sum_{\mathcal{D} \in \mathfrak{D}} m_{\sigma^*} \left| |u_{\mathcal{K}^*}|^2 - |u_{\mathcal{L}^*}|^2 \right| \leq C \|\nabla^{\mathfrak{D}} u^\tau\|_2 \|u^\tau\|_2.$$

On fait de même pour la seconde inégalité. ■

Chapitre II

Problèmes de diffusion anisotrope avec des conditions aux bords mixtes

Dans ce chapitre¹, on s'intéresse à l'approximation des solutions du problème de diffusion anisotrope avec des conditions aux bords mixtes de type Dirichlet/Fourier. On utilisera dans le Chapitre III les schémas développés dans ce chapitre pour écrire des algorithmes de Schwarz DDFV sans recouvrement. On se place ici dans le cas où les discontinuités du tenseur anisotrope se situent le long des arêtes primales du maillage comme dans [Her03]. Au niveau continu, ce sont les flux normaux qui sont continus à travers les interfaces de discontinuités. Ainsi notre schéma numérique doit conserver ces flux normaux discrets à travers les interfaces, sinon on observe une diminution de la vitesse de convergence. Pour cela on ajoute une inconnue sur chaque arête du maillage primal, ceci nous permet de définir un gradient discret modifié sur les demi-diamants (voir Définition II.1). Le principe pour obtenir le schéma DDFV, pour un problème de diffusion anisotrope avec des conditions aux bords mixtes de type Dirichlet/Fourier, est le suivant : Tout d'abord, on intègre l'équation de diffusion sur le maillage primal intérieur \mathfrak{M} et dual intérieur \mathfrak{M}^* et la condition de Dirichlet est imposée sur les mailles primales dégénérées du bord Dirichlet $\partial\mathfrak{M}_D$ et sur les mailles duales du bord Dirichlet $\partial\mathfrak{M}_D^*$. Ensuite il y a plusieurs façons de prendre en compte les conditions de Fourier :

- Méthode 1 : On intègre l'équation de diffusion sur le maillage dual du bord Fourier $\partial\mathfrak{M}_F^*$, puis on impose la condition de Fourier sur les mailles primales dégénérées du bord Fourier $\partial\mathfrak{M}_F$.
- Méthode 2 : On intègre l'équation de diffusion sur le maillage dual du bord Fourier $\partial\mathfrak{M}_F^*$, en remplaçant les flux normaux, c'est-à-dire $(A \cdot \nabla u) \cdot \vec{n}$, sur les arêtes du bord par la condition de Fourier $h - \lambda u$. Puis on impose la condition de Fourier sur les mailles primales dégénérées du bord Fourier $\partial\mathfrak{M}_F$.
- Méthode 3 : On intègre l'équation de diffusion sur le maillage dual du bord Fourier $\partial\mathfrak{M}_F^*$, mais cette fois-ci, on remplace les flux normaux des arêtes du bord Fourier par de nouvelles inconnues de flux, notées φ^τ , (situées sur les demi-arêtes du bord). Ces nouvelles inconnues doivent alors approcher les flux normaux sur les mailles primales dégénérées du bord Fourier $\partial\mathfrak{M}_F$. Finalement, on impose la condition de Fourier sur chaque demi-arête du bord Fourier. Pour cette méthode, on ajoute exactement deux fois le nombre d'arêtes de l'interface d'inconnues. Ceci n'augmente pas considérablement le nombre total d'inconnues du système.

La stratégie proposée par F. Hermeline est la seconde. Il montre dans [Her00, Her03] que le schéma correspondant à la méthode 2 est bien posé pour des maillages DDFV généraux. On s'intéresse ici à étudier l'existence et l'unicité des solutions du schéma correspondant à la méthode 3 pour un tenseur anisotrope discontinu. En fait, nous montrerons au Chapitre III qu'en utilisant la méthode 3 l'algorithme de Schwarz DDFV converge vers le schéma DDFV. Ensuite on établit l'estimation d'erreur du schéma correspondant à la méthode 3 (voir Théorème II.12), en se servant de celle faite dans [BH08] en remarquant que leur schéma redonne le nôtre (à l'exception des conditions aux bords) dans le cas particulier où les discontinuités se situent uniquement le long des arêtes primales du maillage (et non également le long des arêtes duales). On insistera tout particulièrement

¹Un aide mémoire rassemblant les notations de ce chapitre est disponible page 242.

sur la nouvelle erreur de consistance due au bord Fourier dans la Section II.7 et sur le Théorème de trace II.6.

II.1 Problème de diffusion/transmission anisotrope

On étudie le problème suivant avec des conditions aux bords mixtes :

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(A(x).\nabla u(x)) = f(x), & \text{dans } \Omega, \\ u = g, & \text{sur } \Gamma_D, \\ -(A(s).\nabla u(s)) \cdot \vec{n} = \lambda u(s) - h(s), & \text{sur } \Gamma_F, \end{cases} \quad (\text{II.1})$$

où Ω est un domaine ouvert convexe borné polygonal de \mathbb{R}^2 , Γ_F est une partie ouverte non vide de $\partial\Omega$ aussi notée Γ et $\Gamma_D = \partial\Omega \setminus \Gamma_F$ est également supposée non vide, le paramètre $\lambda > 0$ est donné. La matrice de diffusion $A : \Omega \rightarrow \mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$ du problème est supposée coercive, il existe une constante $C_A > 0$ telle que

$$(A(x).\xi) \cdot \xi \geq \frac{1}{C_A} |\xi|^2, \forall \xi \in \mathbb{R}^2, \forall x \in \Omega, \quad (\mathcal{H}_1)$$

bornée

$$|A(x).\xi| \leq C_A |\xi|, \forall \xi \in \mathbb{R}^2, \forall x \in \Omega, \quad (\mathcal{H}_2)$$

et régulière par morceaux (par exemple par demi-diamant)

$$|A(x) - A(s)| \leq C_A |x - s|, \forall (x, s) \in \tilde{\mathcal{D}}^2, \forall \tilde{\mathcal{D}} \in \tilde{\mathcal{D}}. \quad (\mathcal{H}_3)$$

Ces hypothèses assurent que le problème (II.1) a une unique solution dans $H^1(\Omega)$ pour tout $f \in H^{-1}(\Omega)$ et $h, g \in H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$. On restreint ici les termes sources f à $L^2(\Omega)$.

II.2 Gradient discret sur les demi-diamants

II.2.1 Définition du gradient discret sur les demi-diamants

Lorsque le tenseur anisotrope A possède des sauts, c'est la composante normale de $A.\nabla u$ qui est continue à travers toutes les arêtes primales. On a ainsi pour $\sigma = \tilde{\mathcal{D}}_1 | \tilde{\mathcal{D}}_2$

$$\int_{\sigma} \left(A_{|\tilde{\mathcal{D}}_1} . \nabla u_{|\tilde{\mathcal{D}}_1} \right) \cdot \vec{n}_{\sigma\kappa} ds = \int_{\sigma} \left(A_{|\tilde{\mathcal{D}}_2} . \nabla u_{|\tilde{\mathcal{D}}_2} \right) \cdot \vec{n}_{\sigma\kappa} ds.$$

On a besoin d'assurer cette consistance au niveau discret. On introduit ainsi un nouvel opérateur discret qui approche le gradient sur les demi-diamants. Pour cela, on rajoute une inconnue par arête primale u_{σ} , qui sera éliminée algébriquement par la suite.

Définition II.1 (Gradient discret par demi-diamant)

Le gradient discret par demi-diamant est défini de la manière suivante : $\nabla^{\tilde{\mathcal{D}}} : \mathbb{R}^T \rightarrow (\mathbb{R}^2)^{\tilde{\mathcal{D}}}$. Soit $u^T \in \mathbb{R}^T$, on pose $\nabla^{\tilde{\mathcal{D}}} u^T = \left(\nabla^{\tilde{\mathcal{D}}} u^T \right)_{\tilde{\mathcal{D}} \in \tilde{\mathcal{D}}}$, et pour $\tilde{\mathcal{D}} \in \tilde{\mathcal{D}}$ de sommets x_{κ} , x_{κ^*} et $x_{\mathcal{L}^*}$:

$$\nabla^{\tilde{\mathcal{D}}} u^T = \frac{1}{\sin(\alpha_{\tilde{\mathcal{D}}})} \left(\frac{u_{\sigma} - u_{\kappa}}{m_{\sigma\kappa}} \vec{n}_{\sigma\kappa} + \frac{u_{\mathcal{L}^*} - u_{\kappa^*}}{m_{\sigma}} \vec{n}_{\sigma^*\kappa^*} \right) \iff \begin{cases} \nabla^{\tilde{\mathcal{D}}} u^T \cdot \vec{\tau}_{\kappa^*, \mathcal{L}^*} = \frac{u_{\mathcal{L}^*} - u_{\kappa^*}}{m_{\sigma}}, \\ \nabla^{\tilde{\mathcal{D}}} u^T \cdot \vec{\tau}_{\kappa, \mathcal{L}} = \frac{u_{\sigma} - u_{\kappa}}{m_{\sigma\kappa}}. \end{cases}$$

Pour déterminer les inconnues u_{σ} , on impose, pour tout $\mathcal{D}_{\sigma, \sigma^*} \in \mathcal{D}_{int}$ tel que $\mathcal{D} = \tilde{\mathcal{D}}_1 \cup \tilde{\mathcal{D}}_2$, la condition suivante :

$$(A_{\tilde{\mathcal{D}}_1} . \nabla^{\tilde{\mathcal{D}}_1} u^T) \cdot \vec{n}_{\sigma\kappa} = (A_{\tilde{\mathcal{D}}_2} . \nabla^{\tilde{\mathcal{D}}_2} u^T) \cdot \vec{n}_{\sigma\kappa}, \quad (\text{II.2})$$

où $A_{\tilde{\mathcal{D}}}$ est une matrice définie positive qui approche A sur le demi-diamant $\tilde{\mathcal{D}}$, on prend $A_{\tilde{\mathcal{D}}} = \int_{\tilde{\mathcal{D}}} A(s) d\mu_{\tilde{\mathcal{D}}}(s)$,

où $\mu_{\tilde{\mathcal{D}}}$ est une mesure de probabilité. Ceci inclut le cas $A_{\tilde{\mathcal{D}}} = \frac{1}{m_{\tilde{\mathcal{D}}}} \int_{\tilde{\mathcal{D}}} A(x) dx$ ou $A_{\tilde{\mathcal{D}}} = A(x_{\tilde{\mathcal{D}}})$ avec $x_{\tilde{\mathcal{D}}} = x_{\sigma\kappa}$ si

$\tilde{\mathcal{D}} \subset \kappa$ ou $x_{\tilde{\mathcal{D}}} = x_{\sigma_{\mathcal{L}}}$ si $\tilde{\mathcal{D}} \subset \mathcal{L}$. Pour tout $\mathcal{D}_{\sigma, \sigma^*} \in \mathfrak{D}_{ext}$ on pose $u_{\sigma} = u_{\mathcal{L}}$. En fait, pour tout $\mathcal{D} \in \mathfrak{D}_{ext}$, il existe un seul demi-diamant $\tilde{\mathcal{D}}$ c'est le diamant \mathcal{D} , ainsi on a

$$\nabla^{\mathcal{D}} u^{\tau} = \nabla^{\tilde{\mathcal{D}}} u^{\tau}.$$

Proposition II.2

Pour tout $\mathcal{D}_{\sigma, \sigma^*} \in \mathfrak{D}_{int}$ et $u^{\tau} \in \mathbb{R}^{\tau}$, il existe un unique u_{σ} tel que (II.2) soit vérifiée. En fait, on a

$$u_{\sigma} = \frac{m_{\sigma_{\mathcal{K}}} m_{\sigma_{\mathcal{L}}}}{\left((A_{\tilde{\mathcal{D}}_1} m_{\sigma_{\mathcal{L}}} + A_{\tilde{\mathcal{D}}_2} m_{\sigma_{\mathcal{K}}}) \cdot \tilde{\mathbf{n}}_{\sigma_{\mathcal{K}}} \right) \cdot \tilde{\mathbf{n}}_{\sigma_{\mathcal{K}}}} \left[u_{\mathcal{K}} \frac{(A_{\tilde{\mathcal{D}}_1} \cdot \tilde{\mathbf{n}}_{\sigma_{\mathcal{K}}}) \cdot \tilde{\mathbf{n}}_{\sigma_{\mathcal{K}}}}{m_{\sigma_{\mathcal{K}}}} + u_{\mathcal{L}} \frac{(A_{\tilde{\mathcal{D}}_2} \cdot \tilde{\mathbf{n}}_{\sigma_{\mathcal{K}}}) \cdot \tilde{\mathbf{n}}_{\sigma_{\mathcal{K}}}}{m_{\sigma_{\mathcal{L}}}} + \frac{u_{\mathcal{L}^*} - u_{\mathcal{K}^*}}{m_{\sigma}} \left((A_{\tilde{\mathcal{D}}_2} - A_{\tilde{\mathcal{D}}_1}) \cdot \tilde{\mathbf{n}}_{\sigma^* \mathcal{K}^*} \right) \cdot \tilde{\mathbf{n}}_{\sigma_{\mathcal{K}}} \right]. \quad (\text{II.3})$$

Démonstration : La condition (II.2) est une équation linéaire en u_{σ} , il suffit de montrer qu'elle est injective. Soit u^{τ} nul sur toutes les mailles du maillage \mathcal{T} , il faut montrer que u_{σ} est nul. La condition (II.2) devient

$$u_{\sigma} \left(\left(\frac{A_{\tilde{\mathcal{D}}_1}}{m_{\sigma_{\mathcal{K}}}} + \frac{A_{\tilde{\mathcal{D}}_2}}{m_{\sigma_{\mathcal{L}}}} \right) \cdot \tilde{\mathbf{n}}_{\sigma_{\mathcal{K}}} \right) \cdot \tilde{\mathbf{n}}_{\sigma_{\mathcal{K}}} = 0,$$

et comme les matrices $A_{\tilde{\mathcal{D}}}$ sont définies positives, ceci implique bien que $u_{\sigma} = 0$. ■

II.2.2 Définition et propriétés des flux numériques

Le gradient discret par demi-diamant nous permet de considérer un nouveau flux numérique qui prend en compte les valeurs du tenseur anisotrope sur les demi-diamants de la manière suivante.

Définition II.3

On définit $\mathcal{A}^{\mathfrak{D}}(\nabla^{\tilde{\mathcal{D}}}) : \mathbb{R}^{\tau} \rightarrow (\mathbb{R}^2)^{\mathfrak{D}}$ pour $u^{\tau} \in \mathbb{R}^{\tau}$, en posant $\mathcal{A}^{\mathfrak{D}}(\nabla^{\tilde{\mathcal{D}}} u^{\tau}) = \left(\mathcal{A}_{\mathcal{D}}(\nabla^{\tilde{\mathcal{D}}} u^{\tau}) \right)_{\mathcal{D} \in \mathfrak{D}}$, où pour tout $\mathcal{D} \in \mathfrak{D}$

$$\mathcal{A}_{\mathcal{D}}(\nabla^{\tilde{\mathcal{D}}} u^{\tau}) = \frac{1}{m_{\mathcal{D}}} \sum_{\tilde{\mathcal{D}} \in \tilde{\mathfrak{D}}_{\mathcal{D}}} m_{\tilde{\mathcal{D}}} A_{\tilde{\mathcal{D}}} \cdot \nabla^{\tilde{\mathcal{D}}} u^{\tau}.$$

En fait, pour tout $\mathcal{D} \in \mathfrak{D}_{ext}$, on a $\tilde{\mathcal{D}} = \mathcal{D}$ ainsi le flux numérique devient $\mathcal{A}_{\mathcal{D}}(\nabla^{\tilde{\mathcal{D}}} u^{\tau}) = A_{\mathcal{D}} \cdot \nabla^{\mathcal{D}} u^{\tau}$.

Remarque II.4

1. Si A est régulière sur tout le domaine on peut remplacer cette définition par $\mathcal{A}_{\mathcal{D}}(\nabla^{\tilde{\mathcal{D}}} u^{\tau}) = A(x_{\mathcal{D}}) \cdot \nabla^{\mathcal{D}} u^{\tau}$ pour tout $\mathcal{D} \in \mathfrak{D}$.
2. Si A est constante par maille primale, on note sa valeur $A_{\mathcal{K}}$ sur la maille primale \mathcal{K} , ainsi on a $\mathcal{A}_{\mathcal{D}}(\nabla^{\tilde{\mathcal{D}}} u^{\tau}) = \bar{A}^{\mathcal{D}} \cdot \nabla^{\mathcal{D}} u^{\tau}$ avec

$$\begin{aligned} (\bar{A}^{\mathcal{D}} \cdot \tilde{\mathbf{n}}_{\sigma_{\mathcal{K}}}) \cdot \tilde{\mathbf{n}}_{\sigma_{\mathcal{K}}} &= \frac{m_{\sigma^*} (A_{\mathcal{K}} \cdot \tilde{\mathbf{n}}_{\sigma_{\mathcal{K}}}) \cdot \tilde{\mathbf{n}}_{\sigma_{\mathcal{K}}} (A_{\mathcal{L}} \cdot \tilde{\mathbf{n}}_{\sigma_{\mathcal{K}}}) \cdot \tilde{\mathbf{n}}_{\sigma_{\mathcal{K}}}}{m_{\sigma_{\mathcal{L}}} (A_{\mathcal{K}} \cdot \tilde{\mathbf{n}}_{\sigma_{\mathcal{K}}}) \cdot \tilde{\mathbf{n}}_{\sigma_{\mathcal{K}}} + m_{\sigma_{\mathcal{K}}} (A_{\mathcal{L}} \cdot \tilde{\mathbf{n}}_{\sigma_{\mathcal{K}}}) \cdot \tilde{\mathbf{n}}_{\sigma_{\mathcal{K}}}}, \\ (\bar{A}^{\mathcal{D}} \cdot \tilde{\mathbf{n}}_{\sigma^* \mathcal{K}^*}) \cdot \tilde{\mathbf{n}}_{\sigma^* \mathcal{K}^*} &= \frac{m_{\sigma_{\mathcal{L}}} (A_{\mathcal{L}} \cdot \tilde{\mathbf{n}}_{\sigma^* \mathcal{K}^*}) \cdot \tilde{\mathbf{n}}_{\sigma^* \mathcal{K}^*} + m_{\sigma_{\mathcal{K}}} (A_{\mathcal{K}} \cdot \tilde{\mathbf{n}}_{\sigma^* \mathcal{K}^*}) \cdot \tilde{\mathbf{n}}_{\sigma^* \mathcal{K}^*}}{m_{\sigma^*}} \\ &\quad - \frac{m_{\sigma_{\mathcal{K}}} m_{\sigma_{\mathcal{L}}}}{m_{\sigma^*}} \frac{((A_{\mathcal{K}} \cdot \tilde{\mathbf{n}}_{\sigma_{\mathcal{K}}}) \cdot \tilde{\mathbf{n}}_{\sigma^* \mathcal{K}^*} - (A_{\mathcal{L}} \cdot \tilde{\mathbf{n}}_{\sigma_{\mathcal{K}}}) \cdot \tilde{\mathbf{n}}_{\sigma^* \mathcal{K}^*})^2}{m_{\sigma_{\mathcal{L}}} (A_{\mathcal{K}} \cdot \tilde{\mathbf{n}}_{\sigma_{\mathcal{K}}}) \cdot \tilde{\mathbf{n}}_{\sigma_{\mathcal{K}}} + m_{\sigma_{\mathcal{K}}} (A_{\mathcal{L}} \cdot \tilde{\mathbf{n}}_{\sigma_{\mathcal{K}}}) \cdot \tilde{\mathbf{n}}_{\sigma_{\mathcal{K}}}}, \\ (\bar{A}^{\mathcal{D}} \cdot \tilde{\mathbf{n}}_{\sigma_{\mathcal{K}}}) \cdot \tilde{\mathbf{n}}_{\sigma^* \mathcal{K}^*} &= \frac{m_{\sigma_{\mathcal{L}}} (A_{\mathcal{L}} \cdot \tilde{\mathbf{n}}_{\sigma_{\mathcal{K}}}) \cdot \tilde{\mathbf{n}}_{\sigma^* \mathcal{K}^*} (A_{\mathcal{K}} \cdot \tilde{\mathbf{n}}_{\sigma_{\mathcal{K}}}) \cdot \tilde{\mathbf{n}}_{\sigma_{\mathcal{K}}} + m_{\sigma_{\mathcal{K}}} (A_{\mathcal{K}} \cdot \tilde{\mathbf{n}}_{\sigma_{\mathcal{K}}}) \cdot \tilde{\mathbf{n}}_{\sigma^* \mathcal{K}^*} (A_{\mathcal{L}} \cdot \tilde{\mathbf{n}}_{\sigma_{\mathcal{K}}}) \cdot \tilde{\mathbf{n}}_{\sigma_{\mathcal{K}}}}{m_{\sigma_{\mathcal{L}}} (A_{\mathcal{K}} \cdot \tilde{\mathbf{n}}_{\sigma_{\mathcal{K}}}) \cdot \tilde{\mathbf{n}}_{\sigma_{\mathcal{K}}} + m_{\sigma_{\mathcal{K}}} (A_{\mathcal{L}} \cdot \tilde{\mathbf{n}}_{\sigma_{\mathcal{K}}}) \cdot \tilde{\mathbf{n}}_{\sigma_{\mathcal{K}}}}. \end{aligned} \quad (\text{II.4})$$

Cette expression redonne celle donnée dans [Her03, BH08].

Une propriété importante des flux sur les demi-diamants est la suivante. Ceci nous permet de comparer le gradient discret sur les diamants et les demi-diamants (voir Proposition II.6).

Lemme II.5

Pour tout $u^\tau \in \mathbb{R}^\tau$, on a pour tout $\mathcal{D} \in \mathfrak{D}$

$$\sum_{\tilde{\mathcal{D}} \in \tilde{\mathfrak{D}}_{\mathcal{D}}} m_{\tilde{\mathcal{D}}}(A_{\tilde{\mathcal{D}}} \cdot \nabla^{\tilde{\mathcal{D}}} u^\tau) \cdot \nabla^{\tilde{\mathcal{D}}} u^\tau = \sum_{\tilde{\mathcal{D}} \in \tilde{\mathfrak{D}}_{\mathcal{D}}} m_{\tilde{\mathcal{D}}}(A_{\tilde{\mathcal{D}}} \cdot \nabla^{\tilde{\mathcal{D}}} u^\tau) \cdot \nabla^{\mathcal{D}} u^\tau.$$

Démonstration : On commence par calculer $\nabla^{\tilde{\mathcal{D}}} u^\tau - \nabla^{\mathcal{D}} u^\tau$, tout d'abord pour $\tilde{\mathcal{D}} = \tilde{\mathcal{D}}_\kappa$:

$$\nabla^{\tilde{\mathcal{D}}_\kappa} u^\tau - \nabla^{\mathcal{D}} u^\tau = \frac{1}{\sin(\alpha_{\mathcal{D}})} \left[\frac{u_\sigma - u_\kappa}{m_{\sigma\kappa}} - \frac{u_\varepsilon - u_\kappa}{m_{\sigma^*}} \right] \vec{n}_{\sigma\kappa}.$$

En posant $\delta = \frac{1}{2m_{\sigma^*}} (m_{\sigma\varepsilon}(u_\sigma - u_\kappa) + m_{\sigma\kappa}(u_\sigma - u_\varepsilon))$, on en déduit

$$\nabla^{\tilde{\mathcal{D}}_\kappa} u^\tau - \nabla^{\mathcal{D}} u^\tau = \frac{2\delta}{\sin(\alpha_{\mathcal{D}})m_{\sigma\kappa}} \vec{n}_{\sigma\kappa}.$$

Maintenant on prend $\tilde{\mathcal{D}} = \tilde{\mathcal{D}}_\varepsilon$, de la même manière on trouve

$$\nabla^{\tilde{\mathcal{D}}_\varepsilon} u^\tau - \nabla^{\mathcal{D}} u^\tau = -\frac{2\delta}{\sin(\alpha_{\mathcal{D}})m_{\sigma\varepsilon}} \vec{n}_{\sigma\varepsilon}.$$

On remarque de plus que

$$m_{\tilde{\mathcal{D}}_\kappa}(\nabla^{\tilde{\mathcal{D}}_\kappa} u^\tau - \nabla^{\mathcal{D}} u^\tau) = \delta m_\sigma \vec{n}_{\sigma\kappa} = -m_{\tilde{\mathcal{D}}_\varepsilon}(\nabla^{\tilde{\mathcal{D}}_\varepsilon} u^\tau - \nabla^{\mathcal{D}} u^\tau). \quad (\text{II.5})$$

On en déduit

$$\sum_{\tilde{\mathcal{D}} \in \tilde{\mathfrak{D}}_{\mathcal{D}}} m_{\tilde{\mathcal{D}}}(A_{\tilde{\mathcal{D}}} \cdot \nabla^{\tilde{\mathcal{D}}} u^\tau) \cdot (\nabla^{\tilde{\mathcal{D}}} u^\tau - \nabla^{\mathcal{D}} u^\tau) = \delta m_\sigma \left(A_{\tilde{\mathcal{D}}_\kappa} \cdot \nabla^{\tilde{\mathcal{D}}_\kappa} u^\tau - A_{\tilde{\mathcal{D}}_\varepsilon} \cdot \nabla^{\tilde{\mathcal{D}}_\varepsilon} u^\tau \right) \cdot \vec{n}_{\sigma\kappa}.$$

La condition (II.2) implique

$$\sum_{\tilde{\mathcal{D}} \in \tilde{\mathfrak{D}}_{\mathcal{D}}} m_{\tilde{\mathcal{D}}}(A_{\tilde{\mathcal{D}}} \cdot \nabla^{\tilde{\mathcal{D}}} u^\tau) \cdot (\nabla^{\tilde{\mathcal{D}}} u^\tau - \nabla^{\mathcal{D}} u^\tau) = 0.$$

On en déduit

$$\sum_{\tilde{\mathcal{D}} \in \tilde{\mathfrak{D}}_{\mathcal{D}}} m_{\tilde{\mathcal{D}}}(A_{\tilde{\mathcal{D}}} \cdot \nabla^{\tilde{\mathcal{D}}} u^\tau) \cdot \nabla^{\tilde{\mathcal{D}}} u^\tau = \sum_{\tilde{\mathcal{D}} \in \tilde{\mathfrak{D}}_{\mathcal{D}}} m_{\tilde{\mathcal{D}}}(A_{\tilde{\mathcal{D}}} \cdot \nabla^{\tilde{\mathcal{D}}} u^\tau) \cdot \nabla^{\mathcal{D}} u^\tau. \quad \blacksquare$$

Proposition II.6

Pour tout $u^\tau \in \mathbb{R}^\tau$, on a

$$\|\nabla^{\mathcal{D}} u^\tau\|_2 \leq \|\nabla^{\tilde{\mathcal{D}}} u^\tau\|_2 \leq C_A^2 \|\nabla^{\mathcal{D}} u^\tau\|_2.$$

Démonstration : Première inégalité : Soit $\mathcal{D} \in \mathfrak{D}$. Après calcul, (II.5) donne

$$\sum_{\tilde{\mathcal{D}} \in \tilde{\mathfrak{D}}_{\mathcal{D}}} m_{\tilde{\mathcal{D}}} \nabla^{\tilde{\mathcal{D}}} u^\tau = m_{\mathcal{D}} \nabla^{\mathcal{D}} u^\tau.$$

L'inégalité de Cauchy-Schwarz implique

$$m_{\mathcal{D}} |\nabla^{\mathcal{D}} u^\tau|^2 \leq \sum_{\tilde{\mathcal{D}} \in \tilde{\mathfrak{D}}_{\mathcal{D}}} m_{\tilde{\mathcal{D}}} |\nabla^{\tilde{\mathcal{D}}} u^\tau|^2.$$

Deuxième inégalité : Le Lemme II.5 donne

$$\sum_{\tilde{\mathcal{D}} \in \tilde{\mathfrak{D}}_{\mathcal{D}}} m_{\tilde{\mathcal{D}}}(A_{\tilde{\mathcal{D}}} \cdot \nabla^{\tilde{\mathcal{D}}} u^\tau) \cdot \nabla^{\tilde{\mathcal{D}}} u^\tau = \sum_{\tilde{\mathcal{D}} \in \tilde{\mathfrak{D}}_{\mathcal{D}}} m_{\tilde{\mathcal{D}}}(A_{\tilde{\mathcal{D}}} \cdot \nabla^{\tilde{\mathcal{D}}} u^\tau) \cdot \nabla^{\mathcal{D}} u^\tau.$$

L'inégalité de Cauchy-Schwarz implique

$$\sum_{\tilde{\mathcal{D}} \in \tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{D}}} m_{\tilde{\mathcal{D}}} (A_{\tilde{\mathcal{D}}} \cdot \nabla^{\tilde{\mathcal{D}}} u^T) \cdot \nabla^{\tilde{\mathcal{D}}} u^T \leq \left(\sum_{\tilde{\mathcal{D}} \in \tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{D}}} m_{\tilde{\mathcal{D}}} |A_{\tilde{\mathcal{D}}} \cdot \nabla^{\tilde{\mathcal{D}}} u^T|^2 \right)^{\frac{1}{2}} (m_{\mathcal{D}} |\nabla^{\mathcal{D}} u^T|^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Comme A est coercive (\mathcal{H}_1) et bornée (\mathcal{H}_2), on a

$$\frac{1}{C_A} \sum_{\tilde{\mathcal{D}} \in \tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{D}}} m_{\tilde{\mathcal{D}}} |\nabla^{\tilde{\mathcal{D}}} u^T|^2 \leq C_A \left(\sum_{\tilde{\mathcal{D}} \in \tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{D}}} m_{\tilde{\mathcal{D}}} |\nabla^{\tilde{\mathcal{D}}} u^T|^2 \right)^{\frac{1}{2}} (m_{\mathcal{D}} |\nabla^{\mathcal{D}} u^T|^2)^{\frac{1}{2}}.$$

On en déduit

$$\sum_{\tilde{\mathcal{D}} \in \tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{D}}} m_{\tilde{\mathcal{D}}} |\nabla^{\tilde{\mathcal{D}}} u^T|^2 \leq C_A^4 m_{\mathcal{D}} |\nabla^{\mathcal{D}} u^T|^2.$$

■

II.2.3 Lien avec les travaux antérieurs [Her03, BH08]

Comme dans [Her03], on a considéré que le tenseur anisotrope A est régulier sur les demi-diamants. La différence, avec l'article [Her03], est dans le choix de la méthode pour la prise en compte des conditions aux bords de type Fourier.

Dans [BH08], le tenseur anisotrope A est régulier seulement par quarts de diamant. Les auteurs introduisent ainsi un gradient discret $\nabla_{\mathcal{Q}}^{\mathcal{N}}$ sur les quarts de diamants $\mathcal{Q} \in \mathcal{Q}$. On rappelle brièvement la construction de ce gradient discret afin de faire le lien avec notre gradient discret par demi-diamants. Tout d'abord, on a vu que le gradient discret $\nabla^{\mathcal{D}} u^T$ (voir Définition I.7) peut être défini comme le gradient de la fonction $\Pi^{\mathcal{D}} u^T$ affine par diamant (voir la Figure I.9).

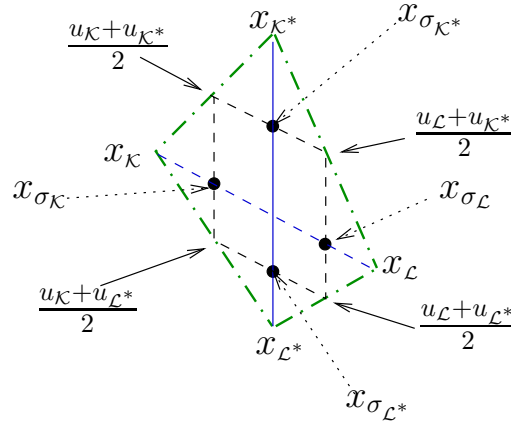


FIG. II.1 – La fonction $\tilde{\Pi}^{\mathcal{D}} u^T$ affine par quart de diamant.

Le gradient discret modifié $\nabla_{\mathcal{Q}}^{\mathcal{N}}$ est choisi comme le gradient d'une fonction $\tilde{\Pi}_{\mathcal{D}} u^T$ affine sur chaque quart de diamant $\mathcal{Q} \in \mathcal{Q}_{\mathcal{D}}$, qui coïncide avec $\Pi_{\mathcal{D}} u^T$ aux milieux des côtés du diamant \mathcal{D} et qui est continue à chaque point $x_{\sigma_K}, x_{\sigma_L}, x_{\sigma_{K*}}, x_{\sigma_{L*}}$ (voir la Figure II.1). On introduit alors quatre inconnues artificielles $\delta^{\mathcal{D}} = {}^t(\delta_K, \delta_L, \delta_{K*}, \delta_{L*}) \in \mathbb{R}^4$ définies comme la différence entre $\tilde{\Pi}_{\mathcal{D}} u^T(y)$ et $\Pi_{\mathcal{D}} u^T(y)$ pour chaque $y \in \{x_{\sigma_K}, x_{\sigma_L}, x_{\sigma_{K*}}, x_{\sigma_{L*}}\}$. Maintenant on peut écrire $\nabla_{\mathcal{Q}}^{\mathcal{N}} u^T = \nabla^{\mathcal{D}} u^T + B_{\mathcal{Q}} \delta^{\mathcal{D}}$, où $(B_{\mathcal{Q}})_{\mathcal{Q} \in \mathcal{Q}_{\mathcal{D}}}$ est une famille de matrices de $\mathcal{M}_{2,4}(\mathbb{R})$ qui peuvent être calculées explicitement en fonction de la géométrie des quarts de diamant (voir (VII.5) pour les expressions des $B_{\mathcal{Q}}$). Ensuite on détermine ces inconnues artificielles $\delta^{\mathcal{D}}$ en imposant la continuité des composantes normales des flux $A \cdot \nabla u$ à travers chaque bout d'arête :

$$\begin{cases} A_{\mathcal{Q}_{K,K*}} \cdot (\nabla^{\mathcal{D}} u^T + B_{\mathcal{Q}_{K,K*}} \delta^{\mathcal{D}}) \cdot \vec{n}_{\sigma_K} = A_{\mathcal{Q}_{L,K*}} \cdot (\nabla^{\mathcal{D}} u^T + B_{\mathcal{Q}_{L,K*}} \delta^{\mathcal{D}}) \cdot \vec{n}_{\sigma_K}, \\ A_{\mathcal{Q}_{K,L*}} \cdot (\nabla^{\mathcal{D}} u^T + B_{\mathcal{Q}_{K,L*}} \delta^{\mathcal{D}}) \cdot \vec{n}_{\sigma_K} = A_{\mathcal{Q}_{L,L*}} \cdot (\nabla^{\mathcal{D}} u^T + B_{\mathcal{Q}_{L,L*}} \delta^{\mathcal{D}}) \cdot \vec{n}_{\sigma_K}, \\ A_{\mathcal{Q}_{K,K*}} \cdot (\nabla^{\mathcal{D}} u^T + B_{\mathcal{Q}_{K,K*}} \delta^{\mathcal{D}}) \cdot \vec{n}_{\sigma^{*}K*} = A_{\mathcal{Q}_{L,K*}} \cdot (\nabla^{\mathcal{D}} u^T + B_{\mathcal{Q}_{L,K*}} \delta^{\mathcal{D}}) \cdot \vec{n}_{\sigma^{*}K*}, \\ A_{\mathcal{Q}_{L,K*}} \cdot (\nabla^{\mathcal{D}} u^T + B_{\mathcal{Q}_{L,K*}} \delta^{\mathcal{D}}) \cdot \vec{n}_{\sigma^{*}K*} = A_{\mathcal{Q}_{L,L*}} \cdot (\nabla^{\mathcal{D}} u^T + B_{\mathcal{Q}_{L,L*}} \delta^{\mathcal{D}}) \cdot \vec{n}_{\sigma^{*}K*}. \end{cases} \quad (\text{II.6})$$

Dans le cas où $A_{\mathcal{Q}_{\mathcal{K},\mathcal{K}^*}} = A_{\mathcal{Q}_{\mathcal{K},\mathcal{L}^*}}$ et $A_{\mathcal{Q}_{\mathcal{L},\mathcal{K}^*}} = A_{\mathcal{Q}_{\mathcal{L},\mathcal{L}^*}}$, on peut facilement voir que la solution $\delta^{\mathcal{D}}$ de (II.6) vérifie (cf [BH08]) :

$$\delta_{\mathcal{K}} = \delta_{\mathcal{L}} = 0 \quad \text{et} \quad \delta_{\mathcal{K}^*} = \delta_{\mathcal{L}^*} = \delta.$$

Dans ce cas précis, on a en fait un lien entre δ et notre u_{σ} calculé en (II.3) qui est :

$$\delta = \frac{1}{2m_{\sigma^*}} (m_{\sigma_{\mathcal{L}}}(u_{\sigma} - u_{\mathcal{K}}) + m_{\sigma_{\mathcal{K}}}(u_{\sigma} - u_{\mathcal{L}})),$$

et on a

$$\nabla_{\mathcal{Q}_{\mathcal{K},\mathcal{K}^*}}^{\mathcal{N}} u^{\tau} = \nabla_{\mathcal{Q}_{\mathcal{K},\mathcal{L}^*}}^{\mathcal{N}} u^{\tau} = \nabla^{\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{K}}} u^{\tau} \quad \text{et} \quad \nabla_{\mathcal{Q}_{\mathcal{L},\mathcal{K}^*}}^{\mathcal{N}} u^{\tau} = \nabla_{\mathcal{Q}_{\mathcal{L},\mathcal{L}^*}}^{\mathcal{N}} u^{\tau} = \nabla^{\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{L}}} u^{\tau}. \quad (\text{II.7})$$

On en déduit donc que

$$\mathcal{A}_{\mathcal{D}}(\nabla^{\tilde{\mathcal{D}}} u^{\tau}) = \frac{1}{m_{\mathcal{D}}} \sum_{\mathcal{Q} \in \Omega_{\mathcal{D}}} m_{\mathcal{Q}} A_{\mathcal{Q}} \cdot \nabla_{\mathcal{Q}}^{\mathcal{N}} u^{\tau}.$$

Ainsi dans le cas où $A_{\mathcal{Q}_{\mathcal{K},\mathcal{K}^*}} = A_{\mathcal{Q}_{\mathcal{K},\mathcal{L}^*}}$ et $A_{\mathcal{Q}_{\mathcal{L},\mathcal{K}^*}} = A_{\mathcal{Q}_{\mathcal{L},\mathcal{L}^*}}$, nos flux sont identiques aux flux de [BH08], néanmoins la nouveauté de ce chapitre est l'estimation d'erreur avec des conditions aux bords mixtes de type Dirichlet/Fourier.

II.3 Principe du schéma DDFV pour le problème de diffusion anisotrope

On discrétise le domaine Ω en un maillage $\mathcal{T} = (\mathfrak{M} \cup \partial\mathfrak{M}, \mathfrak{M}^* \cup \partial\mathfrak{M}^*)$. On suppose que les frontières entre les bords Dirichlet et Fourier sont situées aux noeuds du maillage dual. Ainsi les centres $x_{\mathcal{K}}$ des mailles primales dégénérées appartiennent exclusivement à Γ_D ou exclusivement à Γ_F ainsi la définition de $\partial\mathfrak{M}_D$ et $\partial\mathfrak{M}_F$ ne pose pas de problèmes. Par contre, les sommets $x_{\mathcal{K}^*}$ des mailles duales du bord peuvent appartenir à la fois à Γ_D et à Γ_F , dans ce cas on impose que la maille duale \mathcal{K}^* correspondante appartienne à $\partial\mathfrak{M}_D^*$ et pour les noeuds $x_{\mathcal{K}^*}$ appartenant uniquement à Γ_D (resp. Γ_F), leur maille duale \mathcal{K}^* est dans $\partial\mathfrak{M}_D^*$ (resp. $\partial\mathfrak{M}_F^*$). On a ainsi les notations des bords Dirichlet et Fourier suivantes (voir la Figure II.2) :

$$\begin{aligned} \partial\mathfrak{M}_D &= \{\mathcal{K} \in \partial\mathfrak{M}, x_{\mathcal{K}} \in \Gamma_D\}, & \partial\mathfrak{M}_F &= \{\mathcal{K} \in \partial\mathfrak{M}, x_{\mathcal{K}} \in \Gamma_F\}, \\ \partial\mathfrak{M}_D^* &= \{\mathcal{K}^* \in \partial\mathfrak{M}^*, x_{\mathcal{K}^*} \in \Gamma_D\}, & \partial\mathfrak{M}_F^* &= \{\mathcal{K}^* \in \partial\mathfrak{M}^*, x_{\mathcal{K}^*} \in \Gamma_F \setminus \Gamma_D\}. \end{aligned} \quad (\text{II.8})$$

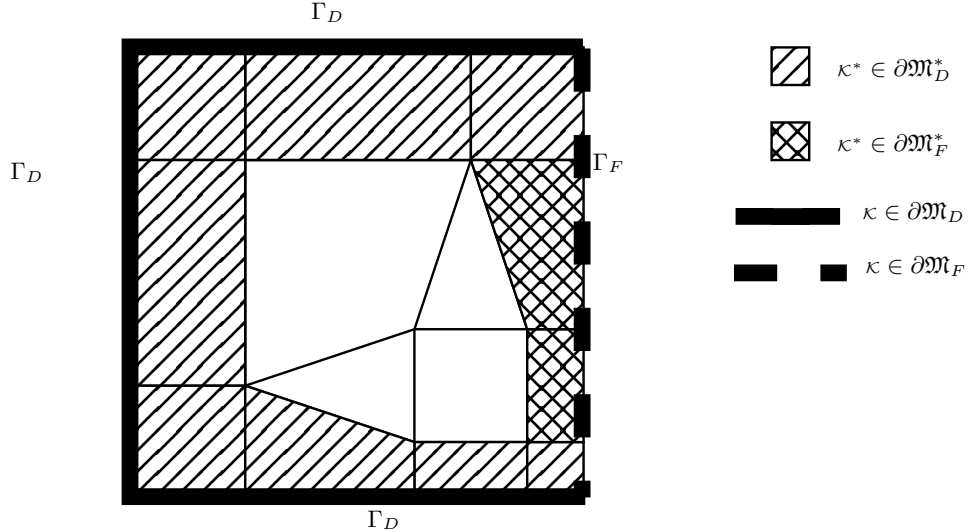


FIG. II.2 – Exemple de condition mixte de Dirichlet/Fourier.

On a besoin de deux sous espaces discrets de $(\mathbb{R}^2)^{\tau}$ pour prendre en compte les conditions aux bords de Dirichlet uniquement sur $\partial\mathfrak{M}_D$ et $\partial\mathfrak{M}_D^*$:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_0^{\mathcal{D}} &= \{v^{\tau} \in \mathbb{R}^{\tau} \text{ tel que } v_{\mathcal{K}} = 0, \forall \mathcal{K} \in \partial\mathfrak{M}_D \text{ et } v_{\mathcal{K}^*} = 0, \forall \mathcal{K}^* \in \partial\mathfrak{M}_D^*\}, \\ \mathbb{E}_g^{\mathcal{D}} &= \{v^{\tau} \in \mathbb{R}^{\tau} \text{ tel que } v_{\mathcal{K}} = (\mathbb{P}_m^{\partial\Omega} g)_{\mathcal{K}}, \forall \mathcal{K} \in \partial\mathfrak{M}_D \text{ et } v_{\mathcal{K}^*} = (\mathbb{P}_m^{\partial\Omega} g)_{\mathcal{K}^*}, \forall \mathcal{K}^* \in \partial\mathfrak{M}_D^*\}. \end{aligned} \quad (\text{II.9})$$

On définit également la projection $\mathfrak{P}_{m,g}^D$ sur l'espace \mathbb{E}_g^D :

$$\begin{aligned} \mathfrak{P}_{m,g}^D : \mathbb{R}^\tau &\longrightarrow \mathbb{E}_g^D \\ u^\tau &\longmapsto \left((u_\kappa)_{\kappa \in \mathfrak{M} \cup \partial \mathfrak{M}_F}, (\mathbb{P}_m^{\partial \Omega} g)_{\kappa \in \partial \mathfrak{M}_D}, (u_{\kappa^*})_{\kappa^* \in \mathfrak{M}^* \cup \partial \mathfrak{M}_F^*}, (\mathbb{P}_m^{\partial \Omega} g)_{\kappa^* \in \partial \mathfrak{M}_D^*} \right). \end{aligned} \quad (\text{II.10})$$

On introduit le maillage $\partial \mathfrak{A}_F$ suivant du bord Γ_F :

$$\partial \mathfrak{A}_F = \{[x_{\kappa^*} x_\mathcal{L}], [x_\mathcal{L}^* x_\mathcal{L}] \text{ telles que } [x_{\kappa^*} x_\mathcal{L}] \in \partial \mathfrak{M}_F\}. \quad (\text{II.11})$$

On note également $\mathfrak{D}_\Gamma = \{\mathcal{D}_{\sigma,\sigma^*} \in \mathfrak{D}, \text{ tels que } \sigma \subset \Gamma\}$ l'ensemble des diamants du bord Γ .

On rajoute des inconnues de flux sur chaque demi-arête du bord Γ_F notées $\varphi_{\kappa^*,\mathcal{L}}$ et $\varphi_{\mathcal{L}^*,\mathcal{L}}$, pour $\mathcal{L} = [x_{\kappa^*}, x_{\mathcal{L}^*}] \in \partial \mathfrak{M}_F$. Ces inconnues vont approcher les flux normaux sur chaque demi-arête $\mathcal{A}_\mathcal{D}(\nabla^{\tilde{\mathfrak{D}}} u^\tau) \cdot \vec{\mathbf{n}}_{\sigma\mathcal{L}}$.

On obtient donc un nouvel espace d'approximation $U^\tau \in (\mathbb{R}^\tau \cup \Phi^\tau)$ où

$$U^\tau = (u^\tau, \varphi^\tau) = \left((u_\kappa)_{\kappa \in (\mathfrak{M} \cup \partial \mathfrak{M})}, (u_{\kappa^*})_{\kappa^* \in (\mathfrak{M}^* \cup \partial \mathfrak{M}^*)}, (\varphi_{\kappa^*,\mathcal{L}}, \varphi_{\mathcal{L}^*,\mathcal{L}})_{\mathcal{L}=[x_{\kappa^*}, x_{\mathcal{L}^*}] \in \partial \mathfrak{M}_F} \right). \quad (\text{II.12})$$

La démarche pour obtenir notre schéma DDFV pour le problème (II.1) est la suivante. On intègre l'équation sur les mailles primales intérieures \mathfrak{M} (cf (II.13b)) et sur les mailles duales intérieures \mathfrak{M}^* (cf (II.13c)). On intègre également l'équation sur les mailles duales du bord Fourier $\partial \mathfrak{M}_F^*$ en utilisant les inconnues $\varphi_{\kappa^*,\mathcal{L}}$ au lieu de $\mathcal{A}_\mathcal{D}(\nabla^{\tilde{\mathfrak{D}}} u^\tau) \cdot \vec{\mathbf{n}}_{\sigma\mathcal{L}}$ là où c'est nécessaire (cf (II.13d)). Ensuite pour l'équation sur $\partial \mathfrak{M}_F$, on écrit que les $\varphi_{\kappa^*,\mathcal{L}}$ approchent $\mathcal{A}_\mathcal{D}(\nabla^{\tilde{\mathfrak{D}}} u^\tau) \cdot \vec{\mathbf{n}}_{\sigma\mathcal{L}}$ (cf (II.13e)). Enfin, on impose la condition de Fourier sur chaque demi-arête de $\partial \mathfrak{A}_F$ en utilisant $\varphi_{\kappa^*,\mathcal{L}}$ (cf (II.13f)) et la condition de Dirichlet sur les mailles duales du bord $\partial \mathfrak{M}_D^*$ et sur les mailles primales du bord $\partial \mathfrak{M}_D$ (cf (II.13a)).

L'approximation DDFV de la solution du problème (II.1) est alors le couple $U^\tau = (u^\tau, \varphi^\tau) \in \mathbb{R}^\tau \times \Phi_\Gamma^\tau$ solution de l'ensemble des équations linéaires suivantes :

$$\text{Trouver } u^\tau, \varphi^\tau \in \mathbb{E}_g^D \times \Phi_\Gamma^\tau \text{ tels que,} \quad (\text{II.13a})$$

$$-\text{div}^\kappa \left(\mathcal{A}^\mathfrak{D}(\nabla^{\tilde{\mathfrak{D}}} u^\tau) \right) = f_\kappa, \quad \forall \kappa \in \mathfrak{M}, \quad (\text{II.13b})$$

$$-\text{div}^{\kappa^*} \left(\mathcal{A}^\mathfrak{D}(\nabla^{\tilde{\mathfrak{D}}} u^\tau) \right) = f_{\kappa^*}, \quad \forall \kappa^* \in \mathfrak{M}^*, \quad (\text{II.13c})$$

$$-\sum_{\mathcal{D}_{\sigma,\sigma^*} \in \mathfrak{D}_{\kappa^*}} \frac{m_{\sigma^*}}{m_{\kappa^*}} \mathcal{A}_\mathcal{D}(\nabla^{\tilde{\mathfrak{D}}} u^\tau) \cdot \vec{\mathbf{n}}_{\sigma^*\kappa^*} - \sum_{\mathcal{D} \in \mathfrak{D}_{\kappa^*} \cap \mathfrak{D}_\Gamma} \frac{d_{\kappa^*,\mathcal{L}}}{m_{\kappa^*}} \varphi_{\kappa^*,\mathcal{L}} = f_{\kappa^*}, \quad \forall \kappa^* \in \partial \mathfrak{M}_F^*, \quad (\text{II.13d})$$

$$\frac{d_{\kappa^*,\mathcal{L}}}{m_\sigma} \varphi_{\kappa^*,\mathcal{L}} + \frac{d_{\mathcal{L}^*,\mathcal{L}}}{m_\sigma} \varphi_{\mathcal{L}^*,\mathcal{L}} = \mathcal{A}_\mathcal{D}(\nabla^{\tilde{\mathfrak{D}}} u^\tau) \cdot \vec{\mathbf{n}}_{\sigma\mathcal{L}}, \quad \forall \mathcal{L} = [x_{\kappa^*} x_{\mathcal{L}^*}] \in \partial \mathfrak{M}_F, \quad (\text{II.13e})$$

$$\varphi_{\kappa^*,\mathcal{L}} + \lambda \gamma_{\kappa^*,\mathcal{L}}(u^\tau) = h_{\kappa^*,\mathcal{L}}, \quad \forall [x_{\kappa^*} x_\mathcal{L}] \in \partial \mathfrak{A}_F. \quad (\text{II.13f})$$

avec

$$\gamma_{\kappa^*,\mathcal{L}}(u^\tau) = \frac{u_{\kappa^*} + u_\mathcal{L}}{2}, \quad (\text{II.14})$$

on définit, par abus de notation, $\gamma_\sigma(\varphi^\tau) = \frac{d_{\kappa^*,\mathcal{L}}}{m_\sigma} \varphi_{\kappa^*,\mathcal{L}} + \frac{d_{\mathcal{L}^*,\mathcal{L}}}{m_\sigma} \varphi_{\mathcal{L}^*,\mathcal{L}}$, pour tout $\sigma \in \partial \mathfrak{M}_F$ et pour tout $\varphi^\tau \in \Phi_\Gamma^\tau$. On a pour les termes sources f^τ :

$$f^\mathfrak{M} = \mathbb{P}_m^\mathfrak{M} f, \quad f^{\mathfrak{M}^*} = \mathbb{P}_m^{\mathfrak{M}^*} f, \quad f^{\partial \mathfrak{M}_F^*} = \left(\frac{1}{m_{B_{\kappa^*}}} \int_{B_{\kappa^*}} f(x) dx \right)_{\kappa^* \in \partial \mathfrak{M}_F^*}, \quad (\text{II.15})$$

pour la condition de Dirichlet g^τ :

$$g^{\partial \mathfrak{M}_D} = \left(\frac{1}{m_{B_\kappa}} \int_{B_\kappa} g(x) dx \right)_{\kappa \in \partial \mathfrak{M}_D}, \quad g^{\partial \mathfrak{M}_D^*} = \left(\frac{1}{m_{B_{\kappa^*}}} \int_{B_{\kappa^*}} g(x) dx \right)_{\kappa^* \in \partial \mathfrak{M}_D^*}, \quad (\text{II.16})$$

et enfin pour la condition de Fourier h^τ :

$$h^{\partial \mathfrak{A}_F} = \left(\frac{1}{d_{\kappa^*,\mathcal{L}}} \int_{x_{\kappa^*}}^{x_\mathcal{L}} h(x) dx \right)_{[x_{\kappa^*} x_\mathcal{L}] \in \partial \mathfrak{A}_F}. \quad (\text{II.17})$$

Pour simplifier un peu les notations, on note maintenant le fait que $U^\tau = (u^\tau, \varphi^\tau)$ est solution de (II.13), pour des données $(f^\tau, g^\tau, h^\tau) \in \mathbb{R}^\tau \times \Phi_\Gamma^\tau$ définies par (II.15)-(II.17), de la manière compacte suivante :

$$\mathcal{L}_{\Omega, \Gamma}^\tau(u^\tau, \varphi^\tau, f^\tau, g^\tau, h^\tau) = 0. \quad (\text{II.18})$$

Théorème II.7

Le schéma (II.13) qui approche la solution du problème (II.1) sur un maillage DDFV \mathcal{T} possède une unique solution $U^\tau = (u^\tau, \varphi^\tau) \in \mathbb{R}^\tau \times \Phi_\Gamma^\tau$.

Tout d'abord, on donne un lemme et une proposition techniques qui sont utilisés dans la démonstration du Théorème II.7 et du Théorème III.5.

Lemme II.8

Soit $U^\tau = (u^\tau, \varphi^\tau) \in \mathbb{R}^\tau \times \Phi_\Gamma^\tau$ et $f^\tau, h^\tau \in \mathbb{R}^\tau \times \Phi_\Gamma^\tau$ vérifiant

$$\mathcal{L}_{\Omega, \Gamma}^\tau(u^\tau, \varphi^\tau, f^\tau, 0, h^\tau) = 0.$$

Alors on a

$$\begin{aligned} & \sum_{\mathcal{D} \in \mathcal{D}} m_{\mathcal{D}} \mathcal{A}_{\mathcal{D}}(\nabla^{\tilde{\mathcal{D}}} u^\tau) \cdot \nabla^{\mathcal{D}} u^\tau + \lambda \sum_{\mathcal{D} \in \mathcal{D}_\Gamma} m_\sigma (\gamma_\sigma(u^\tau))^2 + \frac{\lambda}{4} \sum_{\mathcal{D} \in \mathcal{D}_\Gamma} M_\sigma (u_{\kappa^*} - u_{\mathcal{L}^*})^2 \\ &= [f^\tau, u^\tau]_{\mathcal{T}} + \sum_{\mathcal{D} \in \mathcal{D}_\Gamma} m_\sigma \gamma_\sigma(u^\tau) \gamma_\sigma(h^\tau) + \frac{\lambda}{2} \sum_{\mathcal{D} \in \mathcal{D}_\Gamma} M_\sigma (h_{\kappa^*, \mathcal{L}} - h_{\mathcal{L}^*, \mathcal{L}}) (u_{\kappa^*} - u_{\mathcal{L}^*}). \end{aligned}$$

où $M_\sigma = \frac{d_{\kappa^, \mathcal{L}} d_{\mathcal{L}^*, \mathcal{L}}}{m_\sigma}$, si σ est l'arête de $[x_{\kappa^*}, x_{\mathcal{L}^*}]$.*

Démonstration : On applique la formule de Green (Théorème I.10), on obtient

$$-[\text{div}^\tau(\mathcal{A}^\mathcal{D}(\nabla^{\tilde{\mathcal{D}}} u^\tau)), u^\tau]_{\mathcal{T}} = \sum_{\mathcal{D} \in \mathcal{D}} m_{\mathcal{D}} \mathcal{A}_{\mathcal{D}}(\nabla^{\tilde{\mathcal{D}}} u^\tau) \cdot \nabla^{\mathcal{D}} u^\tau - \sum_{\mathcal{D} \in \mathcal{D}_\Gamma} m_\sigma \gamma_\sigma(u^\tau) \mathcal{A}_{\mathcal{D}}(\nabla^{\tilde{\mathcal{D}}} u^\tau) \cdot \vec{\mathbf{n}}_{\sigma, \mathcal{L}}.$$

D'après l'équation (II.13e), on a $\mathcal{A}_{\mathcal{D}}(\nabla^{\tilde{\mathcal{D}}} u^\tau) \cdot \vec{\mathbf{n}}_{\sigma, \mathcal{L}} = \gamma_\sigma(\varphi^\tau)$, pour tout $\mathcal{D} \in \mathcal{D}_\Gamma$. De plus, en utilisant l'équation (II.13f), on a $\gamma_\sigma(\varphi^\tau) = -\lambda \gamma_\sigma(u^\tau) + \gamma_\sigma(h^\tau)$. Ceci implique,

$$-[\text{div}^\tau(\mathcal{A}^\mathcal{D}(\nabla^{\tilde{\mathcal{D}}} u^\tau)), u^\tau]_{\mathcal{T}} = \sum_{\mathcal{D} \in \mathcal{D}} m_{\mathcal{D}} \mathcal{A}_{\mathcal{D}}(\nabla^{\tilde{\mathcal{D}}} u^\tau) \cdot \nabla^{\mathcal{D}} u^\tau + \lambda \sum_{\mathcal{D} \in \mathcal{D}_\Gamma} m_\sigma (\gamma_\sigma(u^\tau))^2 - \sum_{\mathcal{D} \in \mathcal{D}_\Gamma} m_\sigma \gamma_\sigma(u^\tau) \gamma_\sigma(h^\tau). \quad (\text{II.19})$$

En utilisant la définition des crochets $[\cdot, \cdot]_{\mathcal{T}}$ sur Ω et (II.13a)-(II.13d), il résulte

$$-[\text{div}^\tau(\mathcal{A}^\mathcal{D}(\nabla^{\tilde{\mathcal{D}}} u^\tau)), u^\tau]_{\mathcal{T}} = [f^\tau, u^\tau]_{\mathcal{T}} - \frac{1}{2} \sum_{\kappa^* \in \partial \mathfrak{M}_\Gamma^*} u_{\kappa^*} \sum_{\mathcal{D} \in \mathcal{D}_{\kappa^*} \cap \mathcal{D}_\Gamma} d_{\kappa^*, \mathcal{L}} \left(\mathcal{A}_{\mathcal{D}}(\nabla^{\tilde{\mathcal{D}}} u^\tau) \cdot \vec{\mathbf{n}}_{\sigma, \mathcal{L}_k} - \varphi_{\kappa^*, \mathcal{L}} \right).$$

L'équation (II.13e) implique

$$-[\text{div}^\tau(\mathcal{A}^\mathcal{D}(\nabla^{\tilde{\mathcal{D}}} u^\tau)), u^\tau]_{\mathcal{T}} = [f^\tau, u^\tau]_{\mathcal{T}} - \frac{1}{2} \sum_{\kappa^* \in \partial \mathfrak{M}_\Gamma^*} u_{\kappa^*} \sum_{\mathcal{D} \in \mathcal{D}_{\kappa^*} \cap \mathcal{D}_\Gamma} \frac{d_{\kappa^*, \mathcal{L}} d_{\mathcal{L}^*, \mathcal{L}}}{m_\sigma} (\varphi_{\mathcal{L}^*, \mathcal{L}} - \varphi_{\kappa^*, \mathcal{L}}).$$

Grâce à (II.13f), on obtient alors :

$$\begin{aligned} -[\text{div}^\tau(\mathcal{A}^\mathcal{D}(\nabla^{\tilde{\mathcal{D}}} u^\tau)), u^\tau]_{\mathcal{T}} &= [f^\tau, u^\tau]_{\mathcal{T}} - \frac{1}{2} \sum_{\kappa^* \in \partial \mathfrak{M}_\Gamma^*} u_{\kappa^*} \sum_{\mathcal{D} \in \mathcal{D}_{\kappa^*} \cap \mathcal{D}_\Gamma} M_\sigma \lambda (\gamma_{\kappa^*, \mathcal{L}}(u^\tau) - \gamma_{\mathcal{L}^*, \mathcal{L}}(u^\tau)) \\ &\quad - \frac{1}{2} \sum_{\kappa^* \in \partial \mathfrak{M}_\Gamma^*} u_{\kappa^*} \sum_{\mathcal{D} \in \mathcal{D}_{\kappa^*} \cap \mathcal{D}_\Gamma} M_\sigma (h_{\mathcal{L}^*, \mathcal{L}} - h_{\kappa^*, \mathcal{L}}), \end{aligned} \quad (\text{II.20})$$

on rappelle que $M_\sigma = \frac{d_{\kappa^*, \mathcal{L}} d_{\mathcal{L}^*, \mathcal{L}}}{m_\sigma}$. On remarque que $\gamma_{\kappa^*, \mathcal{L}}(u^\tau) - \gamma_{\mathcal{L}^*, \mathcal{L}}(u^\tau)$ vaut $\frac{u_{\kappa^*} - u_{\mathcal{L}^*}}{2}$. On s'intéresse aux deux sommes sur Γ . On réordonne la somme sur les diamants d'une part, on a,

$$\frac{1}{2} \sum_{\kappa^* \in \partial \mathfrak{M}_\Gamma^*} u_{\kappa^*} \sum_{\mathcal{D} \in \mathcal{D}_{\kappa^*} \cap \mathcal{D}_\Gamma} M_\sigma \frac{\lambda}{2} (u_{\kappa^*} - u_{\mathcal{L}^*}) = \frac{1}{2} \sum_{\mathcal{D} \in \mathcal{D}_\Gamma} M_\sigma \frac{\lambda}{2} (u_{\kappa^*} - u_{\mathcal{L}^*})^2, \quad (\text{II.21})$$

d'autre part, on a

$$\frac{\lambda}{2} \sum_{\kappa^* \in \partial \mathfrak{M}_\Gamma^*} u_{\kappa^*} \sum_{\mathfrak{D} \in \mathfrak{D}_{\kappa^*} \cap \mathfrak{D}_\Gamma} M_\sigma(h_{\mathcal{L}^* \mathcal{L}} - h_{\kappa^* \mathcal{L}}) = \frac{\lambda}{2} \sum_{\mathfrak{D} \in \mathfrak{D}_\Gamma} M_\sigma(h_{\mathcal{L}^* \mathcal{L}} - h_{\kappa^* \mathcal{L}})(u_{\kappa^*} - u_{\mathcal{L}^*}). \quad (\text{II.22})$$

Finalement, en injectant (II.21) et (II.22) dans (II.20), on en déduit

$$-[\text{div}^\tau(\mathcal{A}^\mathfrak{D}(\nabla^{\tilde{\mathfrak{D}}} u^\tau)), u^\tau]_\mathcal{T} = [\mathbf{f}^\tau, u^\tau]_\mathcal{T} - \frac{\lambda}{4} \sum_{\mathfrak{D} \in \mathfrak{D}_\Gamma} M_\sigma(u_{\kappa^*} - u_{\mathcal{L}^*})^2 + \frac{\lambda}{2} \sum_{\mathfrak{D} \in \mathfrak{D}_\Gamma} M_\sigma(h_{\kappa^* \mathcal{L}} - h_{\mathcal{L}^* \mathcal{L}})(u_{\kappa^*} - u_{\mathcal{L}^*}). \quad (\text{II.23})$$

En regroupant (II.19) et (II.23), on obtient le résultat voulu. \blacksquare

Proposition II.9

Soit $U^\tau = (u^\tau, \varphi^\tau) \in \mathbb{R}^\tau \times \Phi_\Gamma^\tau$ et $\mathbf{f}^\tau, h^\tau \in \mathbb{R}^\tau \times \Phi_\Gamma^\tau$ vérifiant

$$\mathcal{L}_{\Omega, \Gamma}^\tau(u^\tau, \varphi^\tau, \mathbf{f}^\tau, 0, h^\tau) = 0.$$

Alors, il existe une constante $C > 0$, dépendant uniquement que de λ et C_A , telle que

$$\|\nabla^{\tilde{\mathfrak{D}}} u^\tau\|_2^2 \leq C \left(|[\mathbf{f}^\tau, u^\tau]_\mathcal{T}| + \sum_{\mathfrak{D} \in \mathfrak{D}_\Gamma} m_\sigma(\gamma_\sigma(h^\tau))^2 + \sum_{\mathfrak{D} \in \mathfrak{D}_\Gamma} M_\sigma(h_{\mathcal{L}^* \mathcal{L}} - h_{\kappa^* \mathcal{L}})^2 \right).$$

Démonstration : En utilisant le Lemme II.8, puis en appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a

$$\begin{aligned} & \sum_{\mathfrak{D} \in \mathfrak{D}} m_{\mathfrak{D}} \mathcal{A}_{\mathfrak{D}}(\nabla^{\tilde{\mathfrak{D}}} u^\tau) \cdot \nabla^{\mathfrak{D}} u^\tau + \lambda \sum_{\mathfrak{D} \in \mathfrak{D}_\Gamma} m_\sigma(\gamma_\sigma(u^\tau))^2 + \frac{\lambda}{4} \sum_{\mathfrak{D} \in \mathfrak{D}_\Gamma} M_\sigma(u_{\kappa^*} - u_{\mathcal{L}^*})^2 \\ & \leq |[\mathbf{f}^\tau, u^\tau]_\mathcal{T}| + \left(\lambda \sum_{\mathfrak{D} \in \mathfrak{D}_\Gamma} m_\sigma(\gamma_\sigma(u^\tau))^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{\lambda} \sum_{\mathfrak{D} \in \mathfrak{D}_\Gamma} m_\sigma(\gamma_\sigma(h^\tau))^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ & \quad + \left(\frac{\lambda}{4} \sum_{\mathfrak{D} \in \mathfrak{D}_\Gamma} M_\sigma(u_{\kappa^*} - u_{\mathcal{L}^*})^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\lambda \sum_{\mathfrak{D} \in \mathfrak{D}_\Gamma} M_\sigma(h_{\mathcal{L}^* \mathcal{L}} - h_{\kappa^* \mathcal{L}})^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

On applique l'inégalité de Young sur les deux derniers termes du membre de droite pour obtenir

$$\begin{aligned} & \sum_{\mathfrak{D} \in \mathfrak{D}} m_{\mathfrak{D}} \mathcal{A}_{\mathfrak{D}}(\nabla^{\tilde{\mathfrak{D}}} u^\tau) \cdot \nabla^{\mathfrak{D}} u^\tau + \lambda \sum_{\mathfrak{D} \in \mathfrak{D}_\Gamma} m_\sigma(\gamma_\sigma(u^\tau))^2 + \frac{\lambda}{4} \sum_{\mathfrak{D} \in \mathfrak{D}_\Gamma} M_\sigma(u_{\kappa^*} - u_{\mathcal{L}^*})^2 \\ & \leq |[\mathbf{f}^\tau, u^\tau]_\mathcal{T}| + \frac{\lambda}{2} \sum_{\mathfrak{D} \in \mathfrak{D}_\Gamma} m_\sigma(\gamma_\sigma(u^\tau))^2 + \frac{1}{2\lambda} \sum_{\mathfrak{D} \in \mathfrak{D}_\Gamma} m_\sigma(\gamma_\sigma(h^\tau))^2 \\ & \quad + \frac{\lambda}{8} \sum_{\mathfrak{D} \in \mathfrak{D}_\Gamma} M_\sigma(u_{\kappa^*} - u_{\mathcal{L}^*})^2 + \frac{\lambda}{2} \sum_{\mathfrak{D} \in \mathfrak{D}_\Gamma} M_\sigma(h_{\mathcal{L}^* \mathcal{L}} - h_{\kappa^* \mathcal{L}})^2. \end{aligned}$$

On en déduit,

$$\begin{aligned} & \sum_{\mathfrak{D} \in \mathfrak{D}} m_{\mathfrak{D}} \mathcal{A}_{\mathfrak{D}}(\nabla^{\tilde{\mathfrak{D}}} u^\tau) \cdot \nabla^{\mathfrak{D}} u^\tau + \frac{\lambda}{2} \sum_{\mathfrak{D} \in \mathfrak{D}_\Gamma} m_\sigma(\gamma_\sigma(u^\tau))^2 + \frac{\lambda}{8} \sum_{\mathfrak{D} \in \mathfrak{D}_\Gamma} M_\sigma(u_{\kappa^*} - u_{\mathcal{L}^*})^2 \\ & \leq C_1 \left(|[\mathbf{f}^\tau, u^\tau]_\mathcal{T}| + \sum_{\mathfrak{D} \in \mathfrak{D}_\Gamma} m_\sigma(\gamma_\sigma(h^\tau))^2 + \sum_{\mathfrak{D} \in \mathfrak{D}_\Gamma} M_\sigma(h_{\mathcal{L}^* \mathcal{L}} - h_{\kappa^* \mathcal{L}})^2 \right), \end{aligned}$$

où $C_1 = \max(1, \frac{1}{2\lambda}, \frac{\lambda}{2})$. Il vient que

$$\sum_{\mathfrak{D} \in \mathfrak{D}} m_{\mathfrak{D}} \mathcal{A}_{\mathfrak{D}}(\nabla^{\tilde{\mathfrak{D}}} u^\tau) \cdot \nabla^{\mathfrak{D}} u^\tau \leq C_1 \left(|[\mathbf{f}^\tau, u^\tau]_\mathcal{T}| + \sum_{\mathfrak{D} \in \mathfrak{D}_\Gamma} m_\sigma(\gamma_\sigma(h^\tau))^2 + \sum_{\mathfrak{D} \in \mathfrak{D}_\Gamma} M_\sigma(h_{\mathcal{L}^* \mathcal{L}} - h_{\kappa^* \mathcal{L}})^2 \right).$$

Or d'après la Définition II.3 de $\mathcal{A}^\mathfrak{D}(\nabla^{\tilde{\mathfrak{D}}} u^\tau)$, on a

$$\sum_{\mathfrak{D} \in \mathfrak{D}} m_{\mathfrak{D}} \mathcal{A}_{\mathfrak{D}}(\nabla^{\tilde{\mathfrak{D}}} u^\tau) \cdot \nabla^{\mathfrak{D}} u^\tau = \sum_{\mathfrak{D} \in \mathfrak{D}} \sum_{\tilde{\mathfrak{D}} \in \tilde{\mathfrak{D}}_\mathfrak{D}} m_{\tilde{\mathfrak{D}}} (A_{\tilde{\mathfrak{D}}} \cdot \nabla^{\tilde{\mathfrak{D}}} u^\tau) \cdot \nabla^{\mathfrak{D}} u^\tau.$$

Grâce au Lemme II.5, on obtient

$$\sum_{\mathcal{D} \in \mathfrak{D}} m_{\mathcal{D}} \mathcal{A}_{\mathcal{D}}(\nabla^{\tilde{\mathcal{D}}} u^{\tau}) \cdot \nabla^{\mathcal{D}} u^{\tau} = \sum_{\mathcal{D} \in \mathfrak{D}} \sum_{\tilde{\mathcal{D}} \in \tilde{\mathfrak{D}}_{\mathcal{D}}} m_{\tilde{\mathcal{D}}} (A_{\tilde{\mathcal{D}}} \cdot \nabla^{\tilde{\mathcal{D}}} u^{\tau}) \cdot \nabla^{\tilde{\mathcal{D}}} u^{\tau}.$$

Comme la matrice A vérifie (\mathcal{H}_1) , on en déduit

$$\sum_{\mathcal{D} \in \mathfrak{D}} m_{\mathcal{D}} \mathcal{A}_{\mathcal{D}}(\nabla^{\tilde{\mathcal{D}}} u^{\tau}) \cdot \nabla^{\mathcal{D}} u^{\tau} \geq \frac{1}{C_A} \|\nabla^{\tilde{\mathcal{D}}} u^{\tau}\|_2^2.$$

Finalement, le résultat est prouvé avec $C = C_1 C_A$. ■

Maintenant on peut procéder à la démonstration du Théorème II.7.

Démonstration du Théorème II.7 :

Le caractère bien posé d'un système linéaire carré est équivalent à montrer que son noyau est trivial. Soit donc $U^{\tau} = (u^{\tau}, \varphi^{\tau}) \in \mathbb{R}^{\tau} \times \Phi_{\Gamma}^{\tau}$ vérifiant :

$$\mathcal{L}_{\Omega, \Gamma}^{\tau}(u^{\tau}, \varphi^{\tau}, 0, 0, 0) = 0.$$

L'estimation de la Proposition II.9 implique :

$$\|\nabla^{\tilde{\mathcal{D}}} u^{\tau}\|_2 = 0,$$

car $f^{\tau} = 0$ et $h^{\tau} = 0$. Ensuite, on applique la Proposition II.6. Ceci donne $\|\nabla^{\tilde{\mathcal{D}}} u^{\tau}\|_2 = 0$. Comme $u^{\tau} \in \mathbb{E}_0^{\mathcal{D}}$, la Remarque I.8 implique $u^{\tau} = 0$. Comme, pour tout $\sigma = [x_{\kappa^*}, x_{\mathcal{L}^*}] \in \partial \mathfrak{M}_{\Gamma}$, on a $\varphi_{\kappa^*, \mathcal{L}} + \lambda \gamma_{\kappa^*, \mathcal{L}}(u^{\tau}) = 0$ et $\varphi_{\mathcal{L}^*, \mathcal{L}} + \lambda \gamma_{\mathcal{L}^*, \mathcal{L}}(u^{\tau}) = 0$, on obtient que $\varphi_{\kappa^*, \mathcal{L}} = 0$, et $\varphi_{\mathcal{L}^*, \mathcal{L}} = 0$, par conséquent $U^{\tau} = 0$. ■

II.4 Propriétés du gradient discret sur les demi-diamants

On définit l'espace de régularité suivant

$$H^2(\tilde{\mathfrak{D}}) = \{u \in H^1(\Omega), \text{ telle que } u|_{\tilde{\mathcal{D}}} \in H^2(\tilde{\mathcal{D}}), \forall \tilde{\mathcal{D}} \in \tilde{\mathfrak{D}}\},$$

doté de la norme brisée

$$\|u\|_{H^2(\tilde{\mathfrak{D}})} = \|u\|_{H^1(\Omega)} + \left(\sum_{\tilde{\mathcal{D}} \in \tilde{\mathfrak{D}}} \|\nabla^2 u\|_{L^2(\tilde{\mathcal{D}})}^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

On rappelle que dans le cas où $A_{\mathcal{Q}_{\kappa, \kappa^*}} = A_{\mathcal{Q}_{\kappa, \mathcal{L}^*}}$ et $A_{\mathcal{Q}_{\mathcal{L}, \kappa^*}} = A_{\mathcal{Q}_{\mathcal{L}, \mathcal{L}^*}}$, on a (II.7). Ceci implique que les deux résultats suivants sont des cas particuliers des résultats correspondants dans [BH08], qu'on ne redémontre donc pas.

Lemme II.10

Soit \mathcal{T} un maillage DDFV associé à Ω . Il existe une constante $C > 0$, dépendant uniquement de $\text{reg}(\mathcal{T})$ et de C_A , telle que la solution u du problème (II.1) appartenant à $H^2(\tilde{\mathfrak{D}})$ vérifie pour tout $\mathcal{D} \in \mathfrak{D}_{int}$

$$\sum_{\tilde{\mathcal{D}} \in \tilde{\mathfrak{D}}_{\mathcal{D}}} \int_{\tilde{\mathcal{D}}} |\nabla u(x) - \nabla^{\tilde{\mathcal{D}}} \mathbb{P}_c^{\tau} u|^2 dx \leq C \text{size}(\mathcal{T})^2 \left(\|u\|_{H^1(\mathcal{D})}^2 + \sum_{\tilde{\mathcal{D}} \in \tilde{\mathfrak{D}}_{\mathcal{D}}} \|\nabla^2 u\|_{L^2(\tilde{\mathcal{D}})}^2 \right),$$

pour tout $\mathcal{D} \in \mathfrak{D}_{ext}$, on a $\mathcal{D} = \tilde{\mathcal{D}}$

$$\int_{\mathcal{D}} |\nabla u(x) - \nabla^{\mathcal{D}} \mathbb{P}_c^{\tau} u|^2 dx \leq C \text{size}(\mathcal{T})^2 \|\nabla^2 u\|_{L^2(\mathcal{D})}^2,$$

et finalement

$$\|\nabla u - \nabla^{\tilde{\mathcal{D}}} \mathbb{P}_c^{\tau} u\|_2 \leq C \text{size}(\mathcal{T}) \|u\|_{H^2(\tilde{\mathfrak{D}})}.$$

On rappelle que les projections $\mathbb{P}_c^\tau u$ et $\mathfrak{P}_{m,g}^D \mathbb{P}_c^\tau u$ diffèrent uniquement sur les mailles primales et duales du bord Dirichlet et que la solution u du problème (II.1) est régulière sur les diamants du bord. Ainsi ce résultat est démontré dans [ABH07], on ne refait pas la démonstration ici.

Lemme II.11

Soit \mathcal{T} un maillage DDFV associé à Ω . Il existe une constante $C > 0$, dépendant uniquement de $\text{reg}(\mathcal{T})$ et de C_A , telle que la solution u du problème (II.1) appartenant à $H^2(\tilde{\mathcal{D}})$ vérifie

$$\|\nabla^{\tilde{\mathcal{D}}} \mathbb{P}_c^\tau u - \nabla^{\tilde{\mathcal{D}}} \mathfrak{P}_{m,g}^D \mathbb{P}_c^\tau u\|_2 \leq C \text{size}(\mathcal{T}) \|u\|_{H^2(\tilde{\mathcal{D}})}.$$

II.5 Estimation d'erreur pour le schéma DDFV

Ici on a des conditions aux bords mixtes de type Dirichlet/Fourier, c'est-à-dire $\Gamma_F \neq \emptyset$, ainsi on a besoin de supposer plus de régularité sur la solution exacte u (voir Remarque II.20) afin d'obtenir une estimation d'ordre 1. Pour cela, on définit l'espace de régularité de la solution de (II.1) comme suit

$$W^{2,\infty}(\tilde{\mathcal{D}}) = \{u \in W^{1,\infty}(\Omega), \text{ t. q. } u|_{\tilde{\mathcal{D}}} \in W^{2,\infty}(\tilde{\mathcal{D}}), \forall \tilde{\mathcal{D}} \in \tilde{\mathcal{D}}\},$$

doté de la norme

$$\|u\|_{W^{2,\infty}(\tilde{\mathcal{D}})} = \|u\|_{W^{1,\infty}(\Omega)} + \sum_{\tilde{\mathcal{D}} \in \tilde{\mathcal{D}}} \|\nabla^2 u\|_{L^\infty(\tilde{\mathcal{D}})}.$$

Théorème II.12 (Estimation d'erreur)

On suppose que la solution de (II.1) $u \in W^{2,\infty}(\tilde{\mathcal{D}})$. Soit $u^\tau \in \mathbb{R}^\tau$ la solution de (II.13). Il existe une constante $C > 0$, dépendant uniquement de A , u , Ω , λ et $\text{reg}(\mathcal{T})$, telle que

$$\|u - u^\tau\|_2 + \|\nabla u - \nabla^{\tilde{\mathcal{D}}} u^\tau\|_2 \leq C \text{size}(\mathcal{T}).$$

Début de démonstration On pose $v^\tau = \mathfrak{P}_{m,g}^D \mathbb{P}_c^\tau u$ et $w^\tau = v^\tau - u^\tau$, $\psi^\tau = (\mathcal{A}^{\mathcal{D}}(\nabla^{\tilde{\mathcal{D}}} v^\tau)) \cdot \vec{\mathbf{n}} - \varphi^\tau$.

1. Grâce à (II.13b) et (II.1), on a $\forall \kappa \in \mathfrak{M}$

$$\begin{cases} -m_\kappa \text{div}^\kappa(\mathcal{A}^{\mathcal{D}}(\nabla^{\tilde{\mathcal{D}}} u^\tau)) = m_\kappa f_\kappa, \\ -\int_\kappa \text{div}(A(x) \cdot \nabla u(x)) dx = m_\kappa f_\kappa. \end{cases}$$

Ainsi, on en déduit

$$-m_\kappa \text{div}^\kappa(\mathcal{A}^{\mathcal{D}}(\nabla^{\tilde{\mathcal{D}}} w^\tau)) = -m_\kappa \text{div}^\kappa(\mathcal{A}^{\mathcal{D}}(\nabla^{\tilde{\mathcal{D}}} \mathfrak{P}_{m,g}^D \mathbb{P}_c^\tau u)) + \int_\kappa \text{div}(A(x) \cdot \nabla u(x)) dx.$$

La Définition I.9 de la divergence discrète et la formule de Green impliquent

$$-m_\kappa \text{div}^\kappa(\mathcal{A}^{\mathcal{D}}(\nabla^{\tilde{\mathcal{D}}} w^\tau)) = \sum_{\mathcal{D} \in \mathcal{D}_\kappa} \int_\sigma (A(s) \cdot \nabla u(s) - \mathcal{A}_\mathcal{D}(\nabla^{\tilde{\mathcal{D}}} \mathfrak{P}_{m,g}^D \mathbb{P}_c^\tau u)) \cdot \vec{\mathbf{n}}_{\sigma\kappa} ds.$$

En utilisant la Définition II.3 de $\mathcal{A}_\mathcal{D}(\nabla^{\tilde{\mathcal{D}}} \mathfrak{P}_{m,g}^D \mathbb{P}_c^\tau u)$ et la condition (II.2), on a

$$\sum_{\mathcal{D} \in \mathcal{D}_\kappa} m_\sigma \mathcal{A}_\mathcal{D}(\nabla^{\tilde{\mathcal{D}}} \mathfrak{P}_{m,g}^D \mathbb{P}_c^\tau u) \cdot \vec{\mathbf{n}}_{\sigma\kappa} = \sum_{\tilde{\mathcal{D}} \in \tilde{\mathcal{D}}_\kappa} m_\sigma (A_{\tilde{\mathcal{D}}} \cdot \nabla^{\tilde{\mathcal{D}}} \mathfrak{P}_{m,g}^D \mathbb{P}_c^\tau u) \cdot \vec{\mathbf{n}}_{\sigma\kappa},$$

où $\tilde{\mathcal{D}}_\kappa$ est l'ensemble des demi-diamants inclus dans la maille primale κ . On en déduit que

$$-m_\kappa \text{div}^\kappa(\mathcal{A}^{\mathcal{D}}(\nabla^{\tilde{\mathcal{D}}} w^\tau)) = \sum_{\tilde{\mathcal{D}} \in \tilde{\mathcal{D}}_\kappa} \int_\sigma (A(s) \cdot \nabla u(s) - A_{\tilde{\mathcal{D}}} \cdot \nabla^{\tilde{\mathcal{D}}} \mathfrak{P}_{m,g}^D \mathbb{P}_c^\tau u) \cdot \vec{\mathbf{n}}_{\sigma\kappa} ds. \quad (\text{II.24})$$

2. On fait de même pour tout $\kappa^* \in \mathfrak{M}^*$, on a

$$\begin{aligned} -m_{\kappa^*} \operatorname{div}^{\kappa^*}(\mathcal{A}^{\mathfrak{D}}(\nabla^{\tilde{\mathfrak{D}}} w^T)) &= - \sum_{\mathfrak{D} \in \mathfrak{D}_{\kappa^*}} m_{\sigma^*} \mathcal{A}_{\mathfrak{D}}(\nabla^{\tilde{\mathfrak{D}}} \mathfrak{P}_{m,g}^D \mathbb{P}_c^T u) \cdot \tilde{\mathbf{n}}_{\sigma^* \kappa^*} \\ &\quad + \sum_{\tilde{\mathfrak{D}} \in \tilde{\mathfrak{D}}_{\kappa^*}} \sum_{\varsigma \in \tilde{\mathfrak{D}} \cap \partial \kappa^*} \int_{\varsigma} (A(s) \cdot \nabla u(s)) \cdot \tilde{\mathbf{n}}_{\sigma^* \kappa^*} ds, \end{aligned}$$

où $\tilde{\mathfrak{D}}_{\kappa^*}$ est l'ensemble des demi-diamants $\tilde{\mathfrak{D}}$ tels que $\tilde{\mathfrak{D}} \cap \kappa^* \neq \emptyset$ et ς vaut soit σ_{κ} soit $\sigma_{\mathcal{L}}$ et on a ainsi $\frac{m_{\sigma^*} m_{\tilde{\mathfrak{D}}}}{m_{\mathfrak{D}}} = m_{\varsigma}$. Grâce à la Définition II.3 de $\mathcal{A}_{\mathfrak{D}}(\nabla^{\tilde{\mathfrak{D}}} \mathfrak{P}_{m,g}^D \mathbb{P}_c^T u)$, on en déduit que

$$-m_{\kappa^*} \operatorname{div}^{\kappa^*}(\mathcal{A}^{\mathfrak{D}}(\nabla^{\tilde{\mathfrak{D}}} w^T)) = \sum_{\tilde{\mathfrak{D}} \in \tilde{\mathfrak{D}}_{\kappa^*}} \sum_{\varsigma \in \tilde{\mathfrak{D}} \cap \partial \kappa^*} \int_{\varsigma} (A(s) \cdot \nabla u(s) - A_{\tilde{\mathfrak{D}}} \cdot \nabla^{\tilde{\mathfrak{D}}} \mathfrak{P}_{m,g}^D \mathbb{P}_c^T u) \cdot \tilde{\mathbf{n}}_{\sigma^* \kappa^*} ds. \quad (\text{II.25})$$

3. Maintenant on considère $\kappa^* \in \partial \mathfrak{M}_F^*$, grâce à (II.13d) et (II.1), on a

$$\begin{cases} - \sum_{\mathfrak{D}_{\sigma, \sigma^*} \in \mathfrak{D}_{\kappa^*}} m_{\sigma^*} \mathcal{A}_{\mathfrak{D}}(\nabla^{\tilde{\mathfrak{D}}} u^T) \cdot \tilde{\mathbf{n}}_{\sigma^* \kappa^*} - \sum_{\mathfrak{D} \in \mathfrak{D}_{\kappa^*} \cap \mathfrak{D}_{\Gamma}} d_{\kappa^*, \mathcal{L}} \varphi_{\kappa^*, \mathcal{L}} = m_{\kappa^*} f_{\kappa^*}, \\ - \int_{\kappa^*} \operatorname{div}(A(x) \cdot \nabla u(x)) dx = m_{\kappa^*} f_{\kappa^*}. \end{cases}$$

Ainsi, il vient que

$$\begin{aligned} &- \sum_{\mathfrak{D}_{\sigma, \sigma^*} \in \mathfrak{D}_{\kappa^*}} m_{\sigma^*} \mathcal{A}_{\mathfrak{D}}(\nabla^{\tilde{\mathfrak{D}}} w^T) \cdot \tilde{\mathbf{n}}_{\sigma^* \kappa^*} - \sum_{\mathfrak{D} \in \mathfrak{D}_{\kappa^*} \cap \mathfrak{D}_{\Gamma}} d_{\kappa^*, \mathcal{L}} \left(\mathcal{A}_{\mathfrak{D}}(\nabla^{\tilde{\mathfrak{D}}} w^T) \cdot \tilde{\mathbf{n}}_{\sigma \kappa} - \varphi_{\kappa^*, \mathcal{L}} \right) \\ &= - \sum_{\mathfrak{D}_{\sigma, \sigma^*} \in \mathfrak{D}_{\kappa^*}} m_{\sigma^*} \mathcal{A}_{\mathfrak{D}}(\nabla^{\tilde{\mathfrak{D}}} v^T) \cdot \tilde{\mathbf{n}}_{\sigma^* \kappa^*} - \sum_{\mathfrak{D} \in \mathfrak{D}_{\kappa^*} \cap \mathfrak{D}_{\Gamma}} d_{\kappa^*, \mathcal{L}} \mathcal{A}_{\mathfrak{D}}(\nabla^{\tilde{\mathfrak{D}}} v^T) \cdot \tilde{\mathbf{n}}_{\sigma \kappa} + \int_{\kappa^*} \operatorname{div}(A(x) \cdot \nabla u(x)) dx. \end{aligned}$$

En utilisant (II.25) pour les mailles duales intérieures, on en déduit

$$\begin{aligned} &- \sum_{\mathfrak{D}_{\sigma, \sigma^*} \in \mathfrak{D}_{\kappa^*}} m_{\sigma^*} \mathcal{A}_{\mathfrak{D}}(\nabla^{\tilde{\mathfrak{D}}} w^T) \cdot \tilde{\mathbf{n}}_{\sigma^* \kappa^*} - \sum_{\mathfrak{D} \in \mathfrak{D}_{\kappa^*} \cap \mathfrak{D}_{\Gamma}} d_{\kappa^*, \mathcal{L}} \left(\mathcal{A}_{\mathfrak{D}}(\nabla^{\tilde{\mathfrak{D}}} w^T) \cdot \tilde{\mathbf{n}}_{\sigma \kappa} - \varphi_{\kappa^*, \mathcal{L}} \right) \\ &= \sum_{\tilde{\mathfrak{D}} \in \tilde{\mathfrak{D}}_{\kappa^*}} \sum_{\varsigma \in \tilde{\mathfrak{D}} \cap \partial \kappa^*} \int_{\varsigma} (A(s) \cdot \nabla u(s) - A_{\tilde{\mathfrak{D}}} \cdot \nabla^{\tilde{\mathfrak{D}}} \mathfrak{P}_{m,g}^D \mathbb{P}_c^T u) \cdot \tilde{\mathbf{n}}_{\sigma^* \kappa^*} ds \\ &\quad + \sum_{\mathfrak{D} \in \mathfrak{D}_{\kappa^*} \cap \mathfrak{D}_{\Gamma}} \int_{x_{\kappa^*}}^{x_{\mathcal{L}}} (A(s) \cdot \nabla u(s) - \mathcal{A}_{\mathfrak{D}}(\nabla^{\tilde{\mathfrak{D}}} v^T)) \cdot \tilde{\mathbf{n}}_{\sigma \kappa} ds. \end{aligned} \quad (\text{II.26})$$

4. Maintenant on considère $[x_{\kappa^*} x_{\mathcal{L}}] \in \partial \mathfrak{A}_F$, grâce à (II.13f) et (II.1), on a

$$\begin{cases} \varphi_{\kappa^*, \mathcal{L}} + \lambda \frac{u_{\kappa^*} + u_{\mathcal{L}}}{2} = h_{\kappa^*, \mathcal{L}}, \\ \frac{1}{d_{\kappa^*, \mathcal{L}}} \int_{x_{\kappa^*}}^{x_{\mathcal{L}}} (A(s) \cdot \nabla u(s)) \cdot \tilde{\mathbf{n}}_{\sigma \kappa} ds + \frac{\lambda}{d_{\kappa^*, \mathcal{L}}} \int_{x_{\kappa^*}}^{x_{\mathcal{L}}} u(s) ds = h_{\kappa^*, \mathcal{L}}. \end{cases}$$

Ainsi, on obtient

$$\begin{aligned} &\mathcal{A}_{\mathfrak{D}}(\nabla^{\tilde{\mathfrak{D}}} w^T) \cdot \tilde{\mathbf{n}}_{\sigma \kappa} - \varphi_{\kappa^*, \mathcal{L}} + \lambda \frac{w_{\kappa^*} + w_{\mathcal{L}}}{2} \\ &= \frac{1}{d_{\kappa^*, \mathcal{L}}} \int_{x_{\kappa^*}}^{x_{\mathcal{L}}} (A_{\mathfrak{D}} \cdot \nabla^{\mathfrak{D}} \mathfrak{P}_{m,g}^D \mathbb{P}_c^T u - A(s) \cdot \nabla u(s)) \cdot \tilde{\mathbf{n}}_{\sigma \kappa} ds + \lambda \left(\frac{v_{\kappa^*} + v_{\mathcal{L}}}{2} - \frac{1}{d_{\kappa^*, \mathcal{L}}} \int_{x_{\kappa^*}}^{x_{\mathcal{L}}} u(s) ds \right). \end{aligned} \quad (\text{II.27})$$

On définit l'erreur de consistance pour tout $\tilde{\mathfrak{D}} \in \tilde{\mathfrak{D}}$, $z \in \tilde{\mathfrak{D}}$, par la formule :

$$R_{\tilde{\mathfrak{D}}}(z) = A(z) \cdot \nabla u(z) - \mathcal{A}_{\tilde{\mathfrak{D}}}(\nabla^{\tilde{\mathfrak{D}}} \mathfrak{P}_{m,g}^D \mathbb{P}_c^T u),$$

et, on note :

$$\begin{aligned} R_{\sigma}^{\tilde{\mathfrak{D}}} &= \frac{1}{m_{\sigma}} \int_{\sigma} R_{\tilde{\mathfrak{D}}}(s) \cdot \tilde{\mathbf{n}}_{\sigma \tilde{\mathfrak{D}}} ds, & R_{\varsigma \kappa^*}^{\tilde{\mathfrak{D}}} &= \frac{1}{m_{\varsigma}} \int_{\varsigma} R_{\tilde{\mathfrak{D}}}(s) \cdot \tilde{\mathbf{n}}_{\varsigma \kappa^*} ds, & R_{\varsigma}^{\tilde{\mathfrak{D}}} &= |R_{\varsigma \kappa^*}^{\tilde{\mathfrak{D}}}|, \\ R_{\kappa^* \mathcal{L}}^{\mathfrak{D}} &= \frac{1}{d_{\kappa^*, \mathcal{L}}} \int_{x_{\kappa^*}}^{x_{\mathcal{L}}} R_{\mathfrak{D}}(s) \cdot \tilde{\mathbf{n}}_{\sigma \kappa} ds, & T_{\kappa^* \mathcal{L}}^{\mathfrak{D}} &= \lambda \left(\frac{v_{\kappa^*} + v_{\mathcal{L}}}{2} - \frac{1}{d_{\kappa^*, \mathcal{L}}} \int_{x_{\kappa^*}}^{x_{\mathcal{L}}} u(s) ds \right). \end{aligned}$$

Grâce aux relations (II.24)-(II.27), le couple (w^τ, ψ^τ) , qui représente l'erreur sur la solution et sur les flux à l'interface, est solution de :

$$\mathcal{L}_{\Omega, \Gamma}^\tau(w^\tau, \psi^\tau, R_f^\tau, 0, R_h^{\partial \mathfrak{A}_F}) = 0,$$

où $R_f^\tau = \left((R_f^\kappa)_{\kappa \in \mathfrak{M}}, (R_f^{\kappa^*})_{\kappa^* \in \mathfrak{M}^* \cup \partial \mathfrak{M}^*} \right)$ est défini comme suit

$$\begin{aligned} \forall \kappa \in \mathfrak{M}, R_f^\kappa &= \frac{1}{m_\kappa} \sum_{\tilde{\mathfrak{D}} \in \tilde{\mathfrak{D}}_\kappa} m_\sigma R_\sigma^{\tilde{\mathfrak{D}}}, \\ \forall \kappa^* \in \mathfrak{M}^*, R_f^{\kappa^*} &= \frac{1}{m_{\kappa^*}} \sum_{\tilde{\mathfrak{D}} \in \tilde{\mathfrak{D}}_{\kappa^*}} \sum_{\varsigma \in \tilde{\mathfrak{D}} \cap \partial \kappa^*} m_\varsigma R_{\varsigma \kappa^*}^{\tilde{\mathfrak{D}}}, \\ \forall \kappa^* \in \partial \mathfrak{M}^*, R_f^{\kappa^*} &= \frac{1}{m_{\kappa^*}} \sum_{\tilde{\mathfrak{D}} \in \tilde{\mathfrak{D}}_{\kappa^*}} \sum_{\varsigma \in \tilde{\mathfrak{D}} \cap \partial \kappa^*} m_\varsigma R_{\varsigma \kappa^*}^{\tilde{\mathfrak{D}}} - \frac{1}{m_{\kappa^*}} \sum_{\mathfrak{D} \in \mathfrak{D}_{\kappa^*} \cap \partial \mathfrak{D}_\Gamma} d_{\kappa^*, \mathcal{L}} R_{\kappa^* \mathcal{L}}^\mathfrak{D}, \end{aligned}$$

et $R_h^{\partial \mathfrak{A}_F} = (R_h^{\kappa^* \mathcal{L}})_{[x_{\kappa^*} x_\mathcal{L}] \in \partial \mathfrak{A}_F}$ est défini comme suit $\forall [x_{\kappa^*} x_\mathcal{L}] \in \partial \mathfrak{A}_F$,

$$R_h^{\kappa^* \mathcal{L}} = -R_{\kappa^* \mathcal{L}}^\mathfrak{D} + T_{\kappa^* \mathcal{L}}^\mathfrak{D}.$$

On veut appliquer la Proposition II.9, c'est pourquoi on doit estimer $[R_f^\tau, w^\tau]_\mathcal{T}$:

$$\begin{aligned} -[R_f^\tau, w^\tau]_\mathcal{T} &= \frac{1}{2} \sum_{\kappa \in \mathfrak{M}} w_\kappa \sum_{\tilde{\mathfrak{D}} \in \tilde{\mathfrak{D}}_\kappa} m_\sigma R_\sigma^{\tilde{\mathfrak{D}}} + \frac{1}{2} \sum_{\kappa^* \in \mathfrak{M}^* \cup \partial \mathfrak{M}^*} w_{\kappa^*} \sum_{\tilde{\mathfrak{D}} \in \tilde{\mathfrak{D}}_{\kappa^*}} \sum_{\varsigma \in \tilde{\mathfrak{D}} \cap \partial \kappa^*} m_\varsigma R_{\varsigma \kappa^*}^{\tilde{\mathfrak{D}}} \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{\kappa^* \in \partial \mathfrak{M}^*} w_{\kappa^*} \sum_{\mathfrak{D} \in \mathfrak{D}_{\kappa^*} \cap \partial \mathfrak{D}_\Gamma} d_{\kappa^*, \mathcal{L}} R_{\kappa^* \mathcal{L}}^\mathfrak{D}. \end{aligned}$$

On réorganise la somme sur les diamants, en utilisant le fait que $R_{\varsigma \kappa^*}^{\tilde{\mathfrak{D}}} = -R_{\varsigma \mathcal{L}^*}^{\tilde{\mathfrak{D}}}$ si κ^* et \mathcal{L}^* sont adjacents

$$-[R_f^\tau, w^\tau]_\mathcal{T} = \sum_{\tilde{\mathfrak{D}} \in \tilde{\mathfrak{D}}} \frac{m_\sigma}{2} R_\sigma^{\tilde{\mathfrak{D}}} w_\kappa + \sum_{\tilde{\mathfrak{D}} \in \tilde{\mathfrak{D}}} \sum_{\varsigma \in \tilde{\mathfrak{D}} \cap \partial \kappa^*} \frac{m_\varsigma}{2} R_{\varsigma \kappa^*}^{\tilde{\mathfrak{D}}} (w_{\kappa^*} - w_{\mathcal{L}^*}) + \sum_{[x_{\kappa^*} x_\mathcal{L}] \in \partial \mathfrak{A}_F} w_{\kappa^*} \frac{d_{\kappa^*, \mathcal{L}}}{2} R_{\kappa^* \mathcal{L}}^\mathfrak{D}.$$

On note $\tilde{\mathfrak{D}}_\Gamma = \{\tilde{\mathfrak{D}} \in \tilde{\mathfrak{D}} \text{ tel que } \tilde{\mathfrak{D}} \cap \Gamma \neq \emptyset\}$. De plus on a que

$$\sum_{\tilde{\mathfrak{D}} \in \tilde{\mathfrak{D}} \setminus \tilde{\mathfrak{D}}_\Gamma} \frac{m_\sigma}{2} R_\sigma^{\tilde{\mathfrak{D}}} w_\sigma = 0,$$

car pour $\sigma = \tilde{\mathfrak{D}}_1 | \tilde{\mathfrak{D}}_2$ on a $R_\sigma^{\tilde{\mathfrak{D}}_1} = -R_\sigma^{\tilde{\mathfrak{D}}_2}$ et $w_\sigma = 0$ pour tout $\tilde{\mathfrak{D}} \in \tilde{\mathfrak{D}}$ tel que $\tilde{\mathfrak{D}} \cap \Gamma_D \neq \emptyset$. Ainsi il vient que

$$\begin{aligned} -[R_f^\tau, w^\tau]_\mathcal{T} &= \sum_{\tilde{\mathfrak{D}} \in \tilde{\mathfrak{D}} \setminus \tilde{\mathfrak{D}}_\Gamma} \frac{m_\sigma}{2} R_\sigma^{\tilde{\mathfrak{D}}} (w_\kappa - w_\sigma) + \sum_{\tilde{\mathfrak{D}} \in \tilde{\mathfrak{D}}} \sum_{\varsigma \in \tilde{\mathfrak{D}} \cap \partial \kappa^*} \frac{m_\varsigma}{2} R_{\varsigma \kappa^*}^{\tilde{\mathfrak{D}}} (w_{\kappa^*} - w_{\mathcal{L}^*}) \\ &\quad + \sum_{[x_{\kappa^*} x_\mathcal{L}] \in \partial \mathfrak{A}_F} w_{\kappa^*} \frac{d_{\kappa^*, \mathcal{L}}}{2} R_{\kappa^* \mathcal{L}}^\mathfrak{D} + \sum_{\tilde{\mathfrak{D}} \in \tilde{\mathfrak{D}}_\Gamma} \frac{m_\sigma}{2} R_\sigma^{\tilde{\mathfrak{D}}} w_\kappa. \end{aligned}$$

On remarque que

$$m_\sigma R_\sigma^{\tilde{\mathfrak{D}}} (w_\kappa - w_\sigma) = -\frac{2}{\sin(\alpha_\mathfrak{D})} m_{\tilde{\mathfrak{D}}} \nabla^{\tilde{\mathfrak{D}}} w^\tau \cdot \vec{\tau}_{\kappa, \mathcal{L}} R_\sigma^{\tilde{\mathfrak{D}}},$$

et que

$$m_\varsigma R_{\varsigma \kappa^*}^{\tilde{\mathfrak{D}}} (w_{\kappa^*} - w_{\mathcal{L}^*}) = -\frac{2}{\sin(\alpha_\mathfrak{D})} m_{\tilde{\mathfrak{D}}} \nabla^{\tilde{\mathfrak{D}}} w^\tau \cdot \vec{\tau}_{\kappa^*, \mathcal{L}^*} R_{\varsigma \kappa^*}^{\tilde{\mathfrak{D}}},$$

d'où

$$\begin{aligned} -[R_f^\tau, w^\tau]_\mathcal{T} &= - \sum_{\tilde{\mathfrak{D}} \in \tilde{\mathfrak{D}} \setminus \tilde{\mathfrak{D}}_\Gamma} \frac{1}{\sin(\alpha_\mathfrak{D})} m_{\tilde{\mathfrak{D}}} \nabla^{\tilde{\mathfrak{D}}} w^\tau \cdot \vec{\tau}_{\kappa, \mathcal{L}} R_\sigma^{\tilde{\mathfrak{D}}} - \sum_{\tilde{\mathfrak{D}} \in \tilde{\mathfrak{D}}} \sum_{\varsigma \in \tilde{\mathfrak{D}} \cap \partial \kappa^*} \frac{1}{\sin(\alpha_\mathfrak{D})} \nabla^{\tilde{\mathfrak{D}}} w^\tau \cdot \vec{\tau}_{\kappa^*, \mathcal{L}^*} m_{\tilde{\mathfrak{D}}} R_{\varsigma \kappa^*}^{\tilde{\mathfrak{D}}} \\ &\quad + \sum_{[x_{\kappa^*} x_\mathcal{L}] \in \partial \mathfrak{A}_F} w_{\kappa^*} \frac{d_{\kappa^*, \mathcal{L}}}{2} R_{\kappa^* \mathcal{L}}^\mathfrak{D} + \sum_{\tilde{\mathfrak{D}} \in \tilde{\mathfrak{D}}_\Gamma} \frac{m_\sigma}{2} R_\sigma^{\tilde{\mathfrak{D}}} w_\kappa. \end{aligned}$$

L'inégalité de Cauchy-Schwarz donne

$$|[R_f^\tau, w^\tau]| \leq \frac{1}{\sin(\alpha_\tau)} \left(\sum_{\tilde{b} \in \tilde{\mathfrak{D}}} m_{\tilde{b}} |R_\sigma^{\tilde{b}}|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \|\nabla^{\tilde{\mathfrak{D}}} w^\tau\|_2 + \frac{2}{\sin(\alpha_\tau)} \left(\sum_{\tilde{b} \in \tilde{\mathfrak{D}}} m_{\tilde{b}} |R_\zeta^{\tilde{b}}|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \|\nabla^{\tilde{\mathfrak{D}}} w^\tau\|_2$$

$$+ \frac{1}{2} \|w^\tau\|_{\partial \mathfrak{A}_F} \left(\sum_{[x_{\mathcal{K}^*}, x_{\mathcal{L}}] \in \partial \mathfrak{A}_F} d_{\mathcal{K}^*, \mathcal{L}} |R_{\mathcal{K}^* \mathcal{L}}^\mathcal{D}|^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} \|w^\tau\|_{\mathfrak{D}_\Gamma} \left(\sum_{\tilde{b} \in \tilde{\mathfrak{D}}_\Gamma} m_\sigma |R_\sigma^{\tilde{b}}|^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (\text{II.28})$$

où $\|w^\tau\|_{\partial \mathfrak{A}_F}^2 = \sum_{[x_{\mathcal{K}^*}, x_{\mathcal{L}}] \in \partial \mathfrak{A}_F} d_{\mathcal{K}^*, \mathcal{L}} |w_{\mathcal{K}^*}|^2$ et $\|w^\tau\|_{\mathfrak{D}_\Gamma}^2 = \sum_{\tilde{b} \in \tilde{\mathfrak{D}}_\Gamma} m_\sigma |w_{\mathcal{K}}|^2$. La Proposition II.9 implique :

$$\|\nabla^{\tilde{\mathfrak{D}}} w^\tau\|_2^2 \leq C \left(|[R_f^\tau, w^\tau]_\tau| + \sum_{\mathcal{D} \in \mathfrak{D}_\Gamma} m_\sigma (\gamma_\sigma(R_h^{\partial \mathfrak{A}_F}))^2 + \sum_{\mathcal{D} \in \mathfrak{D}_\Gamma} M_\sigma (R_h^{\mathcal{L}^* \mathcal{L}} - R_h^{\mathcal{K}^* \mathcal{L}})^2 \right). \quad (\text{II.29})$$

Grâce aux inégalités (II.28) et (II.29), il vient que

$$\|\nabla^{\tilde{\mathfrak{D}}} w^\tau\|_2^2 \leq C \left(\sum_{\tilde{b} \in \tilde{\mathfrak{D}}} m_{\tilde{b}} |R_\sigma^{\tilde{b}}|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \|\nabla^{\tilde{\mathfrak{D}}} w^\tau\|_2 + C \left(\sum_{\tilde{b} \in \tilde{\mathfrak{D}}} m_{\tilde{b}} |R_\zeta^{\tilde{b}}|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \|\nabla^{\tilde{\mathfrak{D}}} w^\tau\|_2$$

$$+ C \sum_{\mathcal{D} \in \mathfrak{D}_\Gamma} m_\sigma (\gamma_\sigma(R_h^{\partial \mathfrak{A}_F}))^2 + C \sum_{\mathcal{D} \in \mathfrak{D}_\Gamma} M_\sigma (R_h^{\mathcal{L}^* \mathcal{L}} - R_h^{\mathcal{K}^* \mathcal{L}})^2 \quad (\text{II.30})$$

$$+ C \|w^\tau\|_{\partial \mathfrak{A}_F} \left(\sum_{[x_{\mathcal{K}^*}, x_{\mathcal{L}}] \in \partial \mathfrak{A}_F} d_{\mathcal{K}^*, \mathcal{L}} |R_{\mathcal{K}^* \mathcal{L}}^\mathcal{D}|^2 \right)^{\frac{1}{2}} + C \|w^\tau\|_{\mathfrak{D}_\Gamma} \left(\sum_{\tilde{b} \in \tilde{\mathfrak{D}}_\Gamma} m_\sigma |R_\sigma^{\tilde{b}}|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Il reste à montrer des estimations sur les erreurs de consistance et un théorème de trace pour traiter les termes de bord.

II.6 Théorème de trace

On introduit tout d'abord une nouvelle inégalité de Poincaré discrète. En effet, on n'a pas besoin que u^τ appartienne à \mathbb{E}_0 mais uniquement à \mathbb{E}_0^P .

Théorème II.13

Il existe une constante $C > 0$ telle que $\forall u^\tau \in \mathbb{E}_0^P$:

$$\|u^\tau\|_2 \leq C \text{diam}(\Omega) \|\nabla^{\mathfrak{D}} u^\tau\|_2.$$

Remarque II.14

On ne refait pas la démonstration du Théorème II.13, qui est inspirée de celle faite dans [AGW04, Lemme 2.6], [ABH07, Lemme 3.2] et aussi [EGH00, Lemme 3.1]. Dans [AGW04, Lemme 2.6], si u^τ est nul sur tout le bord du domaine, la démonstration consiste à écrire $|u_{\mathcal{K}}|^2 = |u_{\mathcal{K}}|^2 - |u_{\mathcal{L}}|^2 + |u_{\mathcal{L}}|^2 + \dots + |0|^2$, on remonte de voisin en voisin pour arriver au bord. Pour cela il faut introduire une fonction qui permet de déterminer les voisins successifs d'un élément $u_{\mathcal{K}}$ dans une certaine direction arbitraire. Ainsi si le domaine Ω est convexe, il suffit de choisir correctement la direction afin d'atteindre le bord Dirichlet Γ_D et non le bord de Fourier. En effet, on peut trouver un nombre fini de directions ξ tel que les sous-domaines $\Omega_\xi = (\Gamma_D + \xi\mathbb{R}) \cap \Omega$ recouvrent le domaine Ω .

La démonstration du théorème de trace est inspirée de celle faite dans [EGH00, Lemme 3.10] pour le schéma volumes finis à deux points.

Théorème II.15

Il existe une constante $C > 0$, dépendant uniquement du domaine Ω et de $\text{reg}(\mathcal{T})$, telle que $\forall u^\tau \in \mathbb{E}_0^P$:

$$\|u^\tau\|_{\partial \mathfrak{A}_F}^2 \leq C \|\nabla^{\mathfrak{D}} u^\tau\|_2^2. \quad (\text{II.31})$$

Démonstration : On note $\overline{\gamma}(u^\tau)$ la fonction définie sur le bord du domaine Γ telle que $\overline{\gamma}(u^\tau)(x) = u_{\kappa^*}$, si $x \in \kappa^*$ pour tout $\kappa^* \in \partial\mathfrak{M}^*$. Ainsi on a

$$\|u^\tau\|_{\partial\mathfrak{A}_F}^2 = \|\overline{\gamma}(u^\tau)\|_{L^2(\Gamma)}^2 := \int_{\Gamma} |\overline{\gamma}(u^\tau)(x)|^2 dx.$$

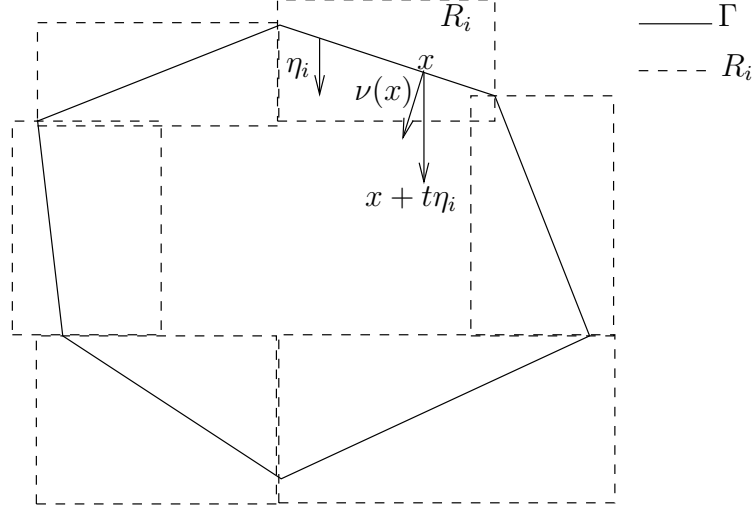


FIG. II.3 – Résumé des propriétés de la frontière Γ .

Propriété de la frontière : Par compacité du bord Γ , il existe un nombre fini d'ouverts rectangulaires, $\{R_i, i = 1 \cdots N\}$, et des vecteurs unitaires de \mathbb{R}^2 , $\{\eta_i, i = 1 \cdots N\}$, tels que

$$\begin{cases} \Gamma \subset \cup_{i=1}^N R_i, \\ (\eta_i, \vec{\nu}(x)) \geq \alpha > 0 \text{ pour tout } x \in R_i \cap \Gamma, i \in \{1 \cdots N\}, \\ \{x + t\eta_i, x \in R_i \cap \Gamma, t \in \mathbb{R}_+\} \cap R_i \subset \Omega, \end{cases}$$

où α est un nombre strictement positif et $\vec{\nu}(x)$ représente le vecteur unitaire normal à Γ en x , orienté vers l'intérieur de Ω (voir la Figure II.3). Soit $\{\alpha_i, i = 1 \cdots N\}$ une famille de fonctions telle que $\sum_{i=1}^N \alpha_i(x) = 1$, pour tout $x \in \Gamma$, $\alpha_i \in C_c^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}_+)$ et $\alpha_i = 0$ en dehors de R_i , pour tout $i = 1 \cdots N$. On pose $\Gamma_i = R_i \cap \Gamma$; on va montrer qu'il existe $C_i > 0$ dépendant uniquement de α , de $\text{reg}(\mathcal{T})$ et de α_i tel que

$$\int_{\Gamma_i} \alpha_i(x) |\overline{\gamma}(u^\tau)(x)|^2 dx \leq C_i \|\nabla^\mathfrak{D} u^\tau\|_2.$$

Enfin, il suffira de poser $C = \sum_{i=1}^N C_i$, qui dépend uniquement de Ω et de $\text{reg}(\mathcal{T})$, pour que (II.31) soit vérifiée.

Notations : On introduit les fonctions de [EGH00] qui permettent de déterminer les voisins successifs d'un élément u_{κ^*} : pour $x, y \in \Omega$ et $\sigma^* \in \mathcal{E}^*$, on pose

$$\psi_{\sigma^*}(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } [x, y] \cap \sigma^* \neq \emptyset, \\ 0 & \text{si } [x, y] \cap \sigma^* = \emptyset, \end{cases}$$

et pour $\kappa^* \in \mathfrak{M}^* \cup \partial\mathfrak{M}^*$, on pose

$$\psi_{\kappa^*}(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } [x, y] \cap \kappa^* \neq \emptyset, \\ 0 & \text{si } [x, y] \cap \kappa^* = \emptyset. \end{cases}$$

Soit $i \in \{1, \cdots, N\}$ et $x \in \Gamma_i$. Il existe un unique $t > 0$ tel que $x + t\eta_i \in \partial R_i$, on pose $y(x) = x + t\eta_i$. Pour $\sigma^* \in \mathcal{E}^*$, dans le cas où $[x, y(x)] \cap \sigma^* \neq \emptyset$, soit cette intersection est réduite à un point on pose alors $z_{\sigma^*}(x) = [x, y(x)] \cap \sigma^*$, soit cette intersection est un segment $[x, y(x)] \cap \sigma^* = [a(x), b(x)]$ avec la notation $(\overrightarrow{a(x)b(x)}, \eta_i) > 0$ on pose alors $z_{\sigma^*}(x) = b(x)$. Pour $\kappa^* \in \mathfrak{M}^* \cup \partial\mathfrak{M}^*$, on pose $\xi_{\kappa^*}(x), \eta_{\kappa^*}(x)$ tels que $[x, y(x)] \cap \kappa^* = [\xi_{\kappa^*}(x), \eta_{\kappa^*}(x)]$,

si $[x, y(x)] \cap \kappa^* \neq \emptyset$ et tels que $\overrightarrow{(\xi_{\kappa^*}(x)\eta_{\kappa^*}(x), \eta_i)} > 0$. Ainsi si $\sigma^* = \kappa^*|_{\mathcal{L}^*}$ dans le cas où $[x, y(x)] \cap \sigma^*$ est réduite à un point, alors on a $\eta_{\kappa^*}(x) = z_{\sigma^*}(x) = \xi_{\mathcal{L}^*}(x)$, dans le cas où $[x, y(x)] \cap \sigma^*$ est un segment, alors on a $\eta_{\kappa^*}(x) = z_{\sigma^*}(x) = \eta_{\mathcal{L}^*}(x)$.

Première majoration : Par exemple, on suppose $x \in \kappa_0^*$ et $y(x) \in \mathcal{L}_0^*$ tel que $\kappa_0^*, \mathcal{L}_0^*$ soient deux voisins, on pose $\sigma_0^* = \kappa_0^*|_{\mathcal{L}_0^*}$. Deux cas se présentent (voir la Figure II.4) soit $[x, y(x)] \cap \sigma_0^*$ est réduit à un point $z_{\sigma_0^*}(x)$, soit $[x, y(x)] \cap \sigma_0^*$ vaut le segment $[x, y(x)]$.

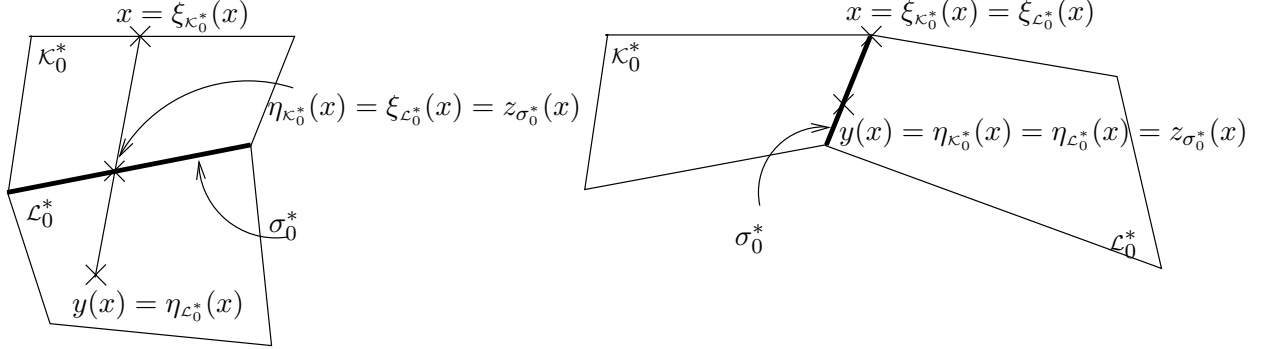


FIG. II.4 – (A gauche) $[x, y(x)] \cap \sigma_0^*$ est réduit à un point $z_{\sigma_0^*}(x)$. (A droite) $[x, y(x)] \cap \sigma_0^*$ vaut le segment $[x, y(x)]$.

Dans les deux cas, on a alors $x = \xi_{\kappa_0^*}(x)$ et $y(x) = \eta_{\mathcal{L}_0^*}(x)$ et ainsi $\eta_{\mathcal{L}_0^*}(x) \in \partial R_i$, on en déduit $\alpha_i(\eta_{\mathcal{L}_0^*}(x)) = 0$. Pour le premier cas, on a $\eta_{\kappa_0^*}(x) = z_{\sigma_0^*}(x)$ et $\xi_{\mathcal{L}_0^*}(x) = z_{\sigma_0^*}(x)$, on obtient alors

$$\alpha_i(x)|u_{\kappa_0^*}|^2 = (\alpha_i(\xi_{\kappa_0^*}(x)) - \alpha_i(\eta_{\kappa_0^*}(x)))|u_{\kappa_0^*}|^2 + (\alpha_i(\xi_{\mathcal{L}_0^*}(x)) - \alpha_i(\eta_{\mathcal{L}_0^*}(x)))|u_{\mathcal{L}_0^*}|^2 + \alpha_i(z_{\kappa_0^*|\mathcal{L}_0^*}(x))(|u_{\kappa_0^*}|^2 - |u_{\mathcal{L}_0^*}|^2).$$

Pour le deuxième cas, on a $\eta_{\kappa_0^*}(x) = y(x)$, ainsi $\alpha_i(\eta_{\kappa_0^*}(x)) = 0$, on obtient alors

$$\alpha_i(x)|u_{\kappa_0^*}|^2 = (\alpha_i(\xi_{\kappa_0^*}(x)) - \alpha_i(\eta_{\kappa_0^*}(x)))|u_{\kappa_0^*}|^2.$$

Dans les deux cas, on peut alors majorer de la manière suivante

$$\begin{aligned} \alpha_i(x)|u_{\kappa_0^*}|^2 &\leq \sum_{\mathcal{D} \in \mathfrak{D}} \psi_{\sigma^*}(x, y(x)) \alpha_i(z_{\sigma^*}(x)) ||u_{\kappa^*}|^2 - |u_{\mathcal{L}^*}|^2| \\ &\quad + \sum_{\kappa^* \in \mathfrak{M}^* \cup \partial \mathfrak{M}^*} |\alpha_i(\xi_{\kappa^*}(x)) - \alpha_i(\eta_{\kappa^*}(x))| |u_{\kappa^*}|^2 \psi_{\kappa^*}(x, y(x)). \end{aligned}$$

On pose

$$A(x) = \sum_{\mathcal{D} \in \mathfrak{D}} \psi_{\sigma^*}(x, y(x)) \alpha_i(z_{\sigma^*}(x)) ||u_{\kappa^*}|^2 - |u_{\mathcal{L}^*}|^2|,$$

et

$$B(x) = \sum_{\kappa^* \in \mathfrak{M}^* \cup \partial \mathfrak{M}^*} |\alpha_i(\xi_{\kappa^*}(x)) - \alpha_i(\eta_{\kappa^*}(x))| |u_{\kappa^*}|^2 \psi_{\kappa^*}(x, y(x)),$$

il vient que

$$\alpha_i(x)|u_{\kappa_0^*}|^2 \leq A(x) + B(x).$$

On s'intéresse d'abord à A : En utilisant le fait que la fonction α_i est bornée, on a

$$A(x) \leq \|\alpha_i\|_{\infty} \sum_{\mathcal{D} \in \mathfrak{D}} \psi_{\sigma^*}(x, y(x)) ||u_{\kappa^*}|^2 - |u_{\mathcal{L}^*}|^2|.$$

On remarque l'inégalité suivante est vérifiée

$$\int_{\Gamma_i} \psi_{\sigma^*}(x, y(x)) dx \leq m_{\sigma^*} \frac{1}{\alpha}.$$

En effet, on pose $m_{\Gamma_i} = \int_{\Gamma_i} \psi_{\sigma^*}(x, y(x)) dx$, cette longueur est représentée sur la Figure II.5. Pour calculer m_{Γ_i} ,

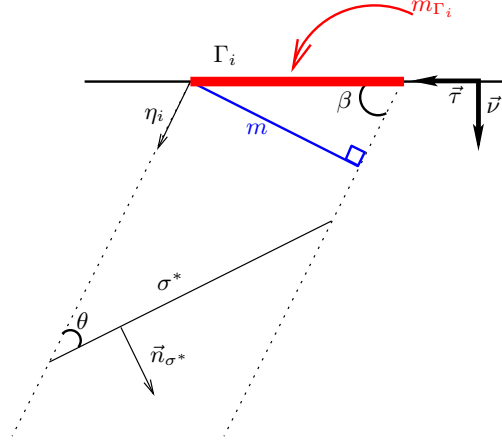


FIG. II.5 – Illustration pour le calcul de l'intégrale.

on l'exprime en fonction de m et de β (voir la Figure II.5),

$$m_{\Gamma_i} = \frac{m}{\sin(\beta)},$$

et $\sin(\beta) = (\eta_i, \vec{\nu}(x))$. Maintenant on relie m et m_{σ^*} avec θ (voir la Figure II.5),

$$m = \sin(\theta) m_{\sigma^*},$$

et $\sin(\theta) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = (\eta_i, \vec{n}_{\sigma^*})$. Ceci implique

$$\int_{\Gamma_i} \psi_{\sigma^*}(x, y(x)) dx = \frac{(\eta_i, \vec{n}_{\sigma^*})}{(\eta_i, \vec{\nu}(x))} m_{\sigma^*} \leq m_{\sigma^*} \frac{1}{\alpha},$$

car $(\eta_i, \vec{\nu}(x)) \geq \alpha > 0$. Ainsi on a

$$A = \int_{\Gamma_i} A(x) dx \leq \|\alpha_i\|_{\infty} \sum_{\mathcal{D} \in \mathfrak{D}} \left(\int_{\Gamma_i} \psi_{\sigma^*}(x, y(x)) dx \right) \|u_{\kappa^*}|^2 - |u_{\mathcal{L}^*}^2|\| \leq C \sum_{\mathcal{D} \in \mathfrak{D}} m_{\sigma^*} \|u_{\kappa^*}|^2 - |u_{\mathcal{L}^*}^2|\|.$$

Le Lemme I.19 implique

$$A \leq C \|\nabla^{\mathfrak{D}} u^{\tau}\|_2 \|u^{\tau}\|_2.$$

D'après l'inégalité de Poincaré discrète Théorème II.13, on a

$$A \leq C_i \|\nabla^{\mathfrak{D}} u^{\tau}\|_2^2.$$

On s'intéresse à B : En utilisant le fait que la fonction α_i est C^{∞} , on a

$$B(x) \leq \|\nabla \alpha_i\|_{\infty} \sum_{\kappa^* \in \mathfrak{M}^* \cup \partial \mathfrak{M}^*} |\xi_{\kappa^*}(x) - \eta_{\kappa^*}(x)| |u_{\kappa^*}|^2 \psi_{\kappa^*}(x, y(x)).$$

On remarque l'inégalité suivante :

$$\int_{\Gamma_i} \psi_{\kappa^*}(x, y(x)) |\xi_{\kappa^*}(x) - \eta_{\kappa^*}(x)| dx \leq C m_{\kappa^*}.$$

En effet, on a tout d'abord

$$|\xi_{\kappa^*}(x) - \eta_{\kappa^*}(x)| \leq d_{\kappa^*}.$$

Ensuite il reste à calculer $m_{\Gamma_i} = \int_{\Gamma_i} \psi_{\kappa^*}(x, y(x)) dx$, ceci correspond à la Figure II.5 en remplaçant σ^* par le diamètre de κ^* . Ainsi on peut refaire exactement le même calcul, et on obtient

$$m_{\Gamma_i} \leq \frac{d_{\kappa^*}}{\alpha}.$$

Ceci implique,

$$\int_{\Gamma_i} \psi_{\kappa^*}(x, y(x)) |\xi_{\kappa^*}(x) - \eta_{\kappa^*}(x)| dx \leq \frac{d_{\kappa^*}^2}{\alpha}.$$

Or $d_{\kappa^*}^2 \leq \text{reg}(\mathcal{T})m_{\kappa^*}$. D'où

$$\int_{\Gamma_i} \psi_{\kappa^*}(x, y(x)) |\xi_{\kappa^*}(x) - \eta_{\kappa^*}(x)| dx \leq C m_{\kappa^*}.$$

Ainsi on a

$$B = \int_{\Gamma_i} B(x) dx \leq \|\nabla \alpha_i\|_{\infty} \sum_{\kappa^* \in \mathfrak{M}^* \cup \partial \mathfrak{M}^*} \left(\int_{\Gamma_i} \psi_{\kappa^*}(x, y(x)) |\xi_{\kappa^*}(x) - \eta_{\kappa^*}(x)| dx \right) |u_{\kappa^*}|^2 \leq C \sum_{\kappa^* \in \mathfrak{M}^* \cup \partial \mathfrak{M}^*} m_{\kappa^*} |u_{\kappa^*}|^2.$$

D'après l'inégalité de Poincaré discrète Théorème II.13, on a

$$B \leq C_i \|\nabla^{\mathcal{D}} u^{\tau}\|_2^2.$$

En conclusion : on a

$$\int_{\Gamma_i} \alpha_i(x) |\overline{\gamma}(u^{\tau})(x)|^2 dx \leq A + B \leq C_i \|\nabla^{\mathcal{D}} u^{\tau}\|_2^2.$$

■

On obtient également le résultat suivant en faisant la même démonstration que précédemment en remplaçant κ^* par κ et σ^* par σ .

Théorème II.16

Il existe une constante $C > 0$, dépendant uniquement du domaine Ω et de $\text{reg}(\mathcal{T})$, telle que $\forall u^{\tau} \in \mathbb{E}_0^{\mathcal{D}}$:

$$\|w^{\tau}\|_{\mathfrak{D}_{\Gamma}}^2 \leq C \|\nabla^{\mathcal{D}} u^{\tau}\|_2^2.$$

II.7 Erreur de consistance

On a défini l'erreur de consistance pour tout $\tilde{\mathcal{D}} \in \tilde{\mathfrak{D}}$, $z \in \tilde{\mathcal{D}}$ de la manière suivante :

$$R_{\tilde{\mathcal{D}}}(z) = A(z) \cdot \nabla u(z) - \mathcal{A}_{\tilde{\mathcal{D}}}(\nabla^{\tilde{\mathcal{D}}} \mathfrak{P}_{m,g}^{\mathcal{D}} \mathbb{P}_c^{\tau} u).$$

On rappelle que dans le cas où $A_{\mathcal{Q}_{\kappa}, \kappa^*} = A_{\mathcal{Q}_{\kappa}, \mathcal{L}^*}$ et $A_{\mathcal{Q}_{\mathcal{L}}, \kappa^*} = A_{\mathcal{Q}_{\mathcal{L}}, \mathcal{L}^*}$, on a (II.7)

$$\nabla_{\mathcal{Q}_{\kappa}, \kappa^*}^{\mathcal{N}} u^{\tau} = \nabla_{\mathcal{Q}_{\kappa}, \mathcal{L}^*}^{\mathcal{N}} u^{\tau} = \nabla^{\tilde{\mathcal{D}}} \kappa u^{\tau} \quad \text{et} \quad \nabla_{\mathcal{Q}_{\mathcal{L}}, \kappa^*}^{\mathcal{N}} u^{\tau} = \nabla_{\mathcal{Q}_{\mathcal{L}}, \mathcal{L}^*}^{\mathcal{N}} u^{\tau} = \nabla^{\tilde{\mathcal{D}}} \mathcal{L} u^{\tau}.$$

Ceci implique que l'estimation de notre erreur de consistance s'obtient comme un cas particulier de l'estimation introduite dans [BH08]. On ne redémontre pas cette estimation qui utilise les Lemmes II.10 et II.11.

Lemme II.17

Il existe une constante $C > 0$, dépendant uniquement de A , de Ω et $\text{reg}(\mathcal{T})$, telle que la solution u du problème (II.1) appartenant à $H^2(\tilde{\mathfrak{D}})$ vérifie

$$\sum_{\tilde{\mathcal{D}} \in \tilde{\mathfrak{D}}} m_{\tilde{\mathcal{D}}} |R_{\sigma}^{\tilde{\mathcal{D}}}|^2 \leq C \text{size}(\mathcal{T})^2 \|u\|_{H^2(\tilde{\mathfrak{D}})} \quad \text{et} \quad \sum_{\tilde{\mathcal{D}} \in \tilde{\mathfrak{D}}} m_{\tilde{\mathcal{D}}} |R_{\zeta}^{\tilde{\mathcal{D}}}|^2 \leq C \text{size}(\mathcal{T})^2 \|u\|_{H^2(\tilde{\mathfrak{D}})}.$$

On va se concentrer uniquement sur l'estimation de l'erreur de consistance sur le bord Fourier, c'est-à-dire sur les quatre termes suivants :

$$\sum_{\mathcal{D} \in \mathfrak{D}_{\Gamma}} m_{\sigma} (\gamma_{\sigma}(R_h^{\partial \mathfrak{A}_F}))^2, \quad \sum_{\mathcal{D} \in \mathfrak{D}_{\Gamma}} M_{\sigma}(R_h^{\mathcal{L}^* \mathcal{L}} - R_h^{\kappa^* \mathcal{L}})^2, \quad \sum_{[x_{\kappa^*} x_{\mathcal{L}}] \in \partial \mathfrak{A}_F} d_{\kappa^*, \mathcal{L}} |R_{\kappa^* \mathcal{L}}^{\mathcal{D}}|^2 \quad \text{et} \quad \sum_{\tilde{\mathcal{D}} \in \tilde{\mathfrak{D}}_{\Gamma}} m_{\sigma} |R_{\sigma}^{\tilde{\mathcal{D}}}|^2.$$

On rappelle que $R_h^{\partial \mathfrak{A}_F} = (R_h^{\kappa^* \mathcal{L}})_{[x_{\kappa^*} x_{\mathcal{L}}] \in \partial \mathfrak{A}_F}$ où

$$R_h^{\kappa^* \mathcal{L}} = -R_{\kappa^* \mathcal{L}}^{\mathcal{D}} + T_{\kappa^* \mathcal{L}}^{\mathcal{D}}, \quad \forall [x_{\kappa^*} x_{\mathcal{L}}] \in \partial \mathfrak{A}_F,$$

avec

$$R_{\kappa^* \mathcal{L}}^{\mathcal{D}} = \frac{1}{d_{\kappa^*, \mathcal{L}}} \int_{x_{\kappa^*}}^{x_{\mathcal{L}}} R_{\mathcal{D}}(s) \cdot \vec{n}_{\sigma \kappa} ds \quad \text{et} \quad T_{\kappa^* \mathcal{L}}^{\mathcal{D}} = \lambda \left(\frac{v_{\kappa^*} + v_{\mathcal{L}}}{2} - \frac{1}{d_{\kappa^*, \mathcal{L}}} \int_{x_{\kappa^*}}^{x_{\mathcal{L}}} u(s) ds \right),$$

et

$$R_{\sigma}^{\tilde{\mathcal{D}}} = \frac{1}{m_{\sigma}} \int_{\sigma} R_{\tilde{\mathcal{D}}}(s) \cdot \vec{n}_{\sigma \tilde{\mathcal{D}}} ds.$$

Ainsi on travaille avec $\mathcal{D} \in \mathfrak{D}_{\Gamma}$ et les flux $\mathcal{A}_{\mathcal{D}}(\nabla^{\tilde{\mathcal{D}}} \mathbb{P}_c^{\tau} u)$ valent $A^{\mathcal{D}} \cdot \nabla^{\mathcal{D}} \mathbb{P}_c^{\tau} u$ car A est régulière sur les diamants \mathcal{D} du bord. On décompose l'erreur de consistance de la manière suivante $R_{\mathcal{D}}(z) = R_{\mathcal{D}}^A(z) + R_{\mathcal{D}}^{grad} + R_{\mathcal{D}}^z$, où l'erreur de consistance due à l'approximation de $A \cdot \nabla u$ sur chaque diamant vaut

$$R_{\mathcal{D}}^A(z) = A(z) \cdot \nabla u(z) - \frac{1}{m_{\mathcal{D}}} \int_{\mathcal{D}} A(x) \cdot \nabla u(x) dx,$$

l'erreur de consistance due à l'estimation du gradient vaut

$$R_{\mathcal{D}}^{grad} = \frac{1}{m_{\mathcal{D}}} \int_{\mathcal{D}} A(x) \cdot (\nabla u(x) - \nabla^{\mathcal{D}} \mathbb{P}_c^{\tau} u) dx,$$

l'erreur de consistance due à l'approximation de A sur chaque diamant vaut

$$R_{\mathcal{D}}^z = \left(\frac{1}{m_{\mathcal{D}}} \int_{\mathcal{D}} A(x) dx - A^{\mathcal{D}} \right) \cdot \nabla^{\mathcal{D}} \mathbb{P}_c^{\tau} u.$$

Remarque II.18

Si on choisit $A^{\mathcal{D}} = \frac{1}{m_{\mathcal{D}}} \int_{\mathcal{D}} A(x) dx$, alors $R_{\mathcal{D}}^z = 0$.

Lemme II.19

Il existe une constante $C > 0$, dépendant uniquement de A , Ω et $\text{reg}(\mathcal{T})$, telle que, pour tout $u \in W^{2,\infty}(\tilde{\mathfrak{D}})$,

$$\sum_{[x_{\kappa^*} x_{\mathcal{L}}] \in \partial \mathfrak{A}_F} d_{\kappa^*, \mathcal{L}} |R_{\kappa^* \mathcal{L}}^{\mathcal{D}}|^2 \leq C \text{size}(\mathcal{T})^2 \|u\|_{W^{2,\infty}(\tilde{\mathfrak{D}})}^2.$$

Démonstration : On rappelle que A est supposée régulière sur les diamants \mathcal{D} appartenant à \mathfrak{D}_{Γ} . D'après l'inégalité de Jensen, on peut majorer de la manière suivante

$$\sum_{[x_{\kappa^*} x_{\mathcal{L}}] \in \partial \mathfrak{A}_F} d_{\kappa^*, \mathcal{L}} |R_{\kappa^* \mathcal{L}}^{\mathcal{D}}|^2 \leq \sum_{[x_{\kappa^*} x_{\mathcal{L}}] \in \partial \mathfrak{A}_F} \int_{x_{\kappa^*}}^{x_{\mathcal{L}}} |R_{\mathcal{D}}(s)|^2 ds.$$

De plus $R_{\mathcal{D}}(s) = R_{\mathcal{D}}^A(s) + R_{\mathcal{D}}^{grad} + R_{\mathcal{D}}^z$.

Etape 1 - On s'intéresse d'abord à $R_{\mathcal{D}}^{grad}$. D'après l'hypothèse (\mathcal{H}_2) faite sur A , on a pour $x \in \mathcal{D}$,

$$|A(x) \cdot (\nabla u(x) - \nabla^{\mathcal{D}} \mathbb{P}_c^{\tau} u)| \leq C_A |\nabla u(x) - \nabla^{\mathcal{D}} \mathbb{P}_c^{\tau} u|,$$

et l'inégalité de Jensen implique

$$|R_{\mathcal{D}}^{grad}|^2 \leq \frac{C_A^2}{m_{\mathcal{D}}} \int_{\mathcal{D}} |\nabla u(x) - \nabla^{\mathcal{D}} \mathbb{P}_c^{\tau} u|^2 dx.$$

Grâce au Lemme I.13, on déduit

$$|R_{\mathcal{D}}^{grad}|^2 \leq C \int_{\tilde{\mathcal{D}}} |\nabla^2 u(s)|^2 ds.$$

De plus comme $\mathcal{D} \in \mathfrak{D}_{\Gamma}$, \mathcal{D} est un diamant du bord donc il est convexe car c'est un triangle, on en déduit que

$$\sum_{[x_{\kappa^*} x_{\mathcal{L}}] \in \partial \mathfrak{A}_F} d_{\kappa^*, \mathcal{L}} |R_{\mathcal{D}}^{grad}|^2 \leq C \text{size}(\mathcal{T}) \sum_{[x_{\kappa^*} x_{\mathcal{L}}] \in \partial \mathfrak{A}_F} \int_{\mathcal{D}} |\nabla^2 u(s)|^2 ds.$$

Etape 2 - On s'intéresse à $R_{\mathcal{D}}^A(z)$. On a, en utilisant l'inégalité de Jensen, le résultat suivant,

$$\int_{x_{\mathcal{K}^*}}^{x_{\mathcal{L}}} |R_{\mathcal{D}}^A(z)|^2 dz \leq \frac{1}{m_{\mathcal{D}}} \int_{x_{\mathcal{K}^*}}^{x_{\mathcal{L}}} \int_{\mathcal{D}} |A(z) \cdot \nabla u(z) - A(x) \cdot \nabla u(x)|^2 dx dz.$$

En faisant intervenir $0 = -A(x) \cdot \nabla u(z) + A(x) \cdot \nabla u(z)$, on obtient,

$$\begin{aligned} \int_{x_{\mathcal{K}^*}}^{x_{\mathcal{L}}} |R_{\mathcal{D}}^A(z)|^2 dz &\leq \frac{2}{m_{\mathcal{D}}} \int_{x_{\mathcal{K}^*}}^{x_{\mathcal{L}}} \int_{\mathcal{D}} |A(z) \cdot \nabla u(z) - A(x) \cdot \nabla u(z)|^2 dx dz \\ &\quad + \frac{2}{m_{\mathcal{D}}} \int_{x_{\mathcal{K}^*}}^{x_{\mathcal{L}}} \int_{\mathcal{D}} |A(x) \cdot \nabla u(z) - A(x) \cdot \nabla u(x)|^2 dx dz. \end{aligned}$$

D'après les hypothèses (\mathcal{H}_3) et (\mathcal{H}_2) faites sur A , on obtient

$$\int_{x_{\mathcal{K}^*}}^{x_{\mathcal{L}}} |R_{\mathcal{D}}^A(z)|^2 dz \leq \frac{2C_A}{m_{\mathcal{D}}} \int_{x_{\mathcal{K}^*}}^{x_{\mathcal{L}}} \int_{\mathcal{D}} |\nabla u(z)|^2 |z - x|^2 dx dz + \frac{2C_A}{m_{\mathcal{D}}} \int_{x_{\mathcal{K}^*}}^{x_{\mathcal{L}}} \int_{\mathcal{D}} |\nabla u(z) - \nabla u(x)|^2 dx dz.$$

Or la première intégrale est majorée par

$$\frac{1}{m_{\mathcal{D}}} \int_{x_{\mathcal{K}^*}}^{x_{\mathcal{L}}} |\nabla u(z)|^2 \int_{\mathcal{D}} |z - x|^2 dx dz \leq \text{size}(\mathcal{T})^2 \int_{x_{\mathcal{K}^*}}^{x_{\mathcal{L}}} |\nabla u(z)|^2 dz,$$

et d'après Lemme I.12 et comme $\text{diam}(\mathcal{D} \cup \widehat{[x_{\mathcal{K}^*}, x_{\mathcal{L}}]}) \leq Cd_{\mathcal{D}}$, on a également la majoration suivante pour la deuxième intégrale

$$\frac{1}{m_{\mathcal{D}}} \int_{x_{\mathcal{K}^*}}^{x_{\mathcal{L}}} \int_{\mathcal{D}} |\nabla u(z) - \nabla u(x)|^2 dx dz \leq Cd_{\mathcal{D}} \int_{\widehat{\mathcal{D}}} |\nabla^2 u(s)|^2 ds.$$

De plus comme $\mathcal{D} \in \mathfrak{D}_{\Gamma}$, \mathcal{D} est un diamant du bord donc il est convexe, on en déduit que

$$\sum_{[x_{\mathcal{K}^*}, x_{\mathcal{L}}] \in \partial \mathfrak{A}_F} \int_{x_{\mathcal{K}^*}}^{x_{\mathcal{L}}} |R_{\mathcal{D}}^A(z)|^2 dz \leq C \text{size}(\mathcal{T})^2 \|\nabla u\|_{L^2(\Gamma)}^2 + C \text{size}(\mathcal{T}) \sum_{[x_{\mathcal{K}^*}, x_{\mathcal{L}}] \in \partial \mathfrak{A}_F} \int_{\mathcal{D}} |\nabla^2 u(s)|^2 ds.$$

Etape 3 - On s'intéresse à $R_{\mathcal{D}}^z$. On rappelle qu'en utilisant la définition de $A^{\mathcal{D}}$ on obtient

$$R_{\mathcal{D}}^z = \frac{1}{m_{\mathcal{D}}} \int_{\mathcal{D}} \int_{\widehat{\mathcal{D}}} (A(x) - A(s)) \cdot \nabla^{\mathcal{D}} \mathbb{P}_c^T u dx d\mu_{\mathcal{D}}(s).$$

D'après l'hypothèse (\mathcal{H}_3) faite sur A , on a

$$R_{\mathcal{D}}^z \leq C_A \frac{|\nabla^{\mathcal{D}} \mathbb{P}_c^T u|}{m_{\mathcal{D}}} \int_{\mathcal{D}} \int_{\widehat{\mathcal{D}}} |x - s| dx d\mu_{\mathcal{D}}(s) \leq C_A \text{size}(\mathcal{T}) |\nabla^{\mathcal{D}} \mathbb{P}_c^T u|.$$

Finalement,

$$\sum_{[x_{\mathcal{K}^*}, x_{\mathcal{L}}] \in \partial \mathfrak{A}_F} d_{\mathcal{K}^*, \mathcal{L}} |R_{\mathcal{D}}^z|^2 \leq C \text{size}(\mathcal{T})^2 \sum_{[x_{\mathcal{K}^*}, x_{\mathcal{L}}] \in \partial \mathfrak{A}_F} d_{\mathcal{K}^*, \mathcal{L}} |\nabla^{\mathcal{D}} \mathbb{P}_c^T u|^2.$$

Etape 4 - Le terme $R_{\mathcal{D}}$. En résumé, on a obtenu

$$\begin{aligned} \sum_{[x_{\mathcal{K}^*}, x_{\mathcal{L}}] \in \partial \mathfrak{A}_F} \int_{x_{\mathcal{K}^*}}^{x_{\mathcal{L}}} |R_{\mathcal{D}}(s)|^2 ds &\leq C \text{size}(\mathcal{T}) \sum_{[x_{\mathcal{K}^*}, x_{\mathcal{L}}] \in \partial \mathfrak{A}_F} \int_{\mathcal{D}} |\nabla^2 u(s)|^2 ds \\ &\quad + C \text{size}(\mathcal{T})^2 \|u\|_{W^{2, \infty}(\widehat{\mathfrak{D}})}^2 + C \text{size}(\mathcal{T})^2 \sum_{[x_{\mathcal{K}^*}, x_{\mathcal{L}}] \in \partial \mathfrak{A}_F} d_{\mathcal{K}^*, \mathcal{L}} |\nabla^{\mathcal{D}} \mathbb{P}_c^T u|^2. \end{aligned}$$

Etape 5 - Régularité sur u

Si $u \in W^{2, \infty}(\widehat{\mathfrak{D}})$, alors

$$\sum_{[x_{\mathcal{K}^*}, x_{\mathcal{L}}] \in \partial \mathfrak{A}_F} \int_{\mathcal{D}} |\nabla^2 u(s)|^2 ds \leq \|u\|_{W^{2, \infty}(\widehat{\mathfrak{D}})}^2 \text{size}(\mathcal{T}) m(\Gamma),$$

et

$$\sum_{[x_{\mathcal{K}^*} x_{\mathcal{L}}] \in \partial \mathfrak{A}_F} \int_{\mathcal{D}} |\nabla u(s)|^2 ds \leq \|u\|_{W^{2,\infty}(\tilde{\mathfrak{D}})}^2 \text{size}(\mathcal{T}) m(\Gamma).$$

De plus on a

$$\sum_{[x_{\mathcal{K}^*} x_{\mathcal{L}}] \in \partial \mathfrak{A}_F} d_{\mathcal{K}^*, \mathcal{L}} |\nabla^{\mathcal{D}} \mathbb{P}_c^T u|^2 \leq C \text{size}(\mathcal{T}) \|u\|_{W^{2,\infty}(\tilde{\mathfrak{D}})}^2.$$

On en conclut que

$$\sum_{[x_{\mathcal{K}^*} x_{\mathcal{L}}] \in \partial \mathfrak{A}_F} d_{\mathcal{K}^*, \mathcal{L}} |R_{\mathcal{K}^* \mathcal{L}}^{\mathcal{D}}|^2 \leq C \text{size}(\mathcal{T})^2 \|u\|_{W^{2,\infty}(\tilde{\mathfrak{D}})}^2.$$

■

Dans cette démonstration on a eu besoin d'utiliser $u \in W^{2,\infty}(\tilde{\mathfrak{D}})$, afin d'obtenir une estimation d'ordre 1, on a le résultat suivant si $u \in H^2(\tilde{\mathfrak{D}})$.

Remarque II.20

On pose $A^{\mathcal{D}} = \frac{1}{m_{\mathcal{D}}} \int_{\mathcal{D}} A(x) dx$, pour tout $\mathcal{D} \in \mathfrak{D}_{ext}$. Il existe une constante $C > 0$, dépendant uniquement de A , Ω et $\text{reg}(\mathcal{T})$, telle que, pour tout $u \in H^2(\tilde{\mathfrak{D}})$,

$$\sum_{[x_{\mathcal{K}^*} x_{\mathcal{L}}] \in \partial \mathfrak{A}_F} d_{\mathcal{K}^*, \mathcal{L}} |R_{\mathcal{K}^* \mathcal{L}}^{\mathcal{D}}|^2 \leq C \text{size}(\mathcal{T}) \|u\|_{H^2(\tilde{\mathfrak{D}})}^2.$$

En effet, si $u \in H^2(\tilde{\mathfrak{D}})$, alors

$$\sum_{[x_{\mathcal{K}^*} x_{\mathcal{L}}] \in \partial \mathfrak{A}_F} \int_{\mathcal{D}} |\nabla^2 u(s)|^2 ds \leq \|\nabla^2 u\|_2^2 \quad \text{et} \quad \sum_{[x_{\mathcal{K}^*} x_{\mathcal{L}}] \in \partial \mathfrak{A}_F} \int_{\mathcal{D}} |\nabla u(s)|^2 ds \leq \|\nabla u\|_2^2,$$

donc

$$\sum_{[x_{\mathcal{K}^*} x_{\mathcal{L}}] \in \partial \mathfrak{A}_F} d_{\mathcal{K}^*, \mathcal{L}} |R_{\mathcal{K}^* \mathcal{L}}^{\mathcal{D}}|^2 \leq C \text{size}(\mathcal{T}) \|u\|_{H^2(\tilde{\mathfrak{D}})}^2.$$

On obtient également le résultat suivant en faisant la même démonstration que précédemment en remplaçant $[x_{\mathcal{K}^*}, x_{\mathcal{L}}]$ par σ .

Lemme II.21

Il existe une constante $C > 0$, dépendant uniquement de A , Ω et $\text{reg}(\mathcal{T})$, telle que, pour tout $u \in W^{2,\infty}(\tilde{\mathfrak{D}})$,

$$\sum_{\tilde{\mathcal{D}} \in \tilde{\mathfrak{D}}_{\Gamma}} m_{\sigma} |R_{\sigma}^{\tilde{\mathcal{D}}}|^2 \leq C \text{size}(\mathcal{T})^2 \|u\|_{W^{2,\infty}(\tilde{\mathfrak{D}})}^2.$$

Corollaire II.22

Il existe une constante $C > 0$, dépendant uniquement de A , de Ω et $\text{reg}(\mathcal{T})$, telle que, pour tout $u \in W^{2,\infty}(\tilde{\mathfrak{D}})$,

$$\sum_{\mathcal{D} \in \mathfrak{D}_{\Gamma}} M_{\sigma} |R_{\mathcal{K}^* \mathcal{L}}^{\mathcal{D}} - R_{\mathcal{L}^* \mathcal{L}}^{\mathcal{D}}|^2 + \sum_{\mathcal{D} \in \mathfrak{D}_{\Gamma}} m_{\sigma} |\gamma^{\mathcal{D}}(R^T)|^2 \leq C \text{size}(\mathcal{T})^2 \|u\|_{W^{2,\infty}(\tilde{\mathfrak{D}})}^2,$$

où $M_{\sigma} = \frac{d_{\mathcal{K}^*, \mathcal{L}} d_{\mathcal{L}^*, \mathcal{L}}}{m_{\sigma}}$, si σ est l'arête de $[x_{\mathcal{K}^*}, x_{\mathcal{L}^*}]$.

Démonstration : Pour $\mathcal{D} \in \mathfrak{D}_{\Gamma}$, l'inégalité de Young implique

$$M_{\sigma} |R_{\mathcal{K}^* \mathcal{L}}^{\mathcal{D}} - R_{\mathcal{L}^* \mathcal{L}}^{\mathcal{D}}|^2 \leq 2d_{\mathcal{K}^*, \mathcal{L}} |R_{\mathcal{K}^* \mathcal{L}}^{\mathcal{D}}|^2 + 2d_{\mathcal{L}^*, \mathcal{L}} |R_{\mathcal{L}^* \mathcal{L}}^{\mathcal{D}}|^2.$$

D'après le Lemme II.19, on a donc

$$\sum_{\mathcal{D} \in \mathfrak{D}_{\Gamma}} M_{\sigma} |R_{\mathcal{K}^* \mathcal{L}}^{\mathcal{D}} - R_{\mathcal{L}^* \mathcal{L}}^{\mathcal{D}}|^2 \leq C \text{size}(\mathcal{T})^2 \|u\|_{W^{2,\infty}(\tilde{\mathfrak{D}})}^2.$$

De même, l'inégalité de Young implique

$$\sum_{\mathcal{D} \in \mathfrak{D}_{\Gamma}} m_{\sigma} |\gamma^{\mathcal{D}}(R^T)|^2 \leq 2 \sum_{[x_{\mathcal{K}^*} x_{\mathcal{L}}] \in \partial \mathfrak{A}_F} d_{\mathcal{K}^*, \mathcal{L}} |R_{\mathcal{K}^* \mathcal{L}}^{\mathcal{D}}|^2.$$

Le Lemme II.19 conclut la démonstration. ■

Lemme II.23

Il existe une constante $C > 0$, dépendant uniquement de Ω , λ et $\text{reg}(\mathcal{T})$, telle que, pour tout $u \in W^{2,\infty}(\tilde{\mathfrak{D}})$,

$$\sum_{[x_{\mathcal{K}^*}, x_{\mathcal{L}}] \in \partial \mathfrak{A}_F} d_{\mathcal{K}^*, \mathcal{L}} |T_{\mathcal{K}^* \mathcal{L}}^{\mathcal{D}}|^2 \leq C \text{size}(\mathcal{T})^2 \|u\|_{W^{2,\infty}(\tilde{\mathfrak{D}})}^2.$$

Démonstration : Soit $\mathcal{D} \in \mathfrak{D}_\Gamma$. On rappelle la définition de $T_{\mathcal{K}^* \mathcal{L}}^{\mathcal{D}}$:

$$T_{\mathcal{K}^* \mathcal{L}}^{\mathcal{D}} = \lambda \left(\frac{u(x_{\mathcal{K}^*}) + u(x_{\mathcal{L}})}{2} - \frac{1}{d_{\mathcal{K}^*, \mathcal{L}}} \int_{x_{\mathcal{K}^*}}^{x_{\mathcal{L}}} u(s) ds \right),$$

où la trace de u sur le bord Γ est encore noté par u . On suppose ici que $[x_{\mathcal{K}^*}, x_{\mathcal{L}}] =]0, h_{\mathcal{K}^*}[\times \{0\}$. On peut écrire

$$\frac{1}{d_{\mathcal{K}^*, \mathcal{L}}} \int_{x_{\mathcal{K}^*}}^{x_{\mathcal{L}}} (u(x_{\mathcal{K}^*}) - u(s)) ds = \frac{1}{h_{\mathcal{K}^*}} \int_0^{h_{\mathcal{K}^*}} \int_0^1 \nabla_T u(tx) x dt dx.$$

On a donc

$$\frac{1}{d_{\mathcal{K}^*, \mathcal{L}}} \int_{x_{\mathcal{K}^*}}^{x_{\mathcal{L}}} (u(x_{\mathcal{K}^*}) - u(s)) ds \leq \sup_{x \in [x_{\mathcal{K}^*}, x_{\mathcal{L}}]} |\nabla_T u(x)| \frac{1}{h_{\mathcal{K}^*}} \int_0^{h_{\mathcal{K}^*}} x dx \leq \|u\|_{W^{2,\infty}(\tilde{\mathfrak{D}})} d_{\mathcal{K}^*, \mathcal{L}}.$$

On en déduit que

$$\sum_{[x_{\mathcal{K}^*}, x_{\mathcal{L}}] \in \partial \mathfrak{A}_F} d_{\mathcal{K}^*, \mathcal{L}} \left| \frac{1}{d_{\mathcal{K}^*, \mathcal{L}}} \int_{x_{\mathcal{K}^*}}^{x_{\mathcal{L}}} (u(x_{\mathcal{K}^*}) - u(s)) ds \right|^2 \leq \sum_{[x_{\mathcal{K}^*}, x_{\mathcal{L}}] \in \partial \mathfrak{A}_F} d_{\mathcal{K}^*, \mathcal{L}}^3 \|u\|_{W^{2,\infty}(\tilde{\mathfrak{D}})}^2.$$

On fait de même pour obtenir

$$\sum_{[x_{\mathcal{K}^*}, x_{\mathcal{L}}] \in \partial \mathfrak{A}_F} d_{\mathcal{K}^*, \mathcal{L}} \left| \frac{1}{d_{\mathcal{K}^*, \mathcal{L}}} \int_{x_{\mathcal{K}^*}}^{x_{\mathcal{L}}} (u(x_{\mathcal{L}}) - u(s)) ds \right|^2 \leq \sum_{[x_{\mathcal{K}^*}, x_{\mathcal{L}}] \in \partial \mathfrak{A}_F} d_{\mathcal{K}^*, \mathcal{L}}^3 \|u\|_{W^{2,\infty}(\tilde{\mathfrak{D}})}^2.$$

En utilisant le fait que

$$\begin{aligned} \sum_{[x_{\mathcal{K}^*}, x_{\mathcal{L}}] \in \partial \mathfrak{A}_F} d_{\mathcal{K}^*, \mathcal{L}} |T_{\mathcal{K}^* \mathcal{L}}^{\mathcal{D}}|^2 &\leq 2\lambda^2 \sum_{[x_{\mathcal{K}^*}, x_{\mathcal{L}}] \in \partial \mathfrak{A}_F} d_{\mathcal{K}^*, \mathcal{L}} \left| \frac{1}{d_{\mathcal{K}^*, \mathcal{L}}} \int_{x_{\mathcal{K}^*}}^{x_{\mathcal{L}}} (u(x_{\mathcal{K}^*}) - u(s)) ds \right|^2 \\ &\quad + 2\lambda^2 \sum_{[x_{\mathcal{K}^*}, x_{\mathcal{L}}] \in \partial \mathfrak{A}_F} d_{\mathcal{K}^*, \mathcal{L}} \left| \frac{1}{d_{\mathcal{K}^*, \mathcal{L}}} \int_{x_{\mathcal{K}^*}}^{x_{\mathcal{L}}} (u(x_{\mathcal{L}}) - u(s)) ds \right|^2, \end{aligned}$$

et que $d_{\mathcal{K}^*, \mathcal{L}} \leq \text{size}(\mathcal{T})$ on en déduit

$$\sum_{[x_{\mathcal{K}^*}, x_{\mathcal{L}}] \in \partial \mathfrak{A}_F} d_{\mathcal{K}^*, \mathcal{L}} |T_{\mathcal{K}^* \mathcal{L}}^{\mathcal{D}}|^2 \leq C \text{size}(\mathcal{T})^2 \|u\|_{W^{2,\infty}(\tilde{\mathfrak{D}})}^2. ■$$

Corollaire II.24

Il existe une constante $C > 0$, dépendant uniquement de Ω , de λ et $\text{reg}(\mathcal{T})$, telle que, pour tout $u \in W^{2,\infty}(\tilde{\mathfrak{D}})$,

$$\sum_{\mathcal{D} \in \mathfrak{D}_\Gamma} M_\sigma |T_{\mathcal{K}^* \mathcal{L}}^{\mathcal{D}} - T_{\mathcal{L}^* \mathcal{K}}^{\mathcal{D}}|^2 + \sum_{\mathcal{D} \in \mathfrak{D}_\Gamma} m_\sigma |\gamma^{\mathcal{D}}(T^T)|^2 \leq C \text{size}(\mathcal{T})^2 \|u\|_{W^{2,\infty}(\tilde{\mathfrak{D}})}^2.$$

Démonstration : On procède comme dans le Corollaire II.22, on obtient

$$\sum_{\mathcal{D} \in \mathfrak{D}_\Gamma} M_\sigma |T_{\mathcal{K}^* \mathcal{L}}^{\mathcal{D}} - T_{\mathcal{L}^* \mathcal{K}}^{\mathcal{D}}|^2 \leq 2 \sum_{[x_{\mathcal{K}^*}, x_{\mathcal{L}}] \in \partial \mathfrak{A}_F} d_{\mathcal{K}^*, \mathcal{L}} |T_{\mathcal{K}^* \mathcal{L}}^{\mathcal{D}}|^2,$$

et

$$\sum_{\mathcal{D} \in \mathfrak{D}_\Gamma} m_\sigma |\gamma^\mathcal{D}(T^\tau)|^2 \leq 2 \sum_{[x_{\mathcal{K}^*}, x_\mathcal{L}] \in \partial \mathfrak{A}_F} d_{\mathcal{K}^*, \mathcal{L}} |T_{\mathcal{K}^* \mathcal{L}}^\mathcal{D}|^2.$$

On conclut avec le Lemme II.23. ■

II.8 Fin de la démonstration de l'estimation d'erreur (Théorème II.12)

On a posé $w^\tau = \mathfrak{P}_{m,g}^D \mathbb{P}_c^\tau u - u^\tau$ et prouvé (II.30) :

$$\begin{aligned} \|\nabla^{\tilde{\mathfrak{D}}} w^\tau\|_2^2 &\leq C \left(\sum_{\tilde{\mathfrak{D}} \in \tilde{\mathfrak{D}}} m_{\tilde{\mathfrak{D}}} |R_{\sigma}^{\tilde{\mathfrak{D}}}|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \|\nabla^{\tilde{\mathfrak{D}}} w^\tau\|_2 + C \left(\sum_{\tilde{\mathfrak{D}} \in \tilde{\mathfrak{D}}} m_{\tilde{\mathfrak{D}}} |R_{\zeta}^{\tilde{\mathfrak{D}}}|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \|\nabla^{\tilde{\mathfrak{D}}} w^\tau\|_2 \\ &\quad + C \sum_{\mathcal{D} \in \mathfrak{D}_\Gamma} m_\sigma (\gamma_\sigma(R_h^{\partial \mathfrak{A}_F}))^2 + C \sum_{\mathcal{D} \in \mathfrak{D}_\Gamma} M_\sigma (R_h^{\mathcal{L}^* \mathcal{L}} - R_h^{\mathcal{K}^* \mathcal{L}})^2 \\ &\quad + C \|w^\tau\|_{\partial \mathfrak{A}_F} \left(\sum_{[x_{\mathcal{K}^*}, x_\mathcal{L}] \in \partial \mathfrak{A}_F} d_{\mathcal{K}^*, \mathcal{L}} |R_{\mathcal{K}^* \mathcal{L}}^\mathcal{D}|^2 \right)^{\frac{1}{2}} + C \|w^\tau\|_{\mathfrak{D}_\Gamma} \left(\sum_{\tilde{\mathfrak{D}} \in \tilde{\mathfrak{D}}_\Gamma} m_\sigma |R_{\sigma}^{\tilde{\mathfrak{D}}}|^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Les Théorèmes II.15, II.16 et la Proposition II.6 donnent

$$\begin{aligned} \|\nabla^{\tilde{\mathfrak{D}}} w^\tau\|_2^2 &\leq C \left(\sum_{\tilde{\mathfrak{D}} \in \tilde{\mathfrak{D}}} m_{\tilde{\mathfrak{D}}} |R_{\sigma}^{\tilde{\mathfrak{D}}}|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \|\nabla^{\tilde{\mathfrak{D}}} w^\tau\|_2 + C \left(\sum_{\tilde{\mathfrak{D}} \in \tilde{\mathfrak{D}}} m_{\tilde{\mathfrak{D}}} |R_{\zeta}^{\tilde{\mathfrak{D}}}|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \|\nabla^{\tilde{\mathfrak{D}}} w^\tau\|_2 \\ &\quad + C \sum_{\mathcal{D} \in \mathfrak{D}_\Gamma} m_\sigma (\gamma_\sigma(R_h^{\partial \mathfrak{A}_F}))^2 + C \sum_{\mathcal{D} \in \mathfrak{D}_\Gamma} M_\sigma (R_h^{\mathcal{L}^* \mathcal{L}} - R_h^{\mathcal{K}^* \mathcal{L}})^2 \\ &\quad + C \left(\sum_{[x_{\mathcal{K}^*}, x_\mathcal{L}] \in \partial \mathfrak{A}_F} d_{\mathcal{K}^*, \mathcal{L}} |R_{\mathcal{K}^* \mathcal{L}}^\mathcal{D}|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \|\nabla^{\tilde{\mathfrak{D}}} w^\tau\|_2 + C \left(\sum_{\tilde{\mathfrak{D}} \in \tilde{\mathfrak{D}}_\Gamma} m_\sigma |R_{\sigma}^{\tilde{\mathfrak{D}}}|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \|\nabla^{\tilde{\mathfrak{D}}} w^\tau\|_2. \end{aligned}$$

En utilisant les Lemmes II.17, II.19 et II.21, on obtient

$$\|\nabla^{\tilde{\mathfrak{D}}} w^\tau\|_2^2 \leq C \text{size}(\mathcal{T}) \|\nabla^{\tilde{\mathfrak{D}}} w^\tau\|_2 + C \sum_{\mathcal{D} \in \mathfrak{D}_\Gamma} m_\sigma (\gamma_\sigma(R_h^{\partial \mathfrak{A}_F}))^2 + C \sum_{\mathcal{D} \in \mathfrak{D}_\Gamma} M_\sigma (R_h^{\mathcal{L}^* \mathcal{L}} - R_h^{\mathcal{K}^* \mathcal{L}})^2.$$

Les Corollaires II.22 et II.24 impliquent enfin

$$\|\nabla^{\tilde{\mathfrak{D}}} w^\tau\|_2 \leq C \text{size}(\mathcal{T}). \quad (\text{II.32})$$

Estimation de $\|u - u^\tau\|_2$. En utilisant l'inégalité de Poincaré discrète Théorème II.13, on obtient

$$\begin{aligned} \|u - u^\tau\|_2 &\leq \|u - \mathfrak{P}_{m,g}^D \mathbb{P}_c^\tau u\|_2 + \|\mathfrak{P}_{m,g}^D \mathbb{P}_c^\tau u - u^\tau\|_2 \\ &\leq \|u - \mathfrak{P}_{m,g}^D \mathbb{P}_c^\tau u\|_2 + C \|\nabla^{\tilde{\mathfrak{D}}} w^\tau\|_2. \end{aligned}$$

Comme dans la démonstration du Lemme I.18, on a

$$\|u - \mathfrak{P}_{m,g}^D \mathbb{P}_c^\tau u\|_2 \leq \|u - \mathbb{P}_c^\tau u\|_2 + \|u - \mathbb{P}_m^\tau u\|_2,$$

et la Proposition II.6 implique

$$\|u - u^\tau\|_2 \leq C \text{size}(\mathcal{T}) + C \|\nabla^{\tilde{\mathfrak{D}}} w^\tau\|_2.$$

On conclut donc grâce à (II.32) :

$$\|u - u^\tau\|_2 \leq C \text{size}(\mathcal{T}).$$

Estimation de $\|\nabla u - \nabla^{\tilde{\mathcal{D}}} u^{\tau}\|_2$. On a

$$\|\nabla u - \nabla^{\tilde{\mathcal{D}}} u^{\tau}\|_2 \leq \|\nabla u - \nabla^{\tilde{\mathcal{D}}} \mathbb{P}_c^{\tau} u\|_2 + \|\nabla^{\tilde{\mathcal{D}}} \mathbb{P}_c^{\tau} u - \nabla^{\tilde{\mathcal{D}}} \mathfrak{P}_{m,g}^D \mathbb{P}_c^{\tau} u\|_2 + \|\nabla^{\tilde{\mathcal{D}}} w^{\tau}\|_2.$$

D'après les Lemmes II.10 et II.11, on obtient

$$\|\nabla u - \nabla^{\tilde{\mathcal{D}}} u^{\tau}\|_2 \leq C \text{size}(\mathcal{T}) + \|\nabla^{\tilde{\mathcal{D}}} w^{\tau}\|_2.$$

On conclut donc grâce à (II.32) :

$$\|\nabla u - \nabla^{\tilde{\mathcal{D}}} u^{\tau}\|_2 \leq C \text{size}(\mathcal{T}).$$

■

II.9 Tests numériques

On illustre quelques résultats numériques obtenus sur le domaine carré unité $\Omega =]0, 1]^2$. On précise que pour tous les tests numériques le bord de la condition de Fourier se situe en $\{x = 1\}$ avec $\lambda = 5$, voir la Figure II.6. Pour chaque cas test, on donne l'expression de la solution exacte u de laquelle on déduit le terme source f et les conditions aux bords g, h pour que le problème (II.1) soit vérifié.

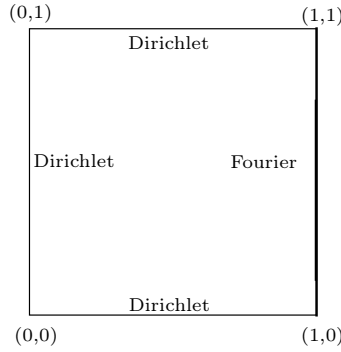


FIG. II.6 – Conditions aux bords.

On rappelle que pour illustrer l'estimation d'erreur, la famille de maillages est obtenue en raffinant successivement et uniformément le maillage primal original. Afin de mettre en évidence le processus de raffinement choisi, on présente sur les Figures II.7(a) et II.9(a) le maillage primal original et sur les Figures II.7(b) et II.9(b) le maillage primal obtenu après le processus de raffinement. Plus précisément, la famille de maillages, correspondant à la Figure II.7, est obtenue en divisant chaque arête primale en deux, alors que la famille de maillages, correspondant à la Figure II.9, est obtenue en dupliquant le maillage grossier en quatre afin de garder le motif en damier. On précise que les centres $(x_{\kappa})_{\kappa}$ sont choisis comme les barycentres des mailles primales. Dans les Figures II.7-II.9, on compare la norme L^2 de l'erreur obtenue avec le schéma DDFV (II.18) pour la solution $\frac{\|\mathbb{P}_c^{\tau} u - u^{\tau}\|_2}{\|\mathbb{P}_c^{\tau} u\|_2}$ et pour son gradient $\frac{\|\nabla^{\mathcal{D}} \mathbb{P}_c^{\tau} u - \nabla^{\mathcal{D}} u^{\tau}\|_2}{\|\nabla^{\mathcal{D}} \mathbb{P}_c^{\tau} u\|_2}$ respectivement, en fonction du pas du maillage $\text{size}(\mathcal{T})$ en échelle logarithmique. Les ordres de convergence indiqués sur les Figures II.7-II.9 sont calculés à l'aide d'une approximation par les moindres carrés des données calculées.

II.9.1 Test 1 - Solution raide - Tenseur anisotrope constant

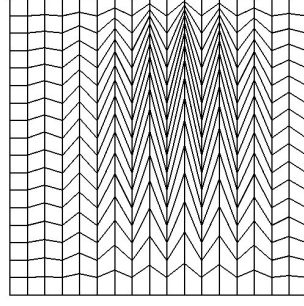
Ce cas test a été proposé dans le benchmark de la conférence FVCA5 [HH08b]. On prend le tenseur anisotrope constant suivant :

$$A(x, y) = \begin{pmatrix} 1.5 & 0.5 \\ 0.5 & 1.5 \end{pmatrix}.$$

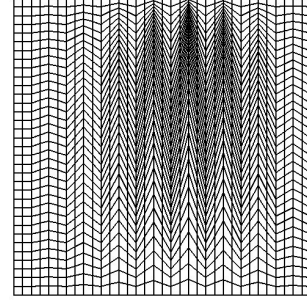
La solution exacte est donnée par

$$u(x, y) = \sin((1-x)(1-y)) + (1-x)^3(1-y)^2.$$

On utilise le maillage primal de quadrangles déformés (voir les Figures II.7(a)-II.7(b)).



(a) Maillage primal grossier.



(b) Maillage primal raffiné.

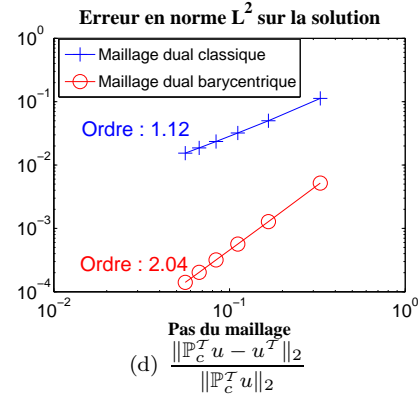
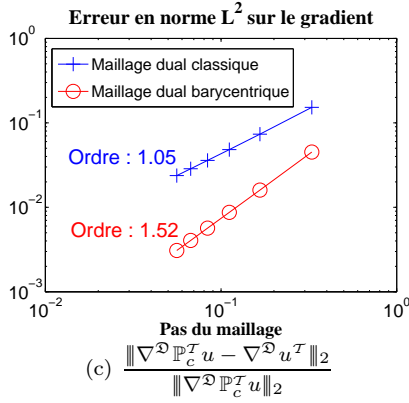


FIG. II.7 – Test 1 sur le maillage primal déformé.

On a comparé la solution obtenue en utilisant le maillage dual direct et celle obtenue avec le maillage dual barycentrique. Les ordres de convergence sont très différents dans ce cas, car pour ce maillage primal, les diamants ne sont pas forcément convexes voir la Figure II.8 et certaines mailles duales directes se recouvrent.

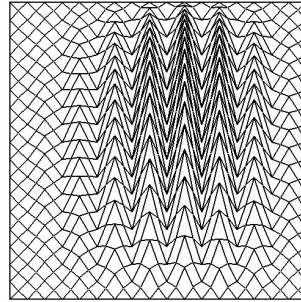


FIG. II.8 – Le maillage diamant du maillage primal II.7(a).

En effet, pour le maillage dual direct on trouve de l'ordre 1 pour la solution et pour son gradient en norme L^2 , l'ordre est le même que celui théorique donné par le Théorème II.12. Pour le maillage dual barycentrique on trouve de l'ordre 2 et 1.5 pour la solution et pour son gradient en norme L^2 . Ainsi, lorsque les diamants ne sont pas convexes, il est préférable d'utiliser le maillage dual barycentrique.

II.9.2 Test 2 - Solution polynomiale - Tenseur anisotrope discontinu

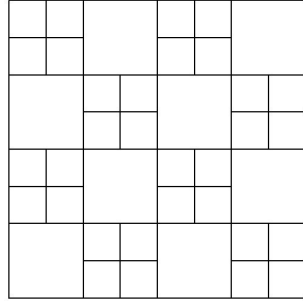
On prend le tenseur anisotrope discontinu suivant :

$$A(x, y) = \begin{pmatrix} 1.5 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ si } x < 0.5, \quad \text{et } A(x, y) = \text{Id si } x > 0.5.$$

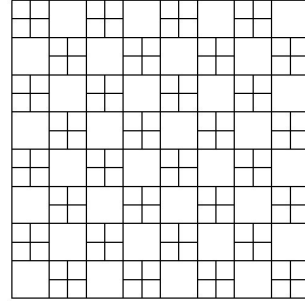
Ainsi l'interface Γ de discontinuité est localisée en $\{x = 0.5\}$. La solution exacte est donnée par

$$u(x, y) = \begin{cases} -0.5(x - 2y + 0.5)^2 & \text{si } x > 0.5 \\ -2(x - y)^2 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On utilise le maillage primal en damier (voir les Figures II.9(a)-II.9(b)).



(a) Maillage primal grossier.



(b) Maillage primal raffiné.

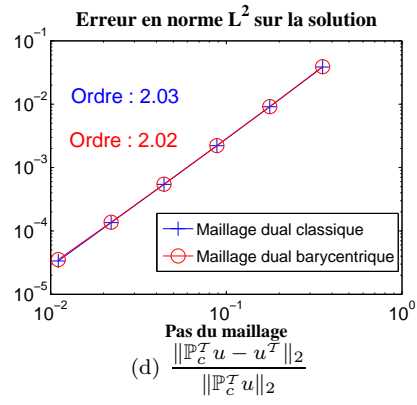
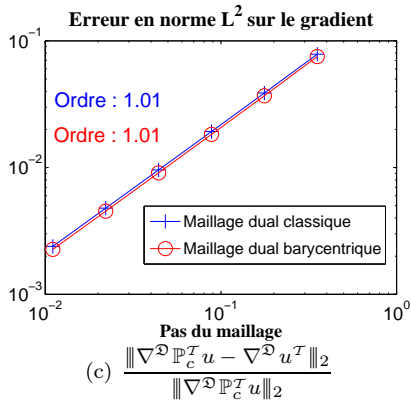


FIG. II.9 – Test 2 sur le maillage primal en damier.

On a comparé la solution obtenue en utilisant le maillage dual direct et celle obtenue avec le maillage dual barycentrique, les solutions sont semblables. En effet, pour ce maillage primal, tous les diamants sont convexes (voir la Figure II.10) et les mailles duales directes ne se recouvrent pas.

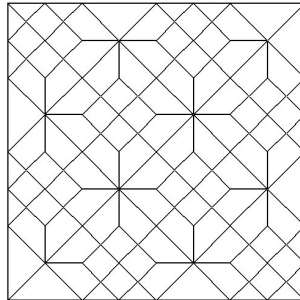


FIG. II.10 – Le maillage diamant du maillage primal II.9(a).

Pour la solution et son gradient, on obtient numériquement de l'ordre 2 et 1 respectivement pour le schéma (II.18). On souligne que le taux de convergence n'est pas sensible à la présence de volumes de contrôle non conformes. On observe la super convergence en norme L^2 qui est classique en volumes finis, cependant sa démonstration dans le cadre général est toujours un problème ouvert même pour le problème de Laplace (voir la Section II.11).

II.10 Quelques remarques sur l'implémentation

Tous les tests numériques 2D de ce manuscrit ont été réalisés à l'aide d'un code en fortran90. Lors de journée numériques de Lille 2010 <https://rn10vf.lille.inria.fr/>, des programmes en scilab ont été réalisés par F. Boyer et moi-même à des fins pédagogiques, ils sont accessibles à l'adresse http://www.cmi.univ-mrs.fr/~krell/Projet/VF_scilab.tar.gz. Dans cette brève présentation, on se sert des notations de ces programmes scilab.

Pour assembler la matrice et le second membre correspondant à un schéma de type volumes finis, on travaille essentiellement arête par arête. Dans le cadre DDFV, on va parler plutôt d'assemblage diamant par diamant, on rappelle qu'il existe une bijection entre les arêtes du maillage primal et les diamants et qu'un diamant est défini par deux sommets x_{κ^*} , $x_{\mathcal{L}^*}$ et par deux centres x_{κ} , $x_{\mathcal{L}}$. Un maillage DDFV est ainsi défini de manière unique par les coordonnées des sommets et des centres et par une structure diamant. On commence par construire une structure appelée `mesh` qui contient les coordonnées des sommets et des centres et des informations pour chaque diamant, de manière à définir de façon unique le maillage considéré.

- Sommets : coordonnées du sommet numéro i

`mesh.sommets(i,_X), mesh.sommets(i,_Y)`

- Centres : coordonnées du centre du volume j

`mesh.centres(j,_X), mesh.centres(j,_Y)`

- Diamants : Pour le diamant numéro k

- Numéros des deux sommets x_{κ^*} et $x_{\mathcal{L}^*}$, notés KS et LS pour (K"Star")

`mesh.diamants(k,_KS), mesh.diamants(k,_LS)`

- Numéros des deux centres x_{κ} et $x_{\mathcal{L}}$

`mesh.diamants(k,_K), mesh.diamants(k,_L)`

- Mesure des arêtes $m_{\sigma} = |x_{\kappa^*} x_{\mathcal{L}^*}|$ et $m_{\sigma^*} = |x_{\kappa} x_{\mathcal{L}}| = d_{\kappa,\mathcal{L}}$

`mesh.diamants(k,_MES), mesh.diamants(k,_DKL)`

- Coordonnées du centre du diamant $x_{\mathcal{D}}$

`mesh.diamants(k,_XD), mesh.diamants(k,_YD)`

- Mesure du diamant $m_{\mathcal{D}}$

`mesh.diamants(k,_MESD)`

- Mesures des quarts de diamant

`mesh.diamants(k,_MES_K_KS),...`

- Normales unitaires $\vec{n}_{\sigma\kappa}$ et $\vec{n}_{\sigma^*\kappa^*}$

`mesh.diamants(k,_N_KL_X), mesh.diamants(k,_N_KL_Y)`

`mesh.diamants(k,_NS_KSLS_X), mesh.diamants(k,_NS_KSLS_Y)`

- Label (>0 à l'intérieur, $=-1$ bord Dirichlet, $=-2$ bord Fourier)

`mesh.diamants(k,_LABEL).`

Si le tenseur anisotrope est discontinu, on a également besoin de

- Mesures $m_{\sigma\kappa} = d_{\kappa\sigma}$ et $m_{\sigma\mathcal{L}} = d_{\mathcal{L}\sigma}$

`mesh.diamants(k,_DKsig), mesh.diamants(k,_DLsig)`

A partir de toutes ces données, on peut assembler le système associé au schéma volumes finis.

Remarque II.25

- 1) Il n'est pas nécessaire de connaître la correspondance entre une maille (primale ou duale) et l'ensemble de ses sommets.
- 2) La structure est indépendante de la géométrie des mailles (triangles, quadrilatères, pentagones, ...).

II.10.1 Implémentation de VF4 pour le problème de Laplace

Afin de mettre en évidence la spécificité de la programmation des schémas DDFV, on commence par présenter la programmation du schéma VF4 pour le problème de Laplace avec notre structure maillage. On rappelle que le schéma VF4 pour le problème de Laplace avec des conditions aux bords de Dirichlet homogène s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } u^{\mathfrak{M}} = (u_{\kappa})_{\kappa \in \mathfrak{M}} \in \mathbb{R}^{\mathfrak{M}} \text{ tel que} \\ \forall \kappa \in \mathfrak{M}, \quad \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_{\kappa}} F_{\kappa,\sigma}(u^{\mathfrak{M}}) = m_{\kappa} f_{\kappa} \, dx, \\ \text{avec } F_{\kappa,\sigma}(u^{\mathfrak{M}}) = -m_{\sigma} \frac{u_{\mathcal{L}} - u_{\kappa}}{m_{\sigma^*}}, \text{ si } \sigma = \kappa | \mathcal{L} \in \mathcal{E}_{int}, \\ \text{avec } F_{\kappa,\sigma}(u^{\mathfrak{M}}) = -m_{\sigma} \frac{-u_{\kappa}}{m_{\sigma^*}}, \text{ si } \sigma \in \mathcal{E}_{ext}. \end{array} \right.$$

Pour chaque diamant, on calcule le rapport, appelé transmissivité (voir [EGH00])

$$\text{flux_NN}(:) := \frac{m_{\sigma}}{m_{\sigma^*}} = \text{mesh.diamants}(:,_MES) ./ \text{mesh.diamants}(:,_DKL).$$

La matrice à assembler est de taille $N \times N$, où N représente le nombre de volumes de contrôle, elle est assemblée diamant par diamant

```
A(mesh.diamants(:,_K),mesh.diamants(:,_K)) <- + flux_NN(:);
//A l'intérieur du domaine :
where (mesh.diamants(:,_LABEL)>0) then
    A(mesh.diamants(:,_K),mesh.diamants(:,_L)) = -flux_NN(:);
    A(mesh.diamants(:,_L),mesh.diamants(:,_L)) <- + flux_NN(:);
    A(mesh.diamants(:,_L),mesh.diamants(:,_K)) = -flux_NN(:);
end;
```

où la notation $\mathbf{a} \leftarrow +\mathbf{b}$ correspond à $\mathbf{a}=\mathbf{a}+\mathbf{b}$. Comme la mesure d'une maille primale peut être obtenue en sommant la mesure des demi-diamants $\tilde{\mathcal{D}}_{\kappa}$ contenus dans la maille, on écrit que $m_{\kappa} f_{\kappa} = \sum_{\tilde{\mathcal{D}} \subset \kappa} m_{\tilde{\mathcal{D}}} f(x_{\tilde{\mathcal{D}}})$, où $x_{\tilde{\mathcal{D}}} = \frac{x_{\kappa} + x_{\kappa^*} + x_{\mathcal{L}^*}}{3}$, d'autres quadratures sont possibles. On calcule le second membre diamant par diamant, de la manière suivante :

```
b(mesh.diamants(:,_K)) <- + (mesh.diamants(:,_MES_K_KS)+mesh.diamants(:,_MES_K_LS))...
    * f( (x_{\kappa} + x_{\kappa^*} + x_{\mathcal{L}^*}) / 3 );
```

//A l'intérieur du domaine :

```
where (mesh.diamants(:,_LABEL)>0) then
    b(mesh.diamants(:,_L)) <- + (mesh.diamants(:,_MES_L_KS)+mesh.diamants(:,_MES_L_LS))...
    * f( (x_{\mathcal{L}} + x_{\kappa^*} + x_{\mathcal{L}^*}) / 3 );
```

end;

II.10.2 Implémentation de DDFV pour le problème de Laplace

On rappelle que le schéma DDFV pour le problème de Laplace avec des conditions aux bords de Dirichlet homogène s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } u^{\mathcal{T}} \in \mathbb{E}_0 \text{ tel que} \\ \forall \kappa \in \mathfrak{M}, \quad \sum_{\mathcal{D}_{\sigma,\sigma^*} \in \mathcal{D}_{\kappa}} F_{\kappa,\sigma}(u^{\mathcal{T}}) = m_{\kappa} f_{\kappa}, \\ \forall \kappa^* \in \mathfrak{M}^*, \quad \sum_{\mathcal{D}_{\sigma,\sigma^*} \in \mathcal{D}_{\kappa^*}} F_{\kappa^*,\sigma^*}(u^{\mathcal{T}}) = m_{\kappa^*} f_{\kappa^*}, \\ \text{avec } F_{\kappa,\sigma}(u^{\mathcal{T}}) = -m_{\sigma} \nabla^{\mathcal{D}} u^{\mathcal{T}} \cdot \vec{\mathbf{n}}_{\sigma\kappa}, \text{ si } \sigma \in \mathcal{E}, \\ \text{avec } F_{\kappa^*,\sigma^*}(u^{\mathcal{T}}) = -m_{\sigma^*} \nabla^{\mathcal{D}} u^{\mathcal{T}} \cdot \vec{\mathbf{n}}_{\sigma^*\kappa^*}, \text{ si } \sigma^* \in \mathcal{E}^*. \end{array} \right.$$

Grâce à la Définition I.7 du gradient discret, pour chaque diamant, on peut écrire les flux de la manière suivante

$$\begin{aligned} F_{\kappa,\sigma}(u^T) &= \text{flux_NN}*(u_\kappa - u_\sigma) + \text{flux_NSN}*(u_{\kappa^*} - u_{\sigma^*}), \\ F_{\kappa^*,\sigma^*}(u^T) &= \text{flux_NNS}*(u_\kappa - u_\sigma) + \text{flux_NSNS}*(u_{\kappa^*} - u_{\sigma^*}), \end{aligned}$$

avec

$$\text{flux_NN} = \frac{m_\sigma^2}{2m_D}, \quad \text{flux_NNS} = \text{flux_NSN} = \frac{m_\sigma m_{\sigma^*}}{2m_D} \vec{n}_{\sigma\kappa} \cdot \vec{n}_{\sigma^*\kappa^*}, \quad \text{flux_NSNS} = \frac{m_{\sigma^*}^2}{2m_D}.$$

Ainsi pour chaque diamant, on calcule le produit scalaire entre la normale primale et la normale duale, c'est-à-dire $\vec{n}_{\sigma\kappa} \cdot \vec{n}_{\sigma^*\kappa^*}$

```
N_scaNS(:)=mesh.diamants(:,_N_KL_X).*mesh.diamants(:,_NS_KSLX_X)...
+mesh.diamants(:,_N_KL_Y).*mesh.diamants(:,_NS_KSLX_Y);
```

on en déduit

```
flux_NN(:)=0.5.*mesh.diamants(:,_MES).*mesh.diamants(:,_MES)./mesh.diamants(:,_MESD);
flux_NNS(:)=0.5.*mesh.diamants(:,_MES).*mesh.diamants(:,_DKL).*N_scaNS(:)
./mesh.diamants(:,_MESD);

flux_NSN(:)=flux_NNS;
flux_NSNS(:)=0.5.*mesh.diamants(:,_DKL).*mesh.diamants(:,_DKL)./mesh.diamants(:,_MESD);
```

Le vecteur des inconnues est rangé de la manière suivante : tout d'abord les inconnues primales u_κ ensuite les inconnues duales u_{κ^*} , il est de taille $N + M$, où N (resp. M) représente le nombre de mailles primales (resp. de sommets). La matrice à assembler est donc de taille $(N + M) \times (N + M)$ et elle est assemblée diamant par diamant

```
A(mesh.diamants(:,_K),mesh.diamants(:,_K)) <- + flux_NN(:);
A(mesh.diamants(:,_K),mesh.diamants(:,_KS)+N) <- + flux_NSN(:);
A(mesh.diamants(:,_K),mesh.diamants(:,_LS)+N) <- - flux_NSN(:);
//A l'intérieur du domaine :
where (mesh.diamants(:,_LABEL)>0) then
    A(mesh.diamants(:,_K),mesh.diamants(:,_L)) = -flux_NN(:);
    A(mesh.diamants(:,_L),mesh.diamants(:,_L)) <- + flux_NN(:);
    A(mesh.diamants(:,_L),mesh.diamants(:,_K)) = -flux_NN(:);
    A(mesh.diamants(:,_L),mesh.diamants(:,_KS)+N) <- - flux_NSN(:);
    A(mesh.diamants(:,_L),mesh.diamants(:,_LS)+N) <- + flux_NSN(:);
    A(mesh.diamants(:,_KS)+N,mesh.diamants(:,_KS)+N) <- + flux_NSNS(:);
    A(mesh.diamants(:,_KS)+N,mesh.diamants(:,_LS)+N) = -flux_NSNS(:);
    A(mesh.diamants(:,_KS)+N,mesh.diamants(:,_K)) <- + flux_NNS(:);
    A(mesh.diamants(:,_KS)+N,mesh.diamants(:,_L)) <- - flux_NNS(:);
    A(mesh.diamants(:,_LS)+N,mesh.diamants(:,_LS)+N) <- + flux_NSNS(:);
    A(mesh.diamants(:,_LS)+N,mesh.diamants(:,_KS)+N) = -flux_NSNS(:);
    A(mesh.diamants(:,_LS)+N,mesh.diamants(:,_K)) <- - flux_NNS(:);
    A(mesh.diamants(:,_LS)+N,mesh.diamants(:,_L)) <- + flux_NNS(:);
end;
//Sur le bord Dirichlet du domaine :
where (mesh.diamants(:,_LABEL)==-1) then
    A(mesh.diamants(:,_KS)+N,mesh.diamants(:,_KS)+N) = 1;
    A(mesh.diamants(:,_LS)+N,mesh.diamants(:,_LS)+N) = 1;
end;
```

Comme pour VF4, on construit le second membre diamant par diamant. En effet, on a vu que la mesure d'une maille primale κ peut être obtenue en sommant la mesure des demi-diamants \tilde{d}_κ contenus dans la maille κ ,

il en est de même pour la mesure d'une maille duale κ^* , elle peut être obtenue en sommant la mesure des demi-diamants $\tilde{\mathcal{D}}_{\kappa^*}$. Ainsi on calcule le second membre diamant par diamant, de la manière suivante

```

b(mesh.diamants(:,_K)) ← + (mesh.diamants(:,_MES_K_KS)+mesh.diamants(:,_MES_K_LS))...
                        * f  $\left(\frac{x_{\kappa} + x_{\kappa^*} + x_{\mathcal{L}^*}}{3}\right)$ ;

// A l'intérieur du domaine :
where (mesh.diamants(:,_LABEL)>0) then
    b(mesh.diamants(:,_L)) ← + (mesh.diamants(:,_MES_L_KS)+mesh.diamants(:,_MES_L_LS))...
                        * f  $\left(\frac{x_{\mathcal{L}} + x_{\kappa^*} + x_{\mathcal{L}^*}}{3}\right)$ ;
    b(mesh.diamants(:,_KS)+N) ← + (mesh.diamants(:,_MES_K_KS)+mesh.diamants(:,_MES_L_KS))...
                        * f  $\left(\frac{x_{\kappa^*} + x_{\kappa} + x_{\mathcal{L}}}{3}\right)$ ;
    b(mesh.diamants(:,_LS)+N) ← + (mesh.diamants(:,_MES_K_LS)+mesh.diamants(:,_MES_L_LS))...
                        * f  $\left(\frac{x_{\mathcal{L}^*} + x_{\kappa} + x_{\mathcal{L}}}{3}\right)$ ;
end;
```

On a restreint notre présentation à des conditions de Dirichlet homogène. Pour des conditions de Dirichlet non homogène, il suffit de changer le second membre en prenant en compte les valeurs de la solution exacte aux points considérés. Pour des conditions de Neumann non homogène, il suffit de déplacer les trois premières lignes de l'assemblage de la matrice dans la boucle à l'intérieur du domaine et de changer le second membre en prenant en compte la condition. Pour les conditions de Fourier, c'est un peu plus technique car il faut ajouter les inconnues de flux, on ne détaillera pas cette partie ici.

II.10.3 Prise en compte du tenseur anisotrope régulier

Si maintenant on travaille avec un tenseur anisotrope A régulier sur tout le domaine, voir 1) de la Remarque II.4. Les flux numériques s'écrivent toujours

$$\begin{aligned}
 F_{\kappa,\sigma}(u^T) &= \text{flux_NN}*(u_{\kappa} - u_{\mathcal{L}}) + \text{flux_NSN}*(u_{\kappa^*} - u_{\mathcal{L}^*}), \\
 F_{\kappa^*,\sigma^*}(u^T) &= \text{flux_NNS}*(u_{\kappa} - u_{\mathcal{L}}) + \text{flux_NSNS}*(u_{\kappa^*} - u_{\mathcal{L}^*}),
 \end{aligned}$$

mais maintenant avec

$$\begin{aligned}
 \text{flux_NN} &= \frac{m_{\sigma}^2}{2m_{\mathcal{D}}}(A(x_{\mathcal{D}}).\vec{n}_{\sigma\kappa}) \cdot \vec{n}_{\sigma\kappa}, & \text{flux_NSN} &= \frac{m_{\sigma}m_{\sigma^*}}{2m_{\mathcal{D}}}(A(x_{\mathcal{D}}).\vec{n}_{\sigma\kappa}) \cdot \vec{n}_{\sigma^*\kappa^*}, \\
 \text{flux_NNS} &= \text{flux_NSN}, & \text{flux_NSNS} &= \frac{m_{\sigma^*}^2}{2m_{\mathcal{D}}}(A(x_{\mathcal{D}}).\vec{n}_{\sigma^*\kappa^*}) \cdot \vec{n}_{\sigma^*\kappa^*}.
 \end{aligned}$$

Tout le reste de l'assemblage est strictement identique.

II.10.4 Prise en compte du tenseur anisotrope constant par maille primale

Si le tenseur anisotrope A est constant par maille primale, voir 2) de la Remarque II.4. Les flux numériques s'écrivent toujours

$$\begin{aligned}
 F_{\kappa,\sigma}(u^T) &= \text{flux_NN}*(u_{\kappa} - u_{\mathcal{L}}) + \text{flux_NSN}*(u_{\kappa^*} - u_{\mathcal{L}^*}), \\
 F_{\kappa^*,\sigma^*}(u^T) &= \text{flux_NNS}*(u_{\kappa} - u_{\mathcal{L}}) + \text{flux_NSNS}*(u_{\kappa^*} - u_{\mathcal{L}^*}),
 \end{aligned}$$

mais maintenant avec

$$\begin{aligned}
 \text{flux_NN} &= \frac{m_{\sigma}^2}{2m_{\mathcal{D}}}(\bar{A}^{\mathcal{D}}.\vec{n}_{\sigma\kappa}) \cdot \vec{n}_{\sigma\kappa}, & \text{flux_NSN} &= \frac{m_{\sigma}m_{\sigma^*}}{2m_{\mathcal{D}}}(\bar{A}^{\mathcal{D}}.\vec{n}_{\sigma\kappa}) \cdot \vec{n}_{\sigma^*\kappa^*}, \\
 \text{flux_NNS} &= \text{flux_NSN}, & \text{flux_NSNS} &= \frac{m_{\sigma^*}^2}{2m_{\mathcal{D}}}(\bar{A}^{\mathcal{D}}.\vec{n}_{\sigma^*\kappa^*}) \cdot \vec{n}_{\sigma^*\kappa^*}
 \end{aligned}$$

où \overline{A}^D est le tenseur équivalent défini dans la Remarque II.4 comme suit

$$\begin{aligned} (\overline{A}^D \cdot \vec{n}_{\sigma\kappa}) \cdot \vec{n}_{\sigma\kappa} &= \frac{m_{\sigma^*}(A_\kappa \cdot \vec{n}_{\sigma\kappa}) \cdot \vec{n}_{\sigma\kappa}(A_\kappa \cdot \vec{n}_{\sigma\kappa}) \cdot \vec{n}_{\sigma\kappa}}{m_{\sigma_\mathcal{L}}(A_\kappa \cdot \vec{n}_{\sigma\kappa}) \cdot \vec{n}_{\sigma\kappa} + m_{\sigma_\mathcal{K}}(A_\mathcal{L} \cdot \vec{n}_{\sigma\kappa}) \cdot \vec{n}_{\sigma\kappa}}, \\ (\overline{A}^D \cdot \vec{n}_{\sigma^*\kappa^*}) \cdot \vec{n}_{\sigma^*\kappa^*} &= \frac{m_{\sigma_\mathcal{L}}(A_\mathcal{L} \cdot \vec{n}_{\sigma^*\kappa^*}) \cdot \vec{n}_{\sigma^*\kappa^*} + m_{\sigma_\mathcal{K}}(A_\kappa \cdot \vec{n}_{\sigma^*\kappa^*}) \cdot \vec{n}_{\sigma^*\kappa^*}}{m_{\sigma^*}} \\ &\quad - \frac{m_{\sigma_\mathcal{K}} m_{\sigma_\mathcal{L}}}{m_{\sigma^*}} \frac{((A_\kappa \cdot \vec{n}_{\sigma\kappa}) \cdot \vec{n}_{\sigma^*\kappa^*} - (A_\mathcal{L} \cdot \vec{n}_{\sigma\kappa}) \cdot \vec{n}_{\sigma^*\kappa^*})^2}{m_{\sigma_\mathcal{L}}(A_\kappa \cdot \vec{n}_{\sigma\kappa}) \cdot \vec{n}_{\sigma\kappa} + m_{\sigma_\mathcal{K}}(A_\mathcal{L} \cdot \vec{n}_{\sigma\kappa}) \cdot \vec{n}_{\sigma\kappa}}, \\ (\overline{A}^D \cdot \vec{n}_{\sigma\kappa}) \cdot \vec{n}_{\sigma^*\kappa^*} &= \frac{m_{\sigma_\mathcal{L}}(A_\mathcal{L} \cdot \vec{n}_{\sigma\kappa}) \cdot \vec{n}_{\sigma^*\kappa^*}(A_\kappa \cdot \vec{n}_{\sigma\kappa}) \cdot \vec{n}_{\sigma\kappa} + m_{\sigma_\mathcal{K}}(A_\kappa \cdot \vec{n}_{\sigma\kappa}) \cdot \vec{n}_{\sigma^*\kappa^*}(A_\mathcal{L} \cdot \vec{n}_{\sigma\kappa}) \cdot \vec{n}_{\sigma\kappa}}{m_{\sigma_\mathcal{L}}(A_\kappa \cdot \vec{n}_{\sigma\kappa}) \cdot \vec{n}_{\sigma\kappa} + m_{\sigma_\mathcal{K}}(A_\mathcal{L} \cdot \vec{n}_{\sigma\kappa}) \cdot \vec{n}_{\sigma\kappa}}, \end{aligned}$$

avec $A_\kappa = A(x_\kappa)$ et $A_\mathcal{L} = A(x_\mathcal{L})$. Tout le reste de l'assemblage est encore une fois strictement identique.

II.11 Conclusions

En conclusion, on a présenté un schéma DDFV (II.18), pour le problème de diffusion anisotrope avec des conditions aux bords mixtes de type Dirichlet/Fourier (II.1), dont l'ordre de convergence théorique est 1 même lorsque le tenseur de diffusion anisotrope est discontinu. On utilise le schéma DDFV (II.18) étudié dans ce chapitre dans le chapitre suivant pour écrire des algorithmes de Schwarz discret sans recouvrement associés à des décompositions de domaines. Numériquement, on a même obtenu une super-convergence en norme L^2 qui est classique en volumes finis, cependant sa démonstration dans le cadre général est toujours un problème ouvert même pour le problème de Laplace. En effet, dans [FS88, WW88, LMV96], les auteurs montrent la super convergence de la solution du schéma (VF4) dans le cadre particulier de famille de maillages rectangles pour des points x_κ barycentres des rectangles $\kappa \in \mathfrak{M}$ et pour un terme source $H^1(\Omega)$. En ce qui concerne les méthodes DDFV, P. Omnès et K. Domelevo ont montré dans [DO05] la super convergence d'une fonction P^1 par diamant reconstruite grâce aux inconnues si le terme source est $H^1(\Omega)$ dans les deux situations suivantes :

- pour une famille de maillages rectangles avec les points x_κ les barycentres des rectangles $\kappa \in \mathfrak{M}$,
- pour une famille de maillages triangles homothétiques, c'est-à-dire lors du raffinement du maillage, chaque triangle est découpé en quatre triangles semblables en connectant les milieux de ses arêtes, avec les points x_κ barycentre des triangles $\kappa \in \mathfrak{M}$.

Plus récemment, P. Omnès a étendu dans [Omn10] ce résultat à des familles de maillages Delaunay-Voronoi.

Chapitre III

Algorithmes de Schwarz sans recouvrement dans le cadre DDFV

Ce chapitre¹ est dédié au développement de la version DDFV d'une méthode itérative de Schwarz sans recouvrement. C'est un travail publié dans *IMA J.N.A.* [BHK10], il a été réalisé avec la collaboration de F. Boyer et F. Hubert. Une méthode de Schwarz discrète permet d'approcher les solutions du problème de diffusion anisotrope en profitant d'une décomposition en sous-domaines du domaine de calcul. Tout d'abord, on rappelle le schéma DDFV pour les problèmes de diffusion anisotrope pour des conditions aux bords de Dirichlet (voir Chapitre II)

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } u^\tau \in \mathbb{R}^\tau \text{ tel que,} \\ u_\kappa = g_\kappa, \quad \forall \kappa \in \partial\mathfrak{M}, \quad u_{\kappa^*} = g_{\kappa^*}, \quad \forall \kappa^* \in \partial\mathfrak{M}^*, \\ -\operatorname{div}^\kappa \left(\mathcal{A}^\mathfrak{D}(\nabla^{\tilde{\mathfrak{D}}} u^\tau) \right) = f_\kappa, \quad \forall \kappa \in \mathfrak{M}, \\ -\operatorname{div}^{\kappa^*} \left(\mathcal{A}^\mathfrak{D}(\nabla^{\tilde{\mathfrak{D}}} u^\tau) \right) = f_{\kappa^*}, \quad \forall \kappa^* \in \mathfrak{M}^*. \end{array} \right. \quad (\text{III.1})$$

L'algorithme de Schwarz DDFV (voir Section III.2) est réalisé en décomposant le problème de diffusion anisotrope sur chaque sous-domaine avec des conditions de transmission de type Fourier. On va ainsi se servir du schéma DDFV (II.18) avec des conditions mixtes du Chapitre II sur chaque sous-domaine. On illustre à la fois l'utilisation de notre algorithme de Schwarz DDFV comme solveur itératif et comme préconditionneur dans la méthode de gradient conjugué pour résoudre le schéma (III.1).

Avant d'étudier sa convergence (voir Théorème III.5), on montre que la limite de notre algorithme de Schwarz DDFV est bien solution du schéma DDFV (III.1) sur tout le domaine (voir Théorème III.4). C'est cette étude qui nous a conduit à utiliser la méthode 3 du Chapitre II sur chaque sous-domaine (voir Remarque III.7). On rappelle que cette méthode consiste à introduire des inconnues de flux sur les demi-arêtes des bords Fourier. Dans l'article [BHK10], nous avons travaillé dans le cadre général m-DDFV proposé dans [BH08], ici on considère uniquement le cas particulier où le tenseur anisotrope est régulier sur les demi-diamants.

Dans les Sections III.5 et III.6, les tests numériques ont été réalisés avec le maillage dual direct, ils illustrent le comportement de notre algorithme de Schwarz DDFV sans recouvrement. Les tests numériques de la Section III.5.6 illustrent l'influence du choix du paramètre des conditions de Fourier sur les performances de l'algorithme. En particulier, on observe une performance assez lente de la méthode même avec le choix optimal du paramètre proposé dans [Dub07, Gan06], c'est-à-dire qu'un grand nombre d'itérations est nécessaire pour atteindre une bonne précision. Néanmoins, on sait (voir par exemple [Saa03]) que ces méthodes non optimisées peuvent servir de préconditionneur dans un solveur itératif (GMRES, gradient conjugué, ...). On étudie ainsi dans la Section III.6 la performance de la méthode de gradient conjugué préconditionnée avec notre algorithme de Schwarz DDFV pour résoudre le schéma DDFV (III.1) sur tout le domaine.

¹Un aide mémoire rassemblant les notations de ce chapitre est disponible page 242.

III.1 Maillages compatibles. Maillage composite

On considère ici uniquement le cas où Ω_1, Ω_2 sont deux sous-domaines connexes tels que $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \Gamma$, avec Γ l'interface entre les deux sous-domaines $\Gamma = \overline{\Omega_1} \cap \overline{\Omega_2}$ et on suppose que Γ est connexe et que $\Gamma \cap \partial\Omega \neq \emptyset$. Ces hypothèses ne sont pas nécessaires et servent juste à simplifier la présentation.

Pour chaque sous-domaine Ω_i , on considère un maillage DDFV $\mathcal{T}_i = (\mathfrak{M}_i \cup \partial\mathfrak{M}_i, \mathfrak{M}_i^* \cup \partial\mathfrak{M}_i^*)$ et le maillage diamant associé \mathfrak{D}_i . On distingue les mailles du bord Dirichlet de celles du bord Fourier. Ainsi on note $\partial\mathfrak{M}_{i,D} = \{\mathcal{L} \in \partial\mathfrak{M}_i, x_{\mathcal{L}} \in \partial\Omega_i \cap \partial\Omega\}$, $\partial\mathfrak{M}_{i,\Gamma} = \{\mathcal{L} \in \partial\mathfrak{M}_i, x_{\mathcal{L}} \in \Gamma\}$, $\partial\mathfrak{M}_{i,D}^* = \{\kappa^* \in \partial\mathfrak{M}_i^*, x_{\kappa^*} \in \partial\Omega_i \cap \partial\Omega\}$, $\partial\mathfrak{M}_{i,\Gamma}^* = \{\kappa^* \in \partial\mathfrak{M}_i^*, x_{\kappa^*} \in \Gamma \setminus \partial\Omega\}$ et enfin $\mathfrak{D}_{i,\Gamma} = \{\mathcal{D} \in \mathfrak{D}_i, x_{\mathcal{D}} \in \Gamma\}$. On va supposer que les deux maillages sont compatibles au sens suivant :

Définition III.1

On dit que \mathcal{T}_1 et \mathcal{T}_2 sont compatibles, si les deux conditions suivantes sont vérifiées :

1. Les deux maillages ont les mêmes sommets sur Γ . Ceci implique en particulier que les deux maillages ont les mêmes mailles dégénérées sur Γ , c'est-à-dire $\partial\mathfrak{M}_{1,\Gamma} = \partial\mathfrak{M}_{2,\Gamma}$.
2. Le centre $x_{\mathcal{L}}$ des mailles dégénérées de l'interface $\mathcal{L} = [x_{\kappa^*}, x_{\mathcal{L}^*}] \in \partial\mathfrak{M}_{1,\Gamma} = \partial\mathfrak{M}_{2,\Gamma}$ est l'intersection de $(x_{\kappa^*}, x_{\mathcal{L}^*})$ et $(x_{\kappa_1}, x_{\kappa_2})$, où $\kappa_1 \in \mathfrak{M}_1$ et $\kappa_2 \in \mathfrak{M}_2$ sont les deux mailles primales telles que $\mathcal{L} \subset \partial\kappa_1$ et $\mathcal{L} \subset \partial\kappa_2$.

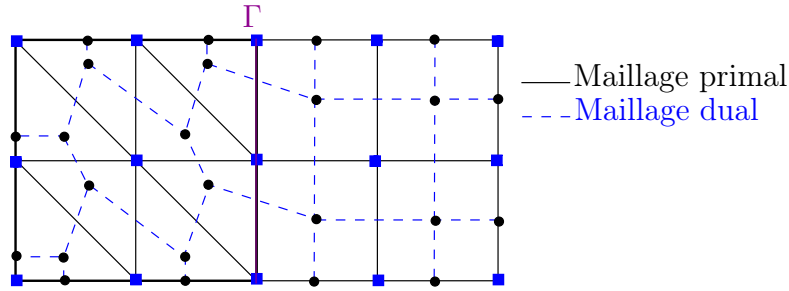


FIG. III.1 – Un maillage DDFV \mathcal{T} sur le domaine Ω .

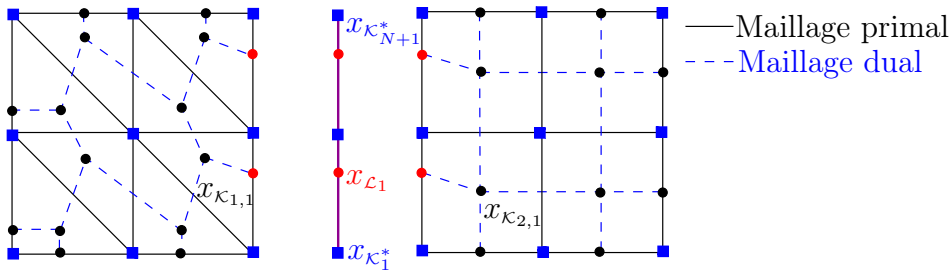


FIG. III.2 – Les maillages compatibles \mathcal{T}_1 et \mathcal{T}_2 correspondant au maillage DDFV \mathcal{T} de la Figure III.1.

Remarque III.2

En pratique, les deux conditions de compatibilité ne représentent pas de contraintes importantes sur les maillages à considérer. En effet, on va normalement rencontrer deux situations opposées :

1. soit \mathcal{T} le maillage DDFV sur tout le domaine Ω (voir la Figure III.1) est tel que chaque maille primale $\kappa \in \mathfrak{M}$ est soit dans Ω_1 , $\kappa \subset \Omega_1$ soit dans Ω_2 , $\kappa \subset \Omega_2$. Dans ce cas, la construction des deux maillages compatibles \mathcal{T}_i revient uniquement à diviser les mailles duales traversées par l'interface Γ (voir la Figure III.2).
2. soit on a a priori des maillages DDFV indépendants \mathcal{T}_i pour chaque sous-domaine Ω_i (voir la Figure III.3). Dans ce cas, on a juste à rajouter les sommets de Γ , en s'assurant que $\partial\mathfrak{M}_{1,\Gamma} = \partial\mathfrak{M}_{2,\Gamma}$ et puis de diviser les mailles duales traversées par l'interface $\partial\mathfrak{M}_{i,\Gamma}$ de manière à prendre en compte

ces nouveaux sommets. Les centres $x_{\mathcal{L}}$ des mailles primales dégénérées sont alors définis grâce à la Définition III.1 (voir la Figure III.4). Remarque que cette modification sur les maillages n'augmente pas significativement le nombre d'inconnues du problème.

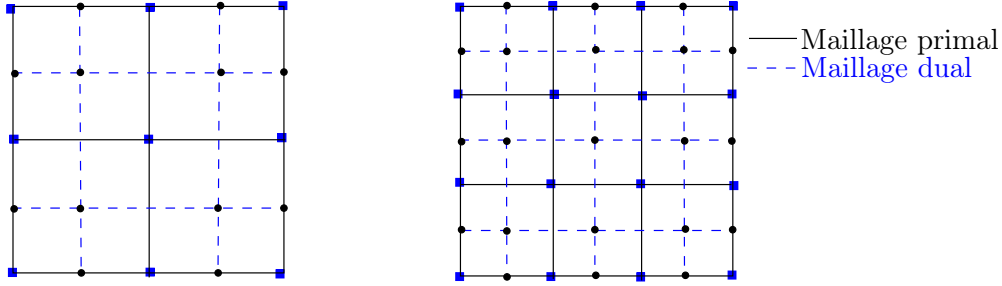


FIG. III.3 – Les deux maillages DDFV indépendants \mathcal{T}_1 , \mathcal{T}_2 pour chaque sous-domaine Ω_i .

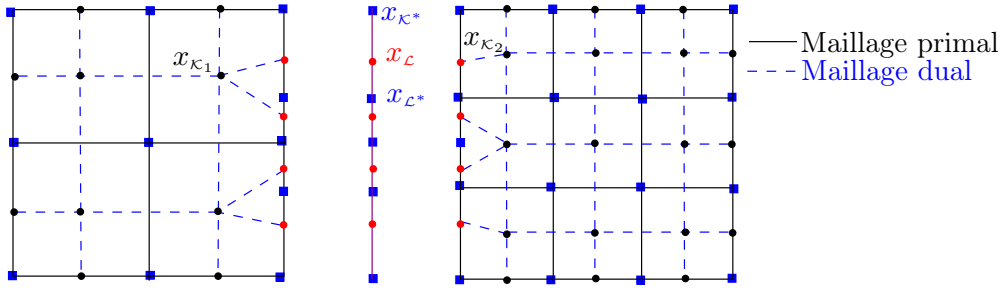


FIG. III.4 – Le maillage DDFV compatible correspondant aux deux maillages indépendants \mathcal{T}_1 , \mathcal{T}_2 de la Figure III.3.

Soit deux maillages compatibles \mathcal{T}_1 et \mathcal{T}_2 au sens de la Définition III.1, un maillage DDFV composite $\mathcal{T} = (\mathfrak{M} \cup \partial\mathfrak{M}, \mathfrak{M}^* \cup \partial\mathfrak{M}^*)$ peut être construit sur tout le domaine Ω . On remarque que dans le cas 1 de la Remarque III.2, le maillage composite \mathcal{T} est vraiment disponible par construction (voir la Figure III.1). Dans les autres cas, le maillage primal composite est simplement donné par $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_1 \cup \mathfrak{M}_2$ et $\partial\mathfrak{M} = \partial\mathfrak{M}_{1,D} \cup \partial\mathfrak{M}_{2,D}$. Puis, on a besoin de réunir les mailles duales de l'interface des deux maillages correspondant au même sommet. Pour cela, on introduit l'ensemble

$$\mathfrak{M}_{\Gamma}^* = \{\kappa^* = \overbrace{\kappa_1^* \cup \kappa_2^*}^{\circ}, \kappa_1^* \in \partial\mathfrak{M}_{1,\Gamma}^*, \kappa_2^* \in \partial\mathfrak{M}_{2,\Gamma}^*, \text{ telles que } x_{\kappa_1^*} = x_{\kappa_2^*} \in \Gamma\},$$

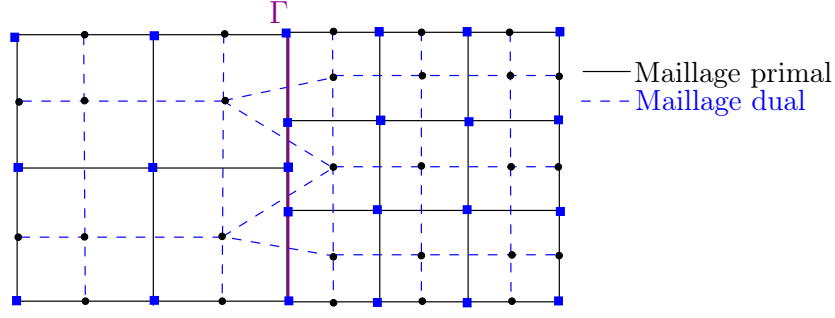
il faut noter que l'on ne considère pas les sommets du bord $\partial\Omega$ dans la formule ci-dessus, grâce à la définition de $\partial\mathfrak{M}_{i,\Gamma}^*$. Ainsi le maillage dual composite intérieur \mathfrak{M}^* est défini par $\mathfrak{M}^* = \mathfrak{M}_1^* \cup \mathfrak{M}_2^* \cup \mathfrak{M}_{\Gamma}^*$. Pour le maillage dual composite du bord, on a besoin de réunir les mailles duales des sommets appartenant à $\Gamma \cap \partial\Omega$, pour cela on introduit l'ensemble suivant

$$\mathfrak{M}_D^* = \{\kappa^* = \overbrace{\kappa_1^* \cup \kappa_2^*}^{\circ}, \kappa_1^* \in \partial\mathfrak{M}_{1,D}^*, \kappa_2^* \in \partial\mathfrak{M}_{2,D}^*, \text{ telles que } x_{\kappa_1^*} = x_{\kappa_2^*}, \text{ ie pour } x_{\kappa_1^*} = x_{\kappa_2^*} \in \Gamma \cap \partial\Omega\},$$

et il faut enlever $\partial\mathfrak{M}_{i,D}^*$ les mailles duales de sommet appartenant à $\Gamma \cap \partial\Omega$, ainsi on note

$$\mathfrak{M}_{i,D}^* = \{\kappa^* \in \partial\mathfrak{M}_{i,D}^* \text{ telles que } x_{\kappa^*} \notin \Gamma \cap \partial\Omega\}.$$

Finalement, les mailles duales du bord sont données par $\partial\mathfrak{M}^* = \mathfrak{M}_{1,D}^* \cup \mathfrak{M}_{2,D}^* \cup \mathfrak{M}_{\Gamma}^*$ (voir la Figure III.5). On remarque que les mailles primales dégénérées de l'interface $\mathcal{L} \in \partial\mathfrak{M}_{1,\Gamma} = \partial\mathfrak{M}_{2,\Gamma}$ ne sont plus présentes dans le maillage composite. En particulier, les inconnues correspondantes dans le schéma suivant ne correspondent pas naturellement aux inconnues du schéma DDFV (III.1) sur le maillage composite \mathcal{T} .

FIG. III.5 – Le maillage composite \mathcal{T} correspondant aux deux maillages compatibles de la Figure III.4.

Pour deux maillages compatibles \mathcal{T}_1 et \mathcal{T}_2 , on note $N + 1$ le nombre de sommets des deux maillages appartenant à l'interface Γ (ce nombre est le même pour les deux maillages grâce aux conditions de compatibilité). Pour faciliter les écritures on a besoin de trier et de numéroté ces $N + 1$ sommets $x_{\mathcal{K}_1^*}, \dots, x_{\mathcal{K}_{N+1}^*}$, tel que $[x_{\mathcal{K}_k^*}, x_{\mathcal{K}_{k+1}^*}] \in \partial\mathcal{M}_{i,\Gamma} = \partial\mathcal{M}_{j,\Gamma}$ et $[x_{\mathcal{K}_1^*}, x_{\mathcal{K}_{N+1}^*}] = \Gamma \cap \partial\Omega$ (voir la Figure III.6). On fait la même chose avec les N centres $x_{\mathcal{L}} \in \Gamma$ qui sont triés et numérotés de la manière suivante : $x_{\mathcal{L}_1}, \dots, x_{\mathcal{L}_N}$ avec $\mathcal{L}_k = [x_{\mathcal{K}_k^*}, x_{\mathcal{K}_{k+1}^*}]$.

FIG. III.6 – Numérotation des éléments de l'interface Γ .

III.2 Présentation du solveur itératif

L'idée des méthodes de décomposition de domaine est d'utiliser le schéma (II.18) avec la notation $\mathcal{L}_{\Omega_i,\Gamma}^{\tau_i}$ sur chaque sous-domaine de manière à construire une méthode itérative de Schwarz qui converge vers la solution du schéma DDFV (III.1) standard sur tout le domaine Ω . Plus précisément, on propose l'algorithme suivant :

- Pour $i \in \{1, 2\}$, on choisit $h_0^{\tau_i} \in \Phi_{\Gamma}^{\tau_i}$.
- Pour tout $n \geq 0$, et pour $i, j \in \{1, 2\}, j \neq i$:
 - On obtient $U_{n+1}^{\tau_i} = (u_{n+1}^{\tau_i}, \varphi_{n+1}^{\tau_i}) \in \mathbb{R}^{\tau_i} \times \Phi_{\Gamma}^{\tau_i}$ solution de

$$\mathcal{L}_{\Omega_i,\Gamma}^{\tau_i}(u_{n+1}^{\tau_i}, \varphi_{n+1}^{\tau_i}, f^{\tau_i}, g^{\tau_i}, h_n^{\tau_j}) = 0. \quad (\text{III.2})$$

- On évalue $h_{n+1}^{\tau_i}$ grâce à

$$\forall [x_{\mathcal{K}^*}, x_{\mathcal{L}}] \in \partial\mathcal{A}_{\Gamma}, \quad h_{i,\mathcal{K}^*,\mathcal{L}}^{n+1} = -\varphi_{i,\mathcal{K}^*,\mathcal{L}}^{n+1} + \lambda \frac{u_{i,\mathcal{K}^*}^{n+1} + u_{i,\mathcal{L}}^{n+1}}{2}. \quad (\text{III.3})$$

On remarque que l'égalité (III.3) est exactement la contrepartie discrète de la condition d'interface de P. L. Lions au niveau continu [Lio90] :

$$(A(x) \cdot \nabla u_i^{n+1}) \cdot \vec{n}_i + \lambda u_i^{n+1} = -(A(x) \cdot \nabla u_j^n) \cdot \vec{n}_j + \lambda u_j^n,$$

où \vec{n}_i est orienté de Ω_i vers Ω_j et $\vec{n}_j = -\vec{n}_i$. Ceci donne

$$-(A(x) \cdot \nabla u_i^{n+1}) \cdot \vec{n}_i = \lambda u_i^{n+1} - h_j^n,$$

avec $h_j^n = -(A(x) \cdot \nabla u_j^n) \cdot \vec{n}_j + \lambda u_j^n$. En effet, $\varphi_{i,\kappa^*,\mathcal{L}}^{n+1}$ (resp. $\frac{u_{i,\kappa^*}^{n+1} + u_{i,\mathcal{L}}^{n+1}}{2}$) est supposé approcher $(A(x) \cdot \nabla u_i^{n+1}) \cdot \vec{n}_i$ (resp. u_i^{n+1}).

Grâce au Théorème II.7, on a le résultat suivant.

Proposition III.3

Pour tout choix de $h_0^{\tau_i}$, l'algorithme (III.2)-(III.3) définit une unique suite $(U_n^{\tau_i})_n$ dans $\mathbb{R}^{\tau_i} \times \Phi_{\Gamma}^{\tau_i}$, pour $i = 1, 2$.

On souhaite maintenant montrer que cette suite converge vers la solution du schéma DDFV (III.1) sur le domaine complet Ω .

III.3 Construction préliminaire

La première étape dans l'analyse est de montrer que la solution du schéma DDFV (III.1) sur tout le domaine Ω peut s'écrire comme la limite possible de la suite $(U_n^{\tau_i})_n$, $i \in \{1, 2\}$ obtenue par l'algorithme de Schwarz. Le résultat de manière précise est le suivant :

Théorème III.4 (Lien avec le schéma DDFV)

Soit u^{τ} la solution du schéma DDFV (III.1) sur tout le domaine Ω associé au maillage composite \mathcal{T} construit avec \mathcal{T}_1 et \mathcal{T}_2 . Pour $i \in \{1, 2\}$, il existe $(u^{\tau_i}, \varphi^{\tau_i}, h^{\tau_i}) \in \mathbb{R}^{\tau_i} \times \Phi_{\Gamma}^{\tau_i} \times \Phi_{\Gamma}^{\tau_i}$ tel que, on a

$$\mathcal{L}_{\Omega_i, \Gamma}^{\tau_i}(u^{\tau_i}, \varphi^{\tau_i}, f^{\tau_i}, g^{\tau_i}, h^{\tau_i}) = 0, \quad (\text{III.4})$$

de plus,

$$\begin{cases} u_{i,\kappa} = u_{\kappa}, & \text{pour } \kappa \in \mathfrak{M}_i \cup \partial \mathfrak{M}_{i,D}, \\ u_{i,\kappa^*} = u_{\kappa^*}, & \text{pour } \kappa^* \in \mathfrak{M}_i^* \cup \partial \mathfrak{M}_i^*, \end{cases} \quad (\text{III.5})$$

et enfin

$$\sum_{k=1}^N \left(\varphi_{i,\kappa_k^*,\mathcal{L}_k} - \varphi_{i,\kappa_{k+1}^*,\mathcal{L}_k} \right) = 0. \quad (\text{III.6})$$

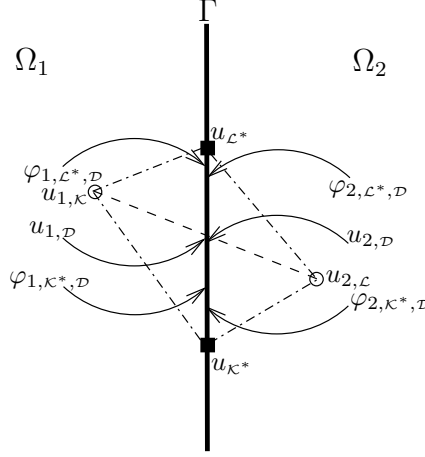
Démonstration : Les équations (III.5) définissent toutes les valeurs de u^{τ_i} , à part les valeurs sur les mailles primales dégénérées à l'intérieur de Γ , sur les deux côtés de l'interface. Par conséquent, il reste à définir les valeurs de $u_{i,\mathcal{D}}$ et $\varphi_{i,\kappa^*,\mathcal{D}}$ pour tout diamant $\mathcal{D} \in \mathfrak{D}$ qui intersecte l'interface Γ (voir la Figure III.7).

Etape 1 - Calcul des valeurs de l'interface. On note $\kappa \in \mathfrak{M}_1$ et $\mathcal{L} \in \mathfrak{M}_2$ les mailles primales telles que $\mathcal{D} \cap \kappa \neq \emptyset$ et $\mathcal{D} \cap \mathcal{L} \neq \emptyset$. Un tel diamant s'écrit $\mathcal{D} = \tilde{\mathcal{D}}_{\kappa} \cup \tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{L}}$ avec $\tilde{\mathcal{D}}_{\kappa} \in \mathfrak{D}_1$, $\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{L}} \in \mathfrak{D}_2$. Nous imposons d'abord l'égalité $u_{1,\mathcal{D}} = u_{2,\mathcal{D}}$. Cette valeur commune notée $u_{\mathcal{D}}$ est en fait égale à u_{σ} donnée par l'équation (II.3) :

$$u_{\mathcal{D}} = \frac{m_{\sigma\kappa} m_{\sigma\mathcal{L}}}{((A_{\kappa} m_{\sigma\mathcal{L}} + A_{\mathcal{L}} m_{\sigma\kappa}) \cdot \vec{n}_{\sigma\kappa}) \cdot \vec{n}_{\sigma\kappa}} \left[u_{1,\kappa} \frac{(A_{\kappa} \cdot \vec{n}_{\sigma\kappa}) \cdot \vec{n}_{\sigma\kappa}}{m_{\sigma\kappa}} + u_{2,\mathcal{L}} \frac{(A_{\mathcal{L}} \cdot \vec{n}_{\sigma\kappa}) \cdot \vec{n}_{\sigma\kappa}}{m_{\sigma\mathcal{L}}} + \frac{u_{\mathcal{L}^*} - u_{\kappa^*}}{m_{\sigma}} ((A_{\mathcal{L}} - A_{\kappa}) \cdot \vec{n}_{\sigma^* \kappa^*}) \cdot \vec{n}_{\sigma\kappa} \right]. \quad (\text{III.7})$$

Etape 2 - Conséquences sur les flux numériques. La valeur de $u_{\mathcal{D}}$ donnée par (III.7) implique, avec notre choix particulier de $\mathcal{A}^{\mathcal{D}}(\nabla^{\tilde{\mathcal{D}}})$, les égalités suivantes

$$\mathcal{A}_{\mathcal{D}}(\nabla^{\tilde{\mathcal{D}}} u^{\tau}) \cdot \vec{n}_{\sigma\kappa} = (A_{\kappa} \cdot \nabla^{\tilde{\mathcal{D}}_{\kappa}} u^{\tau_1}) \cdot \vec{n}_{\sigma\kappa} = (A_{\mathcal{L}} \cdot \nabla^{\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{L}}} u^{\tau_2}) \cdot \vec{n}_{\sigma\kappa}, \quad (\text{III.8})$$

FIG. III.7 – Notation dans un diamant \mathcal{D} intersectant l'interface Γ .

$$m_{\sigma^*} \mathcal{A}_{\mathcal{D}}(\nabla^{\tilde{\mathcal{D}}} u^T) \cdot \vec{n}_{\sigma^* \kappa^*} = m_{\sigma_{\kappa}}(A_{\kappa} \cdot \nabla^{\tilde{\mathcal{D}} \kappa} u^{\tau_1}) \cdot \vec{n}_{\sigma^* \kappa^*} + m_{\sigma_{\mathcal{L}}}(A_{\mathcal{L}} \cdot \nabla^{\tilde{\mathcal{D}} \mathcal{L}} u^{\tau_2}) \cdot \vec{n}_{\sigma^* \kappa^*}. \quad (\text{III.9})$$

Celles-ci proviennent de la propriété (II.2). Donnons maintenant une démonstration détaillée de (III.9). Dans la Remarque II.4, on a vu que l'on peut écrire $\mathcal{A}_{\mathcal{D}}(\nabla^{\tilde{\mathcal{D}}} u^T) = \overline{A}^{\mathcal{D}} \cdot \nabla^{\mathcal{D}} u^T$ avec la matrice $\overline{A}^{\mathcal{D}}$ définie par (II.4). Ainsi en utilisant la Définition II.1 du gradient discret par demi-diamant, on obtient

$$\begin{aligned} & m_{\sigma^*} \mathcal{A}_{\mathcal{D}}(\nabla^{\tilde{\mathcal{D}}} u^T) \cdot \vec{n}_{\sigma^* \kappa^*} - m_{\sigma_{\kappa}}(A_{\kappa} \cdot \nabla^{\tilde{\mathcal{D}} \kappa} u^{\tau_1}) \cdot \vec{n}_{\sigma^* \kappa^*} - m_{\sigma_{\mathcal{L}}}(A_{\mathcal{L}} \cdot \nabla^{\tilde{\mathcal{D}} \mathcal{L}} u^{\tau_2}) \cdot \vec{n}_{\sigma^* \kappa^*} \\ &= \frac{u_{2,\mathcal{L}} - u_{1,\kappa}}{2m_{\mathcal{D}}} m_{\sigma^*} m_{\sigma}(\overline{A}^{\mathcal{D}} \cdot \vec{n}_{\sigma \kappa}) \cdot \vec{n}_{\sigma^* \kappa^*} + \frac{(u_{\mathcal{L}^*} - u_{\kappa^*})}{2m_{\mathcal{D}}} m_{\sigma^*} m_{\sigma^*}(\overline{A}^{\mathcal{D}} \cdot \vec{n}_{\sigma^* \kappa^*}) \cdot \vec{n}_{\sigma^* \kappa^*} \\ &\quad - \frac{u_{\mathcal{D}} - u_{1,\kappa}}{2m_{\mathcal{D}\kappa}} m_{\sigma_{\kappa}} m_{\sigma}(A_{\kappa} \cdot \vec{n}_{\sigma \kappa}) \cdot \vec{n}_{\sigma^* \kappa^*} - \frac{(u_{\mathcal{L}^*} - u_{\kappa^*})}{2m_{\mathcal{D}\kappa}} m_{\sigma_{\kappa}} m_{\sigma_{\kappa}}(A_{\kappa} \cdot \vec{n}_{\sigma \kappa}) \cdot \vec{n}_{\sigma^* \kappa^*} \\ &\quad + \frac{u_{\mathcal{D}} - u_{2,\mathcal{L}}}{2m_{\mathcal{D}\mathcal{L}}} m_{\sigma_{\mathcal{L}}} m_{\sigma}(A_{\mathcal{L}} \cdot \vec{n}_{\sigma \mathcal{L}}) \cdot \vec{n}_{\sigma^* \kappa^*} - \frac{(u_{\mathcal{L}^*} - u_{\kappa^*})}{2m_{\mathcal{D}\mathcal{L}}} m_{\sigma_{\mathcal{L}}} m_{\sigma_{\mathcal{L}}}(A_{\mathcal{L}} \cdot \vec{n}_{\sigma \mathcal{L}}) \cdot \vec{n}_{\sigma^* \kappa^*}. \end{aligned}$$

En utilisant la formule (III.7), on peut réorganiser tous les termes comme suit

$$\begin{aligned} & m_{\sigma^*} \left(\overline{A}^{\mathcal{D}} \cdot \nabla^{\mathcal{D}} u^T \right) \cdot \vec{n}_{\sigma^* \kappa^*} - m_{\sigma_{\kappa}} \left(A_{\kappa} \cdot \nabla^{\mathcal{D}^1} u^{\tau_1} \right) \cdot \vec{n}_{\sigma^* \kappa^*} - m_{\sigma_{\mathcal{L}}} \left(A_{\mathcal{L}} \cdot \nabla^{\mathcal{D}^2} u^{\tau_2} \right) \cdot \vec{n}_{\sigma^* \kappa^*} \\ &= u_{1,\kappa} T_{\kappa} + u_{2,\mathcal{L}} T_{\mathcal{L}} + (u_{\kappa^*} - u_{\mathcal{L}^*}) T^*, \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} T_{\kappa} &= \frac{1}{\sin(\alpha_{\mathcal{D}})} \left[(A_{\kappa} \cdot \vec{n}_{\sigma \kappa}) \cdot \vec{n}_{\sigma^* \kappa^*} - (\overline{A}^{\mathcal{D}} \cdot \vec{n}_{\sigma \kappa}) \cdot \vec{n}_{\sigma^* \kappa^*} \right. \\ &\quad \left. + ((A_{\mathcal{L}} - A_{\kappa}) \cdot \vec{n}_{\sigma \kappa}) \cdot \vec{n}_{\sigma^* \kappa^*} m_{\sigma_{\mathcal{L}}} \frac{(A_{\kappa} \cdot \vec{n}_{\sigma \kappa}) \cdot \vec{n}_{\sigma \kappa}}{((A_{\kappa} m_{\sigma_{\mathcal{L}}} + A_{\mathcal{L}} m_{\sigma_{\kappa}}) \cdot \vec{n}_{\sigma \kappa}) \cdot \vec{n}_{\sigma \kappa}} \right], \\ T_{\mathcal{L}} &= \frac{1}{\sin(\alpha_{\mathcal{D}})} \left[(\overline{A}^{\mathcal{D}} \cdot \vec{n}_{\sigma \mathcal{L}}) \cdot \vec{n}_{\sigma^* \kappa^*} - (A_{\mathcal{L}} \cdot \vec{n}_{\sigma \mathcal{L}}) \cdot \vec{n}_{\sigma^* \kappa^*} \right. \\ &\quad \left. + ((A_{\mathcal{L}} - A_{\kappa}) \cdot \vec{n}_{\sigma \mathcal{L}}) \cdot \vec{n}_{\sigma^* \kappa^*} m_{\sigma_{\kappa}} \frac{(A_{\mathcal{L}} \cdot \vec{n}_{\sigma \mathcal{L}}) \cdot \vec{n}_{\sigma \mathcal{L}}}{((A_{\kappa} m_{\sigma_{\mathcal{L}}} + A_{\mathcal{L}} m_{\sigma_{\kappa}}) \cdot \vec{n}_{\sigma \mathcal{L}}) \cdot \vec{n}_{\sigma \mathcal{L}}} \right], \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} T^* &= \frac{1}{\sin(\alpha_{\mathcal{D}})} \left[\frac{m_{\sigma^*}}{m_{\sigma}} (\overline{A}^{\mathcal{D}} \cdot \vec{n}_{\sigma^* \kappa^*}) \cdot \vec{n}_{\sigma^* \kappa^*} - \frac{m_{\sigma_{\kappa}}}{m_{\sigma}} (A_{\kappa} \cdot \vec{n}_{\sigma^* \kappa^*}) \cdot \vec{n}_{\sigma^* \kappa^*} \right. \\ &\quad \left. - \frac{m_{\sigma_{\mathcal{L}}}}{m_{\sigma}} (A_{\mathcal{L}} \cdot \vec{n}_{\sigma^* \kappa^*}) \cdot \vec{n}_{\sigma^* \kappa^*} + \frac{m_{\sigma_{\kappa}} m_{\sigma_{\mathcal{L}}}}{m_{\sigma}} \frac{((A_{\mathcal{L}} - A_{\kappa}) \cdot \vec{n}_{\sigma^* \kappa^*}) \cdot \vec{n}_{\sigma \kappa}}{((A_{\kappa} m_{\sigma_{\mathcal{L}}} + A_{\mathcal{L}} m_{\sigma_{\kappa}}) \cdot \vec{n}_{\sigma \kappa}) \cdot \vec{n}_{\sigma \kappa}} \right]. \end{aligned}$$

Grâce aux valeurs de $\overline{A}^{\mathcal{D}}$ définies par (II.4), on a directement que les trois termes T_{κ} , $T_{\mathcal{L}}$ et T^* sont nuls.

Etape 3 - Calcul des inconnues de flux. Dans la suite, tous les objets mathématiques associés à un sous-domaine Ω_i seront marqués par l'indice i comme suit

- \mathcal{D}_k^i est le k^{e} diamant appartenant à $\mathfrak{D}_{i,\Gamma}$ en respectant la numérotation introduite dans la Figure III.6. En particulier, $\mathcal{D}_k^i \subset \Omega_i$.
- $\kappa_{i,k}^*$ est la k^{e} maille duale appartenant à $\partial\mathfrak{M}_{i,\Gamma}^*$ avec $\kappa_{i,k}^* \subset \Omega_i$.

On a $2N$ inconnues $\varphi_{i,\kappa^*,\mathcal{L}}$ et seulement $2N - 1$ équations données par (II.13d) et (II.13e), c'est pourquoi on impose la condition de normalisation (III.6) afin de définir de manière unique les inconnues de flux $\varphi_{i,\kappa^*,\mathcal{L}}$. On va étudier séparément ce qui se passe dans chaque sous-domaine. On a à résoudre le système linéaire correspondant aux équations (II.13d)-(II.13e) et (III.6) pour le sous-domaine Ω_1

$$\underbrace{\begin{pmatrix} d_1 & d_2 & & & \\ & d_2 & d_3 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & d_{2N-1} & d_{2N} \\ 1 & -1 & \cdots & 1 & -1 \end{pmatrix}}_{=B} \underbrace{\begin{pmatrix} \varphi_{1,\kappa_1^*,\mathcal{L}_1} \\ \varphi_{1,\kappa_2^*,\mathcal{L}_1} \\ \vdots \\ \varphi_{1,\kappa_N^*,\mathcal{L}_N} \\ \varphi_{1,\kappa_{N+1}^*,\mathcal{L}_N} \end{pmatrix}}_{=\Phi_1} = \begin{pmatrix} m_{\sigma_1} \left(A_{\mathcal{D}_1^1} \cdot \nabla^{\mathcal{D}_1^1} u^{\tau_1} \right) \cdot \vec{\mathbf{n}}_{\sigma_{\mathcal{L}_1}} \\ -m_{\kappa_{1,2}^*} f_{\kappa_{1,2}^*} - \sum_{\mathcal{D} \in \mathfrak{D}_{\kappa_{1,2}^*}} m_{\sigma^*} \mathcal{A}_{\mathcal{D}}(\nabla^{\tilde{\mathcal{D}}} u^{\tau_1}) \cdot \vec{\mathbf{n}}_{\sigma^* \kappa_{1,2}^*} \\ \vdots \\ m_{\sigma_N} \left(A_{\mathcal{D}_N^1} \cdot \nabla^{\mathcal{D}_N^1} u^{\tau_1} \right) \cdot \vec{\mathbf{n}}_{\sigma_{\mathcal{L}_N}} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (\text{III.10})$$

avec les notations $d_{2k-1} = m_{\kappa_k^*,\mathcal{L}_k}$ et $d_{2k} = m_{\kappa_{k+1}^*,\mathcal{L}_k}$ pour tout $k = 1, \dots, N$. On voit facilement que le déterminant de B vaut $\det(B) = - \left(\prod_{i=1}^{2N} d_i \right) \left(\sum_{j=1}^{2N} \frac{1}{d_j} \right)$. Ainsi B est inversible et il existe un unique vecteur Φ_1 solution de (III.10).

On s'intéresse maintenant au sous-domaine Ω_2 . On pose $\Phi_2 = -\Phi_1$ et on a à montrer que Φ_2 vérifie le système suivant sur Ω_2 :

$$B\Phi_2 = \begin{pmatrix} -m_{\sigma_1} \left(A_{\mathcal{D}_1^2} \cdot \nabla^{\mathcal{D}_1^2} u^{\tau_2} \right) \cdot \vec{\mathbf{n}}_{\sigma_{\mathcal{L}_1}} \\ -m_{\kappa_{2,2}^*} f_{\kappa_{2,2}^*} - \sum_{\mathcal{D} \in \mathfrak{D}_{\kappa_{2,2}^*}} m_{\sigma^*} \mathcal{A}_{\mathcal{D}}(\nabla^{\tilde{\mathcal{D}}} u^{\tau_2}) \cdot \vec{\mathbf{n}}_{\sigma^* \kappa_{2,2}^*} \\ \vdots \\ -m_{\sigma_N} \left(A_{\mathcal{D}_N^2} \cdot \nabla^{\mathcal{D}_N^2} u^{\tau_2} \right) \cdot \vec{\mathbf{n}}_{\sigma_{\mathcal{L}_N}} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (\text{III.11})$$

avec la convention que $\vec{\mathbf{n}}_{\sigma_{\mathcal{L}_k}}$ est la normale unitaire sortante de Ω_1 sur σ , pour tout $k = 1, \dots, N$. En utilisant le fait que $\Phi_2 = -\Phi_1$ et l'équation (III.10), la dernière équation est directement vérifiée :

$$\sum_{k=1}^N \left(\varphi_{2,\kappa_k^*,\mathcal{L}_k} - \varphi_{2,\kappa_{k+1}^*,\mathcal{L}_k} \right) = 0,$$

et on a également pour tout $k = 1, \dots, N$

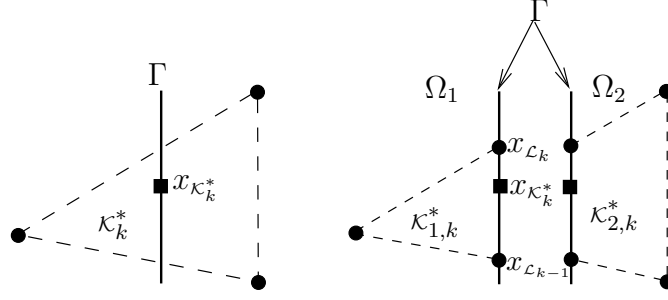
$$m_{\kappa_k^*,\mathcal{L}_k} \varphi_{2,\kappa_k^*,\mathcal{L}_k} + m_{\kappa_{k+1}^*,\mathcal{L}_k} \varphi_{2,\kappa_{k+1}^*,\mathcal{L}_k} = -m_{\kappa_k^*,\mathcal{L}_k} \varphi_{1,\kappa_k^*,\mathcal{L}_k} - m_{\kappa_{k+1}^*,\mathcal{L}_k} \varphi_{1,\kappa_{k+1}^*,\mathcal{L}_k} = -m_{\sigma_k} \left(A_{\mathcal{D}_k^1} \cdot \nabla^{\mathcal{D}_k^1} u^{\tau_1} \right) \cdot \vec{\mathbf{n}}_{\sigma_{\mathcal{L}_k}}.$$

Grâce à la conservativité locale de l'équation (III.8), on obtient pour tout $k = 1, \dots, N$

$$m_{\kappa_k^*,\mathcal{L}_k} \varphi_{2,\kappa_k^*,\mathcal{L}_k} + m_{\kappa_{k+1}^*,\mathcal{L}_k} \varphi_{2,\kappa_{k+1}^*,\mathcal{L}_k} = -m_{\sigma_k} \left(A_{\mathcal{D}_k^2} \cdot \nabla^{\mathcal{D}_k^2} u^{\tau_2} \right) \cdot \vec{\mathbf{n}}_{\sigma_{\mathcal{L}_k}}.$$

Soit $k \in \{2, \dots, N\}$. D'une part, il existe une unique maille duale $\kappa_k^* \in \mathfrak{M}^*$ telle que on a $\overline{\kappa_k^*} = \overline{\kappa_{1,k}^*} \cup \overline{\kappa_{2,k}^*}$, avec $\kappa_{2,k}^* \in \mathfrak{M}_2^*$, voir la Figure III.8. En utilisant l'égalité (III.9) et le fait que $\Phi_2 = -\Phi_1$, il vient que

$$\begin{aligned} & - \sum_{\mathcal{D} \in \mathfrak{D}_{\kappa_{2,k}^*}} m_{\sigma^*} \mathcal{A}_{\mathcal{D}}(\nabla^{\tilde{\mathcal{D}}} u^{\tau_2}) \cdot \vec{\mathbf{n}}_{\sigma^* \kappa_{2,k}^*} - m_{\kappa_k^*,\mathcal{L}_k} \varphi_{2,\kappa_k^*,\mathcal{L}_k} - m_{\kappa_{k-1}^*,\mathcal{L}_{k-1}} \varphi_{2,\kappa_{k-1}^*,\mathcal{L}_{k-1}} \\ & = - \sum_{\mathcal{D} \in \mathfrak{D}_{\kappa_k^*}} m_{\sigma^*} \mathcal{A}_{\mathcal{D}}(\nabla^{\tilde{\mathcal{D}}} u^{\tau_1}) \cdot \vec{\mathbf{n}}_{\sigma^* \kappa_k^*} + \sum_{\mathcal{D} \in \mathfrak{D}_{\kappa_{1,k}^*}} m_{\sigma^*} \mathcal{A}_{\mathcal{D}}(\nabla^{\tilde{\mathcal{D}}} u^{\tau_1}) \cdot \vec{\mathbf{n}}_{\sigma^* \kappa_k^*} + m_{\kappa_k^*,\mathcal{L}_k} \varphi_{1,\kappa_k^*,\mathcal{L}_k} + m_{\kappa_{k-1}^*,\mathcal{L}_{k-1}} \varphi_{1,\kappa_{k-1}^*,\mathcal{L}_{k-1}}. \end{aligned}$$

FIG. III.8 – Décomposition de κ_k^* en deux mailles duales des sous-domaines.

D'autre part, la définition de $\varphi_{1,\kappa^*,\mathcal{L}}$ implique :

$$- \sum_{\mathcal{D} \in \mathcal{D}_{\kappa_{1,k}^*}} m_{\sigma^*} \mathcal{A}_{\mathcal{D}}(\nabla \tilde{\mathcal{D}} u^{\tau_1}) \cdot \vec{n}_{\sigma^* \kappa_k^*} - m_{\kappa_k^*, \mathcal{L}_k} \varphi_{1,\kappa_k^*, \mathcal{L}_k} - m_{\kappa_k^*, \mathcal{L}_{k-1}} \varphi_{1,\kappa_k^*, \mathcal{L}_{k-1}} = m_{\kappa_{1,k}^*} f_{\kappa_{1,k}^*}.$$

Puisque, u^τ est solution du schéma (III.1) sur le maillage \mathcal{T} , on a en particulier l'équation suivante

$$- \sum_{\mathcal{D} \in \mathcal{D}_{\kappa_k^*}} m_{\sigma^*} \mathcal{A}_{\mathcal{D}}(\nabla \tilde{\mathcal{D}} u^\tau) \cdot \vec{n}_{\sigma^* \kappa_k^*} = m_{\kappa_k^*} f_{\kappa_k^*}.$$

On en déduit que

$$\begin{aligned} & - \sum_{\mathcal{D} \in \mathcal{D}_{\kappa_{2,k}^*}} m_{\sigma^*} \mathcal{A}_{\mathcal{D}}(\nabla \tilde{\mathcal{D}} u^{\tau_2}) \cdot \vec{n}_{\sigma^* \kappa_k^*} - m_{\kappa_k^*, \mathcal{L}_k} \varphi_{2,\kappa_k^*, \mathcal{L}_k} - m_{\kappa_k^*, \mathcal{L}_{k-1}} \varphi_{2,\kappa_k^*, \mathcal{L}_{k-1}} \\ & = m_{\kappa_k^*} f_{\kappa_k^*} - m_{\kappa_{1,k}^*} f_{\kappa_{1,k}^*} = \int_{\kappa_k^*} f(x) dx - \int_{\kappa_{1,k}^*} f(x) dx = \int_{\kappa_{2,k}^*} f(x) dx = m_{\kappa_{2,k}^*} f_{\kappa_{2,k}^*}, \end{aligned}$$

ceci donne exactement (III.11).

Etape 4 - Conclusion. Il reste à définir h^{τ_i} , pour $i = 1, 2$, comme suit :

$$h_{i,\kappa^*,\mathcal{L}} = -\varphi_{i,\kappa^*,\mathcal{L}} + \lambda \frac{u_{i,\kappa^*} + u_{i,\mathcal{L}}}{2}. \quad (\text{III.12})$$

En résumé, on a bien obtenu une solution à

$$\mathcal{L}_{\Omega_i, \Gamma}^{\tau_i}(u^{\tau_i}, \varphi^{\tau_i}, f^{\tau_i}, g^{\tau_i}, h^{\tau_j}) = 0$$

pour $i = 1, 2$, $j \neq i$ et vérifiant de plus la condition (III.6). ■

III.4 Analyse de la convergence de la méthode itérative

On montre maintenant, comme dans [CHH04] pour le schéma volume fini classique VF4, le résultat important de cette section, qui est la convergence de la méthode itérative de Schwarz vers la solution du schéma DDFV (III.1).

Théorème III.5 (Convergence de l'algorithme de Schwarz)

Soit \mathcal{T} un maillage DDFV composite associé à Ω . Pour tout $h_0^{\tau_i} \in \Phi_{\Gamma}^{\tau_i}$, $i \in \{1, 2\}$, la solution $(u_n^{\tau_i})_{i=1,2}$ de l'algorithme (III.2)-(III.3) converge vers la solution u^τ du schéma DDFV (III.1) sur tout le domaine Ω quand n tend vers l'infini.

De plus, si on suppose que $h_0^{\tau_i}$ est choisi de sorte que

$$\sum_{k=1}^N \left(h_{i,\kappa_k^*, \mathcal{L}_k}^0 - h_{i,\kappa_{k+1}^*, \mathcal{L}_k}^0 \right) = \frac{\lambda}{2} \left(g_{\kappa_1^*} - g_{\kappa_{N+1}^*} \right), \quad i = \{1, 2\}, \quad (\text{III.13})$$

alors, les inconnues $\varphi_{i,\kappa^*,\mathcal{L}}^{n+1}$ données par l'algorithme (III.2)-(III.3) convergent aussi vers les inconnues $\varphi_{i,\kappa^*,\mathcal{L}}^\tau$ du schéma (III.4) quand n tend vers l'infini c'est-à-dire que la solution U^{n+1} de l'algorithme (III.2)-(III.3) converge vers la solution U^τ du schéma (III.4) quand n tend vers l'infini.

Remarque III.6

Une remarque importante est que les valeurs de $u_n^{\tau_1}$ et $u_n^{\tau_2}$ correspondant aux mêmes points sur l'interface Γ peuvent ne pas coïncider, en général, mais elles convergent vers la même valeur donnée par la solution u^τ du schéma DDFV (III.1) (voir le Théorème III.4) quand n tend vers l'infini.

Démonstration : Pour $i \in \{1, 2\}$, on définit l'erreur sur chaque sous-domaine à l'itération n comme suit

$$e_i^n = u_i^\tau - u_i^n \in \mathbb{E}_g^D, \quad \psi_{i,\kappa^*,\mathcal{L}}^n = \varphi_{i,\kappa^*,\mathcal{L}} - \varphi_{i,\kappa^*,\mathcal{L}}^n \in \Phi_{\Gamma^i}^{\tau_i}, \quad \bar{h}_{i,\kappa^*,\mathcal{L}}^n = h_{i,\kappa^*,\mathcal{L}} - h_{i,\kappa^*,\mathcal{L}}^n \in \Phi_{\Gamma^i}^{\tau_i}.$$

L'erreur vérifie le système suivant : pour $i = 1, 2$ et $j \neq i$.

$$-\operatorname{div}^\kappa \left(\mathcal{A}^\mathcal{D}(\nabla^{\tilde{\mathcal{D}}} e_i^{n+1}) \right) = 0, \quad \forall \kappa \in \mathfrak{M}_i, \quad (\text{III.14a})$$

$$-\operatorname{div}^{\kappa^*} \left(\mathcal{A}^\mathcal{D}(\nabla^{\tilde{\mathcal{D}}} e_i^{n+1}) \right) = 0, \quad \forall \kappa^* \in \mathfrak{M}_i^*, \quad (\text{III.14b})$$

$$- \sum_{\mathcal{D} \in \mathfrak{D}_{\kappa_k^*}} m_{\sigma^*} \mathcal{A}_{\mathcal{D}}(\nabla^{\tilde{\mathcal{D}}} e_i^{n+1}) \cdot \vec{\mathbf{n}}_{\sigma^* \kappa_k^*} - m_{\kappa_k^*, \mathcal{L}_k} \psi_{i,\kappa_k^*, \mathcal{L}_k}^{n+1} - m_{\kappa_k^*, \mathcal{L}_{k-1}} \psi_{i,\kappa_k^*, \mathcal{L}_{k-1}}^{n+1} = 0, \quad \forall k \in \{2, \dots, N\}, \quad (\text{III.14c})$$

$$\frac{m_{\kappa_k^*, \mathcal{L}_k}}{m_{\sigma^*}} \psi_{i,\kappa_k^*, \mathcal{L}_k}^{n+1} + \frac{m_{\kappa_{k+1}^*, \mathcal{L}_k}}{m_{\sigma^*}} \psi_{i,\kappa_{k+1}^*, \mathcal{L}_k}^{n+1} - \mathcal{A}_{\mathcal{D}}(\nabla^{\tilde{\mathcal{D}}} e_i^{n+1}) \cdot \vec{\mathbf{n}}_{\sigma \mathcal{L}_k} = 0, \quad \forall k \in \{1, \dots, N\}, \quad (\text{III.14d})$$

$$\psi_{i,\kappa_k^*, \mathcal{L}_k}^{n+1} + \lambda \gamma_{\kappa_k^*, \mathcal{L}_k} (e_i^{n+1}) = \bar{h}_{j,\kappa_k^*, \mathcal{L}_k}^n \quad \forall k \in \{1, \dots, N\}, \quad (\text{III.14e})$$

$$\psi_{i,\kappa_{k+1}^*, \mathcal{L}_k}^{n+1} + \lambda \gamma_{\kappa_{k+1}^*, \mathcal{L}_k} (e_i^{n+1}) = \bar{h}_{j,\kappa_{k+1}^*, \mathcal{L}_k}^n \quad \forall k \in \{1, \dots, N\}, \quad (\text{III.14f})$$

avec

$$\bar{h}_{j,\kappa^*, \mathcal{L}}^n = -\psi_{j,\kappa^*, \mathcal{L}}^n + \lambda \gamma_{\kappa^*, \mathcal{L}} (e_j^n) \quad \forall [x_{\kappa^*} x_{\mathcal{L}}] \in \partial \mathfrak{A}_{\Gamma}. \quad (\text{III.15})$$

Etape 1. On définit $I_i^{n+1} = -[\operatorname{div}^\tau (\mathcal{A}^\mathcal{D}(\nabla^{\tilde{\mathcal{D}}} e_i^{n+1})), e_i^{n+1}]_{\mathcal{T}_i}$. Grâce à la relation (II.23), on a :

$$I_i^{n+1} = -\frac{\lambda}{4} \sum_{k=1}^N M_{\sigma_k} \left(e_{i,\kappa_k^*}^{n+1} - e_{i,\kappa_{k+1}^*}^{n+1} \right)^2 - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N M_{\sigma_k} \left(e_{i,\kappa_k^*}^{n+1} - e_{i,\kappa_{k+1}^*}^{n+1} \right) \left(\bar{h}_{j,\kappa_{k+1}^*, \mathcal{L}_k}^n - \bar{h}_{j,\kappa_k^*, \mathcal{L}_k}^n \right),$$

on rappelle que $M_{\sigma_k} = \frac{d_{\kappa_k^*, \mathcal{L}_k} m_{\kappa_{k+1}^*, \mathcal{L}_k}}{m_{\sigma_k}}$. L'équation (III.15) et la définition (II.14) de $\gamma_{\kappa^*, \mathcal{L}}$ conduisent à

$$\begin{aligned} I_i^{n+1} = & -\frac{\lambda}{4} \sum_{k=1}^N M_{\sigma_k} \left(e_{i,\kappa_k^*}^{n+1} - e_{i,\kappa_{k+1}^*}^{n+1} \right)^2 - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N M_{\sigma_k} \left(- \left(\psi_{j,\kappa_{k+1}^*, \mathcal{L}_k}^n - \psi_{j,\kappa_k^*, \mathcal{L}_k}^n \right) \right) \left(e_{i,\kappa_k^*}^{n+1} - e_{i,\kappa_{k+1}^*}^{n+1} \right) \\ & + \frac{\lambda}{4} \sum_{k=2}^N M_{\sigma_k} \left(e_{j,\kappa_{k+1}^*}^n - e_{j,\kappa_k^*}^n \right) \left(e_{i,\kappa_{k+1}^*}^{n+1} - e_{i,\kappa_k^*}^{n+1} \right). \end{aligned} \quad (\text{III.16})$$

Etape 2 . On calcule maintenant I_i^{n+1} d'une autre manière, en utilisant la formule de Green discrète (Théorème I.10) sur le sous-domaine Ω_i :

$$\begin{aligned} I_i^{n+1} &= (\mathcal{A}^\mathcal{D}(\nabla^{\tilde{\mathcal{D}}} e_i^{n+1}), \nabla^{\mathcal{D}} e_i^{n+1})_{\mathfrak{D}_i} - (\gamma^{\mathfrak{D}_i}((\mathcal{A}^\mathcal{D}(\nabla^{\tilde{\mathcal{D}}} e_i^{n+1}))) \cdot \vec{\mathbf{n}}, \gamma^\tau(e_i^{n+1}))_{\partial \Omega_i} \\ &= \sum_{\mathcal{D} \in \mathfrak{D}_i} m_{\mathcal{D}} \mathcal{A}_{\mathcal{D}}(\nabla^{\tilde{\mathcal{D}}} e_i^{n+1}) \cdot \nabla^{\mathcal{D}} e_i^{n+1} - \sum_{\mathcal{D} \in \mathfrak{D}_{i,\Gamma}} m_{\sigma} \gamma^{\mathcal{D}}(e_i^{n+1}) \mathcal{A}_{\mathcal{D}}(\nabla^{\tilde{\mathcal{D}}} e_i^{n+1}) \cdot \vec{\mathbf{n}}_{\sigma \mathcal{L}}. \end{aligned} \quad (\text{III.17})$$

En combinant (III.16) et (III.17), on obtient

$$\begin{aligned} 0 = & \sum_{\mathcal{D} \in \mathfrak{D}_i} m_{\mathcal{D}} \mathcal{A}_{\mathcal{D}}(\nabla^{\tilde{\mathcal{D}}} e_i^{n+1}) \cdot \nabla^{\mathcal{D}} e_i^{n+1} \\ & - \frac{\lambda}{4} \sum_{k=2}^N M_{\sigma_k} \left(e_{j,\kappa_{k+1}^*}^n - e_{j,\kappa_k^*}^n \right) \left(e_{i,\kappa_{k+1}^*}^{n+1} - e_{i,\kappa_k^*}^{n+1} \right) + \frac{\lambda}{4} \sum_{k=1}^N M_{\sigma_k} \left(e_{i,\kappa_k^*}^{n+1} - e_{i,\kappa_{k+1}^*}^{n+1} \right)^2 \\ & - \underbrace{\frac{1}{2} \sum_{k=1}^N M_{\sigma_k} \left(\psi_{j,\kappa_{k+1}^*, \mathcal{L}_k}^n - \psi_{j,\kappa_k^*, \mathcal{L}_k}^n \right) \left(e_{i,\kappa_k^*}^{n+1} - e_{i,\kappa_{k+1}^*}^{n+1} \right)}_{:=B_1} - \underbrace{\sum_{\mathcal{D} \in \mathfrak{D}_{i,\Gamma}} m_{\sigma} \gamma^{\mathcal{D}}(e_i^{n+1}) \mathcal{A}_{\mathcal{D}}(\nabla^{\tilde{\mathcal{D}}} e_i^{n+1}) \cdot \vec{\mathbf{n}}_{\sigma \mathcal{L}}}_{:=B_2}. \end{aligned} \quad (\text{III.18})$$

L'équation (III.14d) et la définition (I.10) de l'opérateur trace γ^τ impliquent que le terme B_2 s'écrit

$$B_2 = \sum_{k=1}^N m_{\sigma_k} \left(\frac{m_{\kappa_k^*, \mathcal{L}_k}}{m_{\sigma_k}} \gamma_{\kappa_k^*, \mathcal{L}_k} (e_i^{n+1}) + \frac{m_{\kappa_{k+1}^*, \mathcal{L}_k}}{m_{\sigma_k}} \gamma_{\kappa_{k+1}^*, \mathcal{L}_k} (e_i^{n+1}) \right) \left(\frac{m_{\kappa_k^*, \mathcal{L}_k}}{m_{\sigma_k}} \psi_{i, \kappa_k^*, \mathcal{L}_k}^{n+1} + \frac{m_{\kappa_{k+1}^*, \mathcal{L}_k}}{m_{\sigma_k}} \psi_{i, \kappa_{k+1}^*, \mathcal{L}_k}^{n+1} \right).$$

On utilise maintenant (III.14e)-(III.14f) et (III.15) pour trouver que

$$\psi_{j, \kappa_{k+1}^*, \mathcal{L}_k}^n - \psi_{j, \kappa_k^*, \mathcal{L}_k}^n = \frac{\lambda}{2} \left(e_{i, \kappa_k^*}^{n+1} - e_{i, \kappa_{k+1}^*}^{n+1} \right) + \frac{\lambda}{2} \left(e_{j, \kappa_{k+1}^*}^n - e_{j, \kappa_k^*}^n \right) + \psi_{i, \kappa_k^*, \mathcal{L}_k}^{n+1} - \psi_{i, \kappa_{k+1}^*, \mathcal{L}_k}^{n+1},$$

dans le terme B_1 , il vient que $\tilde{B} = B_1 - B_2$ s'écrit :

$$\begin{aligned} \tilde{B} &= -\frac{\lambda}{4} \sum_{k=1}^N M_{\sigma_k} \left(e_{i, \kappa_k^*}^{n+1} - e_{i, \kappa_{k+1}^*}^{n+1} \right)^2 + \frac{\lambda}{4} \sum_{k=1}^N M_{\sigma_k} \left(e_{j, \kappa_k^*}^n - e_{j, \kappa_{k+1}^*}^n \right) \left(e_{i, \kappa_k^*}^{n+1} - e_{i, \kappa_{k+1}^*}^{n+1} \right) \\ &\quad - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N M_{\sigma_k} \left(\psi_{i, \kappa_k^*, \mathcal{L}_k}^{n+1} - \psi_{i, \kappa_{k+1}^*, \mathcal{L}_k}^{n+1} \right) \left(e_{i, \kappa_k^*}^{n+1} - e_{i, \kappa_{k+1}^*}^{n+1} \right) \\ &\quad - \sum_{k=1}^N \left(\frac{m_{\kappa_k^*, \mathcal{L}_k}}{m_{\sigma_k}} \gamma_{\kappa_k^*, \mathcal{L}_k} (e_i^{n+1}) + \frac{m_{\kappa_{k+1}^*, \mathcal{L}_k}}{m_{\sigma_k}} \gamma_{\kappa_{k+1}^*, \mathcal{L}_k} (e_i^{n+1}) \right) \left(m_{\kappa_k^*, \mathcal{L}_k} \psi_{i, \kappa_k^*, \mathcal{L}_k}^{n+1} + m_{\kappa_{k+1}^*, \mathcal{L}_k} \psi_{i, \kappa_{k+1}^*, \mathcal{L}_k}^{n+1} \right), \end{aligned}$$

et on obtient facilement

$$\begin{aligned} &-\frac{1}{2} \sum_{k=1}^N M_{\sigma_k} \left(\psi_{i, \kappa_k^*, \mathcal{L}_k}^{n+1} - \psi_{i, \kappa_{k+1}^*, \mathcal{L}_k}^{n+1} \right) \left(e_{i, \kappa_k^*}^{n+1} - e_{i, \kappa_{k+1}^*}^{n+1} \right) \\ &-\sum_{k=1}^N \left(\frac{m_{\kappa_k^*, \mathcal{L}_k}}{m_{\sigma_k}} \gamma_{\kappa_k^*, \mathcal{L}_k} (e_i^{n+1}) + \frac{m_{\kappa_{k+1}^*, \mathcal{L}_k}}{m_{\sigma_k}} \gamma_{\kappa_{k+1}^*, \mathcal{L}_k} (e_i^{n+1}) \right) \left(m_{\kappa_k^*, \mathcal{L}_k} \psi_{i, \kappa_k^*, \mathcal{L}_k}^{n+1} + m_{\kappa_{k+1}^*, \mathcal{L}_k} \psi_{i, \kappa_{k+1}^*, \mathcal{L}_k}^{n+1} \right) \\ &= -\sum_{k=1}^N \left(m_{\kappa_k^*, \mathcal{L}_k} \psi_{i, \kappa_k^*, \mathcal{L}_k}^{n+1} \gamma_{\kappa_k^*, \mathcal{L}_k} (e_i^{n+1}) + m_{\kappa_{k+1}^*, \mathcal{L}_k} \psi_{i, \kappa_{k+1}^*, \mathcal{L}_k}^{n+1} \gamma_{\kappa_{k+1}^*, \mathcal{L}_k} (e_i^{n+1}) \right). \end{aligned}$$

On en déduit

$$\begin{aligned} \tilde{B} &= -\frac{\lambda}{4} \sum_{k=1}^N M_{\sigma_k} \left(e_{i, \kappa_k^*}^{n+1} - e_{i, \kappa_{k+1}^*}^{n+1} \right)^2 + \frac{\lambda}{4} \sum_{k=1}^N M_{\sigma_k} \left(e_{j, \kappa_k^*}^n - e_{j, \kappa_{k+1}^*}^n \right) \left(e_{i, \kappa_k^*}^{n+1} - e_{i, \kappa_{k+1}^*}^{n+1} \right) \\ &\quad - \sum_{k=1}^N \left(m_{\kappa_k^*, \mathcal{L}_k} \psi_{i, \kappa_k^*, \mathcal{L}_k}^{n+1} \gamma_{\kappa_k^*, \mathcal{L}_k} (e_i^{n+1}) + m_{\kappa_{k+1}^*, \mathcal{L}_k} \psi_{i, \kappa_{k+1}^*, \mathcal{L}_k}^{n+1} \gamma_{\kappa_{k+1}^*, \mathcal{L}_k} (e_i^{n+1}) \right). \end{aligned}$$

Ainsi, (III.18) devient

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{\mathcal{D} \in \mathfrak{D}_i} m_{\mathcal{D}} \mathcal{A}_{\mathcal{D}} (\nabla^{\tilde{\mathcal{D}}} e_i^{n+1}) \cdot \nabla^{\mathcal{D}} e_i^{n+1} \\ &\quad + \frac{\lambda}{4} \sum_{k=1}^N M_{\sigma_k} \left(e_{i, \kappa_k^*}^{n+1} - e_{i, \kappa_{k+1}^*}^{n+1} \right)^2 - \frac{\lambda}{4} \sum_{k=2}^N M_{\sigma_k} \left(e_{j, \kappa_{k+1}^*}^n - e_{j, \kappa_k^*}^n \right) \left(e_{i, \kappa_{k+1}^*}^{n+1} - e_{i, \kappa_k^*}^{n+1} \right) \\ &\quad - \frac{\lambda}{4} \sum_{k=1}^N M_{\sigma_k} \left(e_{i, \kappa_k^*}^{n+1} - e_{i, \kappa_{k+1}^*}^{n+1} \right)^2 + \frac{\lambda}{4} \sum_{k=1}^N M_{\sigma_k} \left(e_{j, \kappa_k^*}^n - e_{j, \kappa_{k+1}^*}^n \right) \left(e_{i, \kappa_k^*}^{n+1} - e_{i, \kappa_{k+1}^*}^{n+1} \right) \\ &\quad - \sum_{k=1}^N \left[m_{\kappa_k^*, \mathcal{L}_k} \psi_{i, \kappa_k^*, \mathcal{L}_k}^{n+1} \gamma_{\kappa_k^*, \mathcal{L}_k} (e_i^{n+1}) + m_{\kappa_{k+1}^*, \mathcal{L}_k} \psi_{i, \kappa_{k+1}^*, \mathcal{L}_k}^{n+1} \gamma_{\kappa_{k+1}^*, \mathcal{L}_k} (e_i^{n+1}) \right], \end{aligned}$$

et on observe que la somme du deuxième jusqu'au cinquième terme est nulle, ainsi il reste seulement

$$0 = \sum_{\mathcal{D} \in \mathfrak{D}_i} m_{\mathcal{D}} \mathcal{A}_{\mathcal{D}} (\nabla^{\tilde{\mathcal{D}}} e_i^{n+1}) \cdot \nabla^{\mathcal{D}} e_i^{n+1} - \sum_{k=1}^N \left[m_{\kappa_k^*, \mathcal{L}_k} \psi_{i, \kappa_k^*, \mathcal{L}_k}^{n+1} \gamma_{\kappa_k^*, \mathcal{L}_k} (e_i^{n+1}) + m_{\kappa_{k+1}^*, \mathcal{L}_k} \psi_{i, \kappa_{k+1}^*, \mathcal{L}_k}^{n+1} \gamma_{\kappa_{k+1}^*, \mathcal{L}_k} (e_i^{n+1}) \right].$$

On fait exactement la même chose sur le sous-domaine Ω_j . On ajoute les deux résultats pour obtenir

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{\mathcal{D} \in \mathfrak{D}_i} m_{\mathcal{D}} \mathcal{A}_{\mathcal{D}} (\nabla^{\tilde{\mathcal{D}}} e_i^{n+1}) \cdot \nabla^{\mathcal{D}} e_i^{n+1} + \sum_{\mathcal{D} \in \mathfrak{D}_j} m_{\mathcal{D}} \mathcal{A}_{\mathcal{D}} (\nabla^{\tilde{\mathcal{D}}} e_j^{n+1}) \cdot \nabla^{\mathcal{D}} e_j^{n+1} \\ &\quad - \sum_{k=1}^N \left[m_{\kappa_k^*, \mathcal{L}_k} \psi_{i, \kappa_k^*, \mathcal{L}_k}^{n+1} \gamma_{\kappa_k^*, \mathcal{L}_k} (e_i^{n+1}) + m_{\kappa_{k+1}^*, \mathcal{L}_k} \psi_{i, \kappa_{k+1}^*, \mathcal{L}_k}^{n+1} \gamma_{\kappa_{k+1}^*, \mathcal{L}_k} (e_i^{n+1}) \right] \\ &\quad - \sum_{k=1}^N \left[m_{\kappa_k^*, \mathcal{L}_k} \psi_{j, \kappa_k^*, \mathcal{L}_k}^{n+1} \gamma_{\kappa_k^*, \mathcal{L}_k} (e_j^{n+1}) + m_{\kappa_{k+1}^*, \mathcal{L}_k} \psi_{j, \kappa_{k+1}^*, \mathcal{L}_k}^{n+1} \gamma_{\kappa_{k+1}^*, \mathcal{L}_k} (e_j^{n+1}) \right]. \end{aligned} \tag{III.19}$$

Etape 3. En utilisant la formule $-ab = \frac{1}{4\lambda} ((a - \lambda b)^2 - (a + \lambda b)^2)$, et les équations (III.14e)-(III.14f) et (III.15), on obtient pour tout $k = 1, \dots, N$ que :

$$\begin{aligned}
& -\psi_{i,\kappa_k^*,\mathcal{L}_k}^{n+1} \gamma_{\kappa_k^*,\mathcal{L}_k}(e_i^{n+1}) - \psi_{j,\kappa_k^*,\mathcal{L}_k}^{n+1} \gamma_{\kappa_k^*,\mathcal{L}_k}(e_j^{n+1}) \\
&= \frac{1}{4\lambda} \left[\left(-\psi_{i,\kappa_k^*,\mathcal{L}_k}^{n+1} + \lambda \gamma_{\kappa_k^*,\mathcal{L}_k}(e_i^{n+1}) \right)^2 - \left(\underbrace{\psi_{i,\kappa_k^*,\mathcal{L}_k}^{n+1} + \lambda \gamma_{\kappa_k^*,\mathcal{L}_k}(e_i^{n+1})}_{=-\psi_{j,\kappa_k^*,\mathcal{L}_k}^n + \lambda \gamma_{\kappa_k^*,\mathcal{L}_k}(e_j^n)} \right)^2 \right] \\
&+ \frac{1}{4\lambda} \left[\left(-\psi_{j,\kappa_k^*,\mathcal{L}_k}^{n+1} + \lambda \gamma_{\kappa_k^*,\mathcal{L}_k}(e_j^{n+1}) \right)^2 - \left(\underbrace{\psi_{j,\kappa_k^*,\mathcal{L}_k}^{n+1} + \lambda \gamma_{\kappa_k^*,\mathcal{L}_k}(e_j^{n+1})}_{=-\psi_{i,\kappa_k^*,\mathcal{L}_k}^n + \lambda \gamma_{\kappa_k^*,\mathcal{L}_k}(e_i^n)} \right)^2 \right] \\
&= \frac{1}{4\lambda} \left[\left(-\psi_{i,\kappa_k^*,\mathcal{L}_k}^{n+1} + \lambda \gamma_{\kappa_k^*,\mathcal{L}_k}(e_i^{n+1}) \right)^2 - \left(-\psi_{i,\kappa_k^*,\mathcal{L}_k}^n + \lambda \gamma_{\kappa_k^*,\mathcal{L}_k}(e_i^n) \right)^2 \right] \\
&+ \frac{1}{4\lambda} \left[\left(-\psi_{j,\kappa_k^*,\mathcal{L}_k}^{n+1} + \lambda \gamma_{\kappa_k^*,\mathcal{L}_k}(e_j^{n+1}) \right)^2 - \left(-\psi_{j,\kappa_k^*,\mathcal{L}_k}^n + \lambda \gamma_{\kappa_k^*,\mathcal{L}_k}(e_j^n) \right)^2 \right].
\end{aligned}$$

On fait la même chose pour $-\psi_{i,\kappa_{k+1}^*,\mathcal{L}_k}^{n+1} \gamma_{\kappa_{k+1}^*,\mathcal{L}_k}(e_i^{n+1}) - \psi_{j,\kappa_{k+1}^*,\mathcal{L}_k}^{n+1} \gamma_{\kappa_{k+1}^*,\mathcal{L}_k}(e_j^{n+1})$ avec (III.14f) et (III.15). Ainsi, on trouve que (III.19) devient :

$$\begin{aligned}
0 &= \sum_{\mathcal{D} \in \mathfrak{D}_i} m_{\mathcal{D}} \mathcal{A}_{\mathcal{D}}(\nabla^{\tilde{\mathcal{D}}} e_i^{n+1}) \cdot \nabla^{\mathcal{D}} e_i^{n+1} + \sum_{\mathcal{D} \in \mathfrak{D}_j} m_{\mathcal{D}} \mathcal{A}_{\mathcal{D}}(\nabla^{\tilde{\mathcal{D}}} e_j^{n+1}) \cdot \nabla^{\mathcal{D}} e_j^{n+1} \\
&+ \sum_{[x_{\kappa^*}, x_{\mathcal{L}}] \in \partial \mathfrak{A}_{\Gamma}} \frac{m_{\kappa^*,\mathcal{L}}}{4\lambda} \left[\left(-\psi_{i,\kappa^*,\mathcal{L}}^{n+1} + \lambda \gamma_{\kappa^*,\mathcal{L}}(e_i^{n+1}) \right)^2 - \left(-\psi_{i,\kappa^*,\mathcal{L}}^n + \lambda \gamma_{\kappa^*,\mathcal{L}}(e_i^n) \right)^2 \right] \\
&+ \sum_{[x_{\kappa^*}, x_{\mathcal{L}}] \in \partial \mathfrak{A}_{\Gamma}} \frac{m_{\kappa^*,\mathcal{L}}}{4\lambda} \left[\left(-\psi_{j,\kappa^*,\mathcal{L}}^{n+1} + \lambda \gamma_{\kappa^*,\mathcal{L}}(e_j^{n+1}) \right)^2 - \left(-\psi_{j,\kappa^*,\mathcal{L}}^n + \lambda \gamma_{\kappa^*,\mathcal{L}}(e_j^n) \right)^2 \right].
\end{aligned} \tag{III.20}$$

Etape 4. Soit $M \in \mathbb{N}^*$, on somme l'égalité (III.20) pour n variant de 1 à M , et on remarque que des simplifications se produisent dans les termes de l'interface pour les itérations n et $n+1$. Il vient que

$$\begin{aligned}
& \sum_{n=1}^M \sum_{\mathcal{D} \in \mathfrak{D}_i} m_{\mathcal{D}} \mathcal{A}_{\mathcal{D}}(\nabla^{\tilde{\mathcal{D}}} e_i^{n+1}) \cdot \nabla^{\mathcal{D}} e_i^{n+1} + \sum_{n=1}^M \sum_{\mathcal{D} \in \mathfrak{D}_j} m_{\mathcal{D}} \mathcal{A}_{\mathcal{D}}(\nabla^{\tilde{\mathcal{D}}} e_j^{n+1}) \cdot \nabla^{\mathcal{D}} e_j^{n+1} \\
&+ \underbrace{\sum_{[x_{\kappa^*}, x_{\mathcal{L}}] \in \partial \mathfrak{A}_{\Gamma}} \frac{m_{\kappa^*,\mathcal{L}}}{4\lambda} \left(-\psi_{i,\kappa^*,\mathcal{L}}^{M+1} + \lambda \gamma_{\kappa^*,\mathcal{L}}(e_i^{M+1}) \right)^2 + \sum_{[x_{\kappa^*}, x_{\mathcal{L}}] \in \partial \mathfrak{A}_{\Gamma}} \frac{m_{\kappa^*,\mathcal{L}}}{4\lambda} \left(-\psi_{j,\kappa^*,\mathcal{L}}^{M+1} + \lambda \gamma_{\kappa^*,\mathcal{L}}(e_j^{M+1}) \right)^2}_{\geq 0} \\
&= \sum_{[x_{\kappa^*}, x_{\mathcal{L}}] \in \partial \mathfrak{A}_{\Gamma}} \frac{m_{\kappa^*,\mathcal{L}}}{4\lambda} \left(-\psi_{i,\kappa^*,\mathcal{L}}^1 + \lambda \gamma_{\kappa^*,\mathcal{L}}(e_i^1) \right)^2 + \sum_{[x_{\kappa^*}, x_{\mathcal{L}}] \in \partial \mathfrak{A}_{\Gamma}} \frac{m_{\kappa^*,\mathcal{L}}}{4\lambda} \left(-\psi_{j,\kappa^*,\mathcal{L}}^1 + \lambda \gamma_{\kappa^*,\mathcal{L}}(e_j^1) \right)^2,
\end{aligned}$$

ceci donne l'existence d'une constante $C > 0$, indépendante de M , telle que

$$\sum_{n=1}^M \sum_{\mathcal{D} \in \mathfrak{D}_i} m_{\mathcal{D}} \mathcal{A}_{\mathcal{D}}(\nabla^{\tilde{\mathcal{D}}} e_i^{n+1}) \cdot \nabla^{\mathcal{D}} e_i^{n+1} + \sum_{n=1}^M \sum_{\mathcal{D} \in \mathfrak{D}_j} m_{\mathcal{D}} \mathcal{A}_{\mathcal{D}}(\nabla^{\tilde{\mathcal{D}}} e_j^{n+1}) \cdot \nabla^{\mathcal{D}} e_j^{n+1} \leq C.$$

De plus, l'égalité (II.5) implique que

$$\mathcal{A}_{\mathcal{D}}(\nabla^{\tilde{\mathcal{D}}} e_i^{n+1}) \cdot \nabla^{\mathcal{D}} e_i^{n+1} = \frac{1}{m_{\mathcal{D}}} \sum_{\tilde{\mathcal{D}} \in \mathfrak{D}_{\mathcal{D}}} m_{\tilde{\mathcal{D}}} (A_{\tilde{\mathcal{D}}} \cdot \nabla^{\tilde{\mathcal{D}}} e_i^{n+1}) \cdot \nabla^{\tilde{\mathcal{D}}} e_i^{n+1}.$$

Grâce à la coercivité de la matrice A et à la Proposition II.6, on obtient

$$\sum_{n=1}^M \|\nabla^{\mathfrak{D}_i} e_i^{n+1}\|_{\mathfrak{D}_i}^2 + \sum_{n=1}^M \|\nabla^{\mathfrak{D}_j} e_j^{n+1}\|_{\mathfrak{D}_j}^2 \leq C_A C.$$

On déduit que les deux séries $\sum_{n \geq 1} \|\nabla^{\mathfrak{D}_i} e_i^{n+1}\|_{\mathfrak{D}_i}^2$ et $\sum_{n \geq 1} \|\nabla^{\mathfrak{D}_j} e_j^{n+1}\|_{\mathfrak{D}_j}^2$ convergent et par conséquent on a que pour $i = 1, 2$

$$\|\nabla^{\mathfrak{D}_i} e_i^{n+1}\|_{\mathfrak{D}_i}^2 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

Selon l'inégalité de Poincaré discrète (Théorème II.13), on obtient la convergence de e_i^{n+1} vers 0, pour $i = 1, 2$, quand n tend vers ∞ .

Etape 5. Sous la condition (III.13), on va montrer maintenant que les erreurs sur les flux de l'interface $\psi_{i,\kappa^*,\mathcal{L}}^{n+1}$ convergent vers 0. En utilisant les équations (III.14c)-(III.14d), on a déjà que $\forall k \in \{1, \dots, N\}$:

$$\frac{m_{\kappa_k^*,\mathcal{L}_k}}{m_\sigma} \psi_{i,\kappa_k^*,\mathcal{L}_k}^{n+1} + \frac{m_{\kappa_{k+1}^*,\mathcal{L}_k}}{m_\sigma} \psi_{i,\kappa_{k+1}^*,\mathcal{L}_k}^{n+1} = \mathcal{A}_\mathcal{D}(\nabla^{\tilde{\mathcal{D}}} e_i^{n+1}) \cdot \vec{n}_{\sigma\mathcal{L}_k} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0,$$

et $\forall k \in \{2, \dots, N\}$

$$m_{\kappa_k^*,\mathcal{L}_k} \psi_{i,\kappa_k^*,\mathcal{L}_k}^{n+1} + m_{\kappa_k^*,\mathcal{L}_{k-1}} \psi_{i,\kappa_k^*,\mathcal{L}_{k-1}}^{n+1} = - \sum_{\mathcal{D} \in \mathcal{D}_{\kappa_k^*}} m_{\sigma^*} \mathcal{A}_\mathcal{D}(\nabla^{\tilde{\mathcal{D}}} e_i^{n+1}) \cdot \vec{n}_{\sigma^*\kappa_k^*} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

Tout d'abord, on montre par récurrence que pour tout $n \geq 0$, on a

$$\sum_{k=1}^N \left(\bar{h}_{i,\kappa_k^*,\mathcal{L}_k}^n - \bar{h}_{i,\kappa_{k+1}^*,\mathcal{L}_k}^n \right) = 0. \quad (\text{III.21})$$

Pour l'initialisation, on utilise la définition de $\bar{h}_{i,\kappa^*,\mathcal{L}}^0$ pour obtenir

$$\sum_{k=1}^N \left(\bar{h}_{i,\kappa_k^*,\mathcal{L}_k}^0 - \bar{h}_{i,\kappa_{k+1}^*,\mathcal{L}_k}^0 \right) = \sum_{k=1}^N \left(h_{i,\kappa_k^*,\mathcal{L}_k} - h_{i,\kappa_{k+1}^*,\mathcal{L}_k} \right) - \sum_{k=1}^N \left(h_{i,\kappa_k^*,\mathcal{L}_k}^0 - h_{i,\kappa_{k+1}^*,\mathcal{L}_k}^0 \right).$$

Grâce au choix de $h_{i,\kappa^*,\mathcal{L}}$ donné par (III.12), puis à (III.5) et à la condition de Dirichlet sur u^τ , on a

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^N \left(h_{i,\kappa_k^*,\mathcal{L}_k} - h_{i,\kappa_{k+1}^*,\mathcal{L}_k} \right) &= - \sum_{k=1}^N \left(\varphi_{i,\kappa_k^*,\mathcal{L}_k} - \varphi_{i,\kappa_{k+1}^*,\mathcal{L}_k} \right) + \frac{\lambda}{2} \sum_{k=1}^N \left(u_{i,\kappa_k^*} - u_{i,\kappa_{k+1}^*} \right) \\ &= - \sum_{k=1}^N \left(\varphi_{i,\kappa_k^*,\mathcal{L}_k} - \varphi_{i,\kappa_{k+1}^*,\mathcal{L}_k} \right) + \frac{\lambda}{2} \left(g_{\kappa_1^*} - g_{\kappa_{N+1}^*} \right), \end{aligned}$$

puis, (III.6) donne finalement

$$\sum_{k=1}^N \left(h_{i,\kappa_k^*,\mathcal{L}_k} - h_{i,\kappa_{k+1}^*,\mathcal{L}_k} \right) = \frac{\lambda}{2} \left(g_{\kappa_1^*} - g_{\kappa_{N+1}^*} \right).$$

Ceci implique en utilisant la condition (III.13) que

$$\sum_{k=1}^N \left(\bar{h}_{i,\kappa_k^*,\mathcal{L}_k}^0 - \bar{h}_{i,\kappa_{k+1}^*,\mathcal{L}_k}^0 \right) = 0. \quad (\text{III.22})$$

On suppose que l'égalité (III.21) est vraie pour un certain $n \geq 0$. En utilisant la définition (III.15) de $\bar{h}_{i,\kappa^*,\mathcal{L}}^{n+1}$ et successivement les équations (III.14e)-(III.14f) puis $e_i^{n+1} \in \mathbb{E}_g^D$, il vient que

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^N \left(\bar{h}_{i,\kappa_k^*,\mathcal{L}_k}^{n+1} - \bar{h}_{i,\kappa_{k+1}^*,\mathcal{L}_k}^{n+1} \right) &= \sum_{k=1}^N \left(\psi_{i,\kappa_{k+1}^*,\mathcal{L}_k}^{n+1} - \psi_{i,\kappa_k^*,\mathcal{L}_k}^{n+1} \right) + \frac{\lambda}{2} \sum_{k=1}^N \left(e_{i,\kappa_k^*}^{n+1} - e_{i,\kappa_{k+1}^*}^{n+1} \right) \\ &= \underbrace{\sum_{k=1}^N \left(\bar{h}_{j,\kappa_{k+1}^*,\mathcal{L}_k}^n - \bar{h}_{j,\kappa_k^*,\mathcal{L}_k}^n \right)}_{=0 \text{ par récurrence}} + \lambda \sum_{k=1}^N \left(e_{i,\kappa_k^*}^{n+1} - e_{i,\kappa_{k+1}^*}^{n+1} \right) \\ &= \lambda \sum_{k=1}^N \left(e_{i,\kappa_k^*}^{n+1} - e_{i,\kappa_{k+1}^*}^{n+1} \right) \\ &= \lambda e_{i,\kappa_1^*}^{n+1} - \lambda e_{i,\kappa_{N+1}^*}^{n+1} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Par conséquent, on obtient que

$$\sum_{k=1}^N \left(\psi_{i,\kappa_{k+1}^*,\mathcal{L}_k}^{n+1} - \psi_{i,\kappa_k^*,\mathcal{L}_k}^{n+1} \right) = \sum_{k=1}^N \left(\bar{h}_{i,\kappa_k^*,\mathcal{L}_k}^{n+1} - \bar{h}_{i,\kappa_{k+1}^*,\mathcal{L}_k}^{n+1} \right) - \frac{\lambda}{2} \sum_{k=1}^N \left(e_{i,\kappa_k^*}^{n+1} - e_{i,\kappa_{k+1}^*}^{n+1} \right) = 0.$$

En résumé, on a montré que

$$\left\{ \begin{array}{ll} \forall k \in \{1, \dots, N\}, & m_{\kappa_k^*, \mathcal{L}_k} \psi_{i, \kappa_k^*, \mathcal{L}_k}^{n+1} + m_{\kappa_{k+1}^*, \mathcal{L}_k} \psi_{i, \kappa_{k+1}^*, \mathcal{L}_k}^{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0, \\ \forall k \in \{2, \dots, N\}, & m_{\kappa_k^*, \mathcal{L}_k} \psi_{i, \kappa_k^*, \mathcal{L}_k}^{n+1} + m_{\kappa_{k-1}^*, \mathcal{L}_{k-1}} \psi_{i, \kappa_{k-1}^*, \mathcal{L}_{k-1}}^{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0, \\ & \sum_{k=1}^N \left(\psi_{i, \kappa_{k+1}^*, \mathcal{L}_k}^{n+1} - \psi_{i, \kappa_k^*, \mathcal{L}_k}^{n+1} \right) = 0, \end{array} \right.$$

c'est-à-dire dans une forme plus compacte que

$$B \Psi^{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0,$$

où B est la matrice définie dans (III.10). Comme cette matrice B est inversible, on en déduit que

$$\Psi^{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0,$$

et le résultat est montré. ■

Remarque III.7

Pour chacune des trois prises en compte des conditions aux bords de Fourier, on obtient un algorithme de Schwarz, on désignera par 1, 2, 3 chacun de ces algorithmes. Comme pour l'algorithme 3, on peut voir que la solution $(u_1^{n+1}, u_2^{n+1})_n$ des algorithmes 1 et 2 converge vers une limite $(\tilde{u}_1^T, \tilde{u}_2^T)$, quand n tend vers ∞ sur le maillage fixé et que cette limite vérifie que pour $i=1, 2$ et $j \neq i$:

$$\forall \mathcal{D} \in \mathfrak{D}_\Gamma, \quad \gamma_\sigma(\tilde{u}_i^T) = \gamma_\sigma(\tilde{u}_j^T), \quad -(\nabla^\mathcal{D} \tilde{u}_i^T, \vec{n}_{\sigma \kappa_i}) = -(\nabla^\mathcal{D} \tilde{u}_j^T, \vec{n}_{\sigma \kappa_j}).$$

Mais attention, à la limite on n'a pas forcément \tilde{u}_i^T qui vaut \tilde{u}_j^T sur l'interface Γ pour les algorithmes 1 et 2 (voir la Section III.5.4).

III.5 Résultats numériques

On illustre dans cette section les propriétés de convergence de l'algorithme de Schwarz présenté ci-dessus sur plusieurs cas tests en utilisant le maillage dual direct. On montre également comment la convergence dépend du paramètre des conditions de Fourier λ .

Pour chaque cas test, on donne l'expression du tenseur de diffusion A et la solution exacte u desquelles on déduit le terme source $f = -\text{div}(A \nabla u)$ et les conditions aux bords utilisés dans les calculs numériques.

III.5.1 Remarques sur l'initialisation de l'algorithme

Dans toutes les simulations numériques suivantes, on choisit la valeur initiale pour u_i^T suivante :

$$u_i^0 = 0, \quad \forall i \in \{1, 2\},$$

et on prend la valeur initiale pour la condition de Fourier égale à $h_0^{\mathcal{T}_i}$ telle que

$$\sum_{k=1}^N \left(h_{i, \kappa_k^*, \mathcal{L}_k}^0 - h_{i, \kappa_{k+1}^*, \mathcal{L}_k}^0 \right) = \frac{\lambda}{2} \left(g_{\kappa_1^*} - g_{\kappa_{N+1}^*} \right), \quad \forall i \in \{1, 2\}.$$

On peut prendre par exemple pour chaque $i \in \{1, 2\}$, $h_{i, \kappa_1^*, \mathcal{L}_1}^0 = \frac{\lambda}{2} (g_{\kappa_1^*} - g_{\kappa_{N+1}^*})$, et $h_{i, \kappa_k^*, \mathcal{L}_k}^0 = 0, \forall 2 \leq k \leq N$, et $h_{i, \kappa_{k+1}^*, \mathcal{L}_k}^0 = 0, \forall 1 \leq k \leq N$. Le Théorème III.5 implique que ce choix conduit aussi à la convergence des inconnues de flux $\varphi_{i, \kappa^*, \mathcal{L}}^n$.

III.5.2 Présentation des domaines et des maillages utilisés

Dans la suite, Ω sera un domaine décomposé en sous-domaines rectangulaires $\Omega = \bigcup_{k=1}^N \Omega_k$, avec N égal à 2, 3 ou 4.

Les Figures III.9, III.10, III.11, III.12 et III.13 montrent le maillage grossier Mesh_1^k d'une famille de maillages raffinés $(\text{Mesh}_m^k)_m$ qu'on utilisera par la suite. Plus précisément, Mesh_m^k est obtenu à partir de Mesh_{m-1}^k en divisant en deux toutes les arêtes du maillage, ceci implique que chaque maille primale est divisée en quatre.

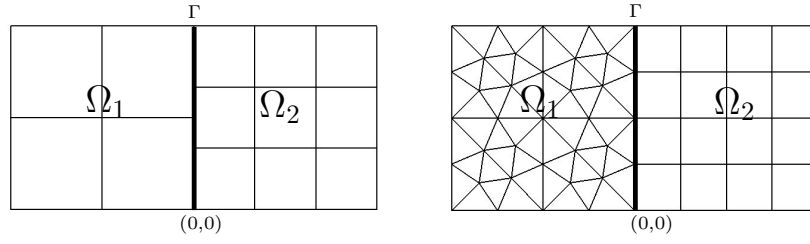


FIG. III.9 – Le domaine $\Omega = [-1, 1] \times [0, 1]$ est divisé en 2 sous-domaines. (A gauche) Mesh_1^1 . (A droite) Mesh_1^2 .

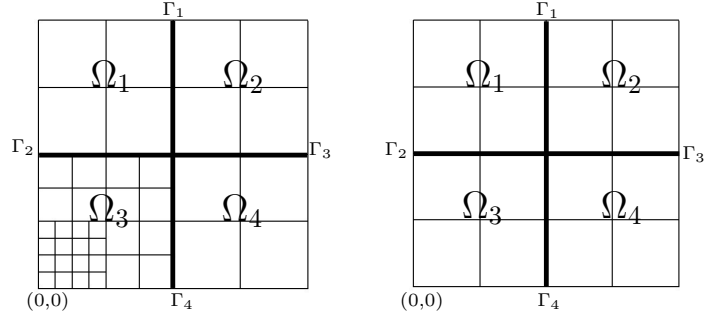


FIG. III.10 – Le domaine $\Omega = [0, 1]^2$ est divisé en 4 sous-domaines. (A gauche) Mesh_1^3 . (A droite) Mesh_1^4 .

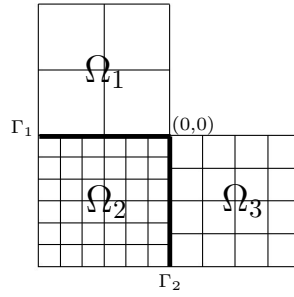


FIG. III.11 – Le domaine en forme de L : $\Omega = [-0.5, 0.5]^2 \setminus [0, 0.5]^2$ est divisé en 3 sous-domaines. Mesh_1^5 .

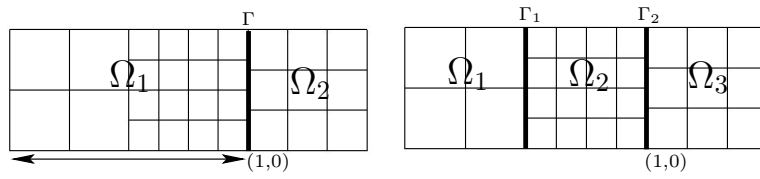


FIG. III.12 – Le domaine $\Omega = [-1, 2] \times [0, 1]$. (A gauche) Ω est divisé en 2 sous-domaines Mesh_1^6 . (A droite) Ω est divisé en 3 sous-domaines Mesh_1^7 .

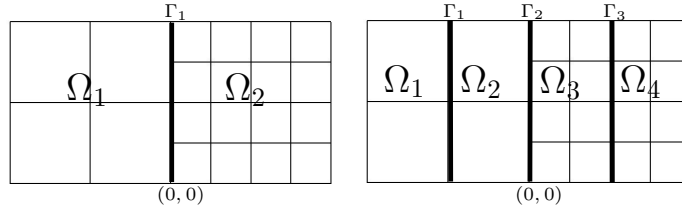


FIG. III.13 – Le domaine $\Omega = [-1, 1] \times [0, 1]$. (A gauche) Ω est divisé en 2 sous-domaines Mesh_1^8 . (A droite) Ω est divisé en 4 sous-domaines Mesh_1^9 .

III.5.3 Convergence de l'algorithme de Schwarz utilisé comme solveur

On commence par illustrer la convergence de l'algorithme de Schwarz sur plusieurs cas simples.

- Cas 1 : Condition aux bord de type Dirichlet homogène :

$$u(x, y) = \sin(\pi x) \sin(\pi y) \sin(\pi(x + y)),$$

et

$$A(x, y) = \begin{pmatrix} 1.5 & 0.5 \\ 0.5 & 1.5 \end{pmatrix} \text{ si } x < 0, \quad \text{et } A(x, y) = \begin{pmatrix} 1.5 & 0.5 \\ 0.5 & 1 \end{pmatrix} \text{ si } x > 0.$$

- Cas 2 : Condition aux bord de type Dirichlet non homogène :

$$u(x, y) = \cos(2.5\pi x) \cos(2.5\pi y),$$

et

$$A(x, y) = \begin{pmatrix} 1.5 & 0.5 \\ 0.5 & 1.5 \end{pmatrix} \text{ si } x < 0, \quad \text{et } A(x, y) = \begin{pmatrix} 1.5 & 0.5 \\ 0.5 & 1 \end{pmatrix} \text{ si } x > 0.$$

Afin d'illustrer la convergence de l'algorithme de Schwarz, on décide que le critère d'arrêt de l'algorithme est

$$\frac{\|u_n^{\tau_i} - u^{\tau_i}\|_2}{\|u^{\tau_i}\|_2} < 10^{-7}.$$

On observe pour le cas 1 (resp. le cas 2) sur les maillages Mesh_5^1 et Mesh_5^2 , (voir la Figure III.14), que presque 10^3 itérations sont nécessaires pour atteindre la convergence.

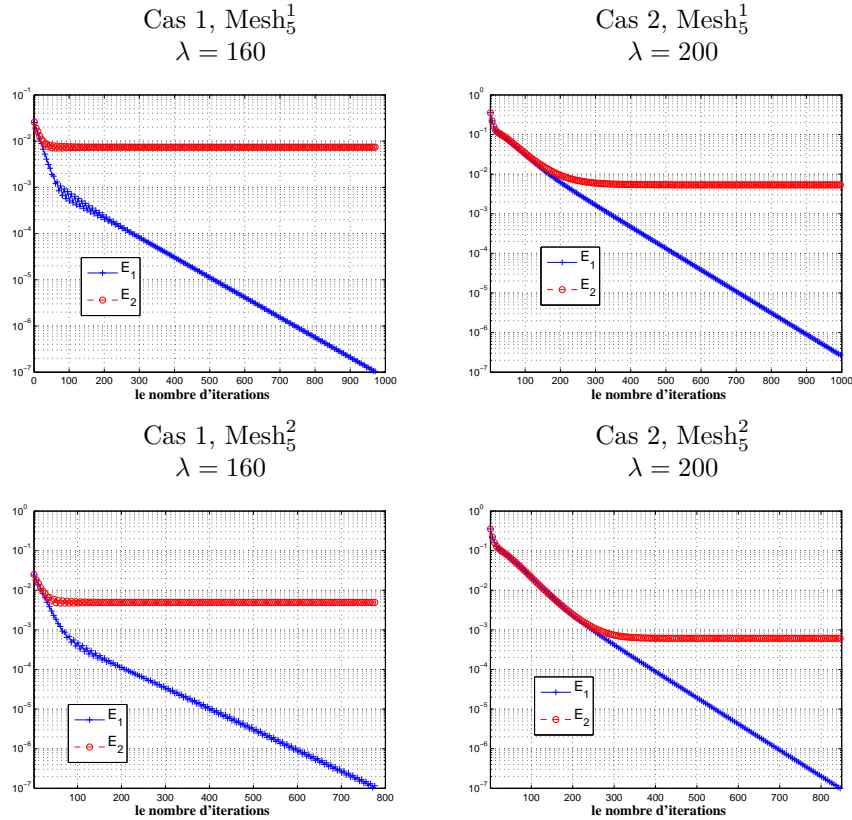


FIG. III.14 – Evolution de $E_1 = \frac{\|u_n^{\tau_i} - u^{\tau_i}\|_2}{\|u^{\tau_i}\|_2}$ et $E_2 = \frac{\|u_n^{\tau_i} - u\|_2}{\|u\|_2}$ en fonction du nombre d'itérations. (A gauche) Cas 1. (A droite) Cas 2.

Puisque $u_n^{\tau_i}$ converge vers u^{τ_i} quand n tend vers ∞ , pour $i = 1, 2$, on s'attend à ce que l'erreur $\frac{\|u_n^{\tau_i} - u\|_2}{\|u\|_2}$ soit du même ordre que $\frac{\|u^{\tau_i} - u\|_2}{\|u\|_2}$, pour des valeurs de n assez grandes. Ainsi, un critère d'arrêt naturel de

l'algorithme peut être le suivant

$$\frac{\|u_n^{\tau_i} - u^{\tau_i}\|_2}{\|u^{\tau_i}\|_2} < \eta \frac{\|u^{\tau_i} - u\|_2}{\|u\|_2}, \quad (\text{III.23})$$

pour un certain $\eta < 1$. Malheureusement, en pratique u est inconnue *a priori*, cependant on sait que l'erreur du schéma DDFV se comporte comme h^α avec $\alpha = 1$ en général et $\alpha = 2$ pour des maillages rectangles. Donc, on peut utiliser, en pratique, le critère d'arrêt suivant

$$\frac{\|u_n^{\tau_i} - u^{\tau_i}\|_2}{\|u^{\tau_i}\|_2} < \eta h^\alpha,$$

avec $\eta = 0.1$ par exemple.

Étudions le nombre d'itérations nécessaires pour atteindre la condition (III.23) dans les cas suivants proposés dans le *Benchmark on Discretization Schemes for Anisotropic Diffusion Problems on General Grids* élaboré pour la conférence FVCA5 [HH08b].

- Cas 3 : Anisotropie légère :

$$u(x, y) = \sin((1-x)(1-y)) + (1-x)^3(1-y)^2, \quad A = \begin{pmatrix} 1.5 & 0.5 \\ 0.5 & 1.5 \end{pmatrix}.$$

- Cas 4 : Anisotropie hétérogène en rotation :

$$u(x, y) = \sin(\pi x) \sin(\pi y), \quad A(x, y) = \frac{1}{x^2 + y^2} \begin{pmatrix} 10^{-3}x^2 + y^2 & (10^{-3} - 1)xy \\ (10^{-3} - 1)xy & x^2 + 10^{-3}y^2 \end{pmatrix}.$$

Le Tableau III.1 donne le nombre d'itérations nbit nécessaires pour réaliser (III.23).

Cas 3 - Mesh ₅ ³ - $\lambda = 160$	nbit = 99
Cas 4 - Mesh ₅ ⁴ - $\lambda = 205$	nbit = 134

TAB. III.1 – Le nombre d'itérations nbit nécessaires pour réaliser (III.23) pour les cas 3 et 4.

Le cas 5 illustre le comportement de l'algorithme de Schwarz quand $u \notin H^2(\Omega)$. L'ordre 1 de l'estimation d'erreur pour le schéma DDFV donné par le Théorème II.12 n'est plus valable. Pourtant, on sait que le schéma converge (voir [ABH07]).

- Cas 5 : Diffusion isotrope constante sur le domaine en forme de L, $u \notin H^2(\Omega)$:

$$u(x, y) = u(r, \theta) = r^{\frac{2}{3}} \sin\left(\frac{2}{3}\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)\right), \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Le Tableau III.2 donne le nombre d'itérations nbit nécessaires pour réaliser (III.23). Ce nombre est du même ordre de grandeur que ceux du Tableau III.1. Ainsi, on ne remarque pas d'influence de la régularité ici.

Cas 5 - Mesh ₅ ⁵ - $\lambda = 800$	nbit = 139
--	------------

TAB. III.2 – Le nombre d'itérations nbit nécessaires pour réaliser (III.23) pour le cas 5.

III.5.4 Remarque sur les autres prises en compte des conditions de Fourier possibles

Comme on l'a vu dans la Remarque III.7, on a trois algorithmes de Schwarz différents désignés par 1, 2, 3 qui convergent et on note leur limite $(\tilde{u}_1^\tau, \tilde{u}_2^\tau)$, où \tilde{u}_i^τ désigne les valeurs dans le sous-domaine i . On a vu pour les trois algorithmes que $\gamma_\sigma(\tilde{u}_1^\tau) = \gamma_\sigma(\tilde{u}_2^\tau)$ pour tout $\mathcal{D}_{\sigma, \sigma^*} \in \mathfrak{D}_\Gamma$ (on rappelle que $\gamma_\sigma(u^\tau) = \frac{d_{\mathcal{K}^*, \mathcal{L}}(u_{\mathcal{K}^*} + u_{\mathcal{L}}) + d_{\mathcal{L}^*, \mathcal{L}}(u_{\mathcal{L}^*} + u_{\mathcal{L}})}{2m_\sigma}$, pour tout $\sigma = [x_{\mathcal{K}^*}, x_{\mathcal{L}^*}] \in \partial\mathfrak{M}_\Gamma$). Ainsi si on a $\tilde{u}_{1, \mathcal{K}^*}^\tau = \tilde{u}_{2, \mathcal{K}^*}^\tau$ pour tout $x_{\mathcal{K}^*} \in \Gamma$ et $\tilde{u}_{1, \mathcal{K}}^\tau = \tilde{u}_{2, \mathcal{K}}^\tau$ pour tout $x_{\mathcal{K}} \in \Gamma$ alors leur limite $(\tilde{u}_1^\tau, \tilde{u}_2^\tau)$ est la solution u^τ du schéma DDFV (III.1) sur tout le domaine. On a montré dans le Théorème III.5 que la limite de l'algorithme 3 est la solution u^τ du schéma DDFV (III.1) sur tout le domaine. On va mettre en évidence le fait que ce n'est pas forcément le cas pour les algorithmes 1 et 2. Pour cela, on

	Algorithme 1	Algorithme 2
$\ \gamma_\sigma(\tilde{u}_1^\tau - \tilde{u}_2^\tau)\ _\infty$	0	0
$\ \tilde{u}_{1,\kappa^*}^\tau - \tilde{u}_{2,\kappa^*}^\tau\ _\infty$	$8.11e-2$	0.23
$\ \tilde{u}_{1,\kappa}^\tau - \tilde{u}_{2,\kappa}^\tau\ _\infty$	$9.87e-2$	0.34

TAB. III.3 – Comparaison de la limite $(\tilde{u}_1^\tau, \tilde{u}_2^\tau)$ et de u^τ .

montre dans le Tableau III.3 la norme infinie de γ_σ pour tout $\sigma \subset \Gamma$, notée $\|\gamma_\sigma(\tilde{u}_1^\tau - \tilde{u}_2^\tau)\|_\infty$, la norme infinie de $\tilde{u}_{1,\kappa^*}^\tau - \tilde{u}_{2,\kappa^*}^\tau$ pour tout $x_{\kappa^*} \in \Gamma$, notée $\|\tilde{u}_{1,\kappa^*}^\tau - \tilde{u}_{2,\kappa^*}^\tau\|_\infty$, et la norme infinie de $\tilde{u}_{1,\kappa}^\tau - \tilde{u}_{2,\kappa}^\tau$ pour tout $x_\kappa \in \Gamma$, notée $\|\tilde{u}_{1,\kappa}^\tau - \tilde{u}_{2,\kappa}^\tau\|_\infty$,

Le Tableau III.3 est réalisé avec le cas 1, un terme anisotrope qui vaut Id et $\lambda = 5$ sur le maillage Mesh_5^1 . On a bien que $\gamma_\sigma(\tilde{u}_1^\tau) = \gamma_\sigma(\tilde{u}_2^\tau)$ pour tout $\mathcal{D}_{\sigma,\sigma^*} \in \mathfrak{D}_\Gamma$. Mais dans ce cas, \tilde{u}_i^τ est différent de \tilde{u}_j^τ sur l'interface Γ pour les algorithmes 1 et 2. En conséquence pour ce cas test, la limite des algorithmes 1 et 2 n'est pas la solution u^τ du schéma DDFV (III.1) sur tout le domaine.

III.5.5 Influence de la forme du domaine de décomposition

On compare l'algorithme pour différentes décompositions du même domaine $\Omega = [-1, 2] \times [0, 1]$ (voir la Figure III.12) et pour le même cas test correspondant à une localisation spatiale du terme source.

- Cas 6 : Diffusion anisotrope. Le terme source est donné par

$$f(x, y) = \begin{cases} -1000 \sin(2.5\pi(x - 1.3)) & \text{si } 1.3 < x < 1.8, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

et le tenseur de diffusion par

$$A(x, y) = \begin{pmatrix} 1.5 & 0.5 \\ 0.5 & 1.5 \end{pmatrix} \text{ si } x < 0 \text{ ou } x > 1, \quad \text{et } A(x, y) = \begin{pmatrix} 1.5 & 0.5 \\ 0.5 & 1 \end{pmatrix} \text{ sinon.}$$

La solution exacte est donnée par

$$u(x, y) = \begin{cases} x & \text{si } -1 < x < 1.3, \\ x + \frac{1000}{1.5} \left(\frac{x - 1.3}{2.5\pi} - \frac{1}{(2.5\pi)^2} \sin(2.5\pi(x - 1.3)) \right) & \text{si } 1.3 < x < 1.8, \\ x + \frac{1000}{1.5} \left(\frac{1}{5\pi} - \frac{1}{(2.5\pi)^2} \sin(5\pi) \right) & \text{si } 1.8 < x < 2. \end{cases}$$

La Figure III.15 représente l'erreur $|u_{11}^\tau - u^\tau|$ sur le maillage primal (resp. maillage dual) pour $\lambda = 250$. Le maximum $\|u_n^\tau - u^\tau\|_\infty$ pour la décomposition en 2 sous-domaines (Mesh_5^6) sur le maillage primal (resp. dual) diminue de 1.07 (resp. 0.4) à 0.31 (resp. 0.12) après 10 itérations. Pour la décomposition en 3 sous-domaines (Mesh_5^7) $\|u_n^\tau - u^\tau\|_\infty$ sur la maillage primal (resp. dual) diminue de 1.1 (resp. 1.08) à 0.8 (resp. 0.62) après 10 itérations. Remarquons que le maillage composite \mathcal{T} est le même pour les deux décompositions étudiées. Il semble que, pour un terme source localisé, la décomposition en 2 sous-domaines soit plus précise (à n fixé, ceci est assez naturel).

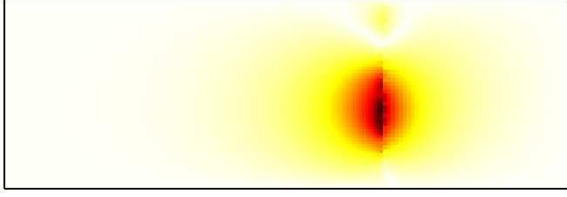
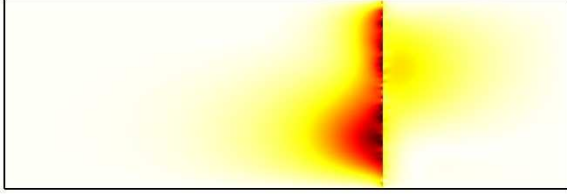
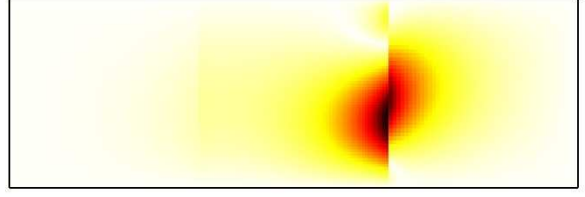
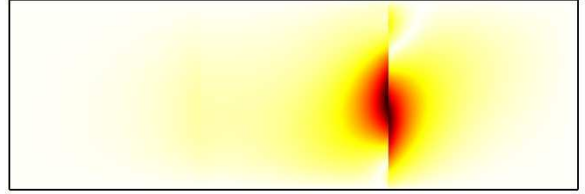
Mesh₅⁶ - Maillage primal - $\|u_n^\tau - u^\tau\|_\infty = 0.311$ Mesh₅⁶ - Maillage dual - $\|u_n^\tau - u^\tau\|_\infty = 0.118$ Mesh₅⁷ - Maillage primal - $\|u_n^\tau - u^\tau\|_\infty = 0.798$ Mesh₅⁷ - Maillage dual - $\|u_n^\tau - u^\tau\|_\infty = 0.62$ 

FIG. III.15 – Graphe de $|u_n^\tau - u^\tau|$. Cas 6, $\lambda = 250$, itération $n = 11$. (A gauche) Décomposition en 2 sous-domaines $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$. (A droite) Décomposition en 3 sous-domaines $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \Omega_3$.

III.5.6 Influence du paramètre des conditions de Fourier λ

Jusqu'à maintenant, la valeur de $\lambda > 0$ était fixée, mais on sait que le choix de λ influence généralement le nombre d'itérations nécessaires pour atteindre la convergence de l'algorithme (voir [AJNM02]). On illustre ce comportement dans la Figure III.16. Le choix optimal pour λ , comme le montre la Figure III.16, semble augmenter avec le nombre d'inconnues.

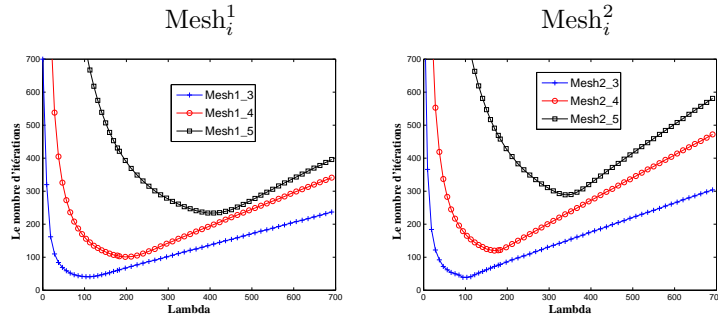


FIG. III.16 – Le nombre d'itérations en fonction de la valeur de λ pour le cas 2.

Plus précisément, le Tableau III.4 donne la valeur optimale de λ en fonction du pas de maillage pour le cas 2 sur le Mesh². Puisque le pas du maillage h est divisé par 2 à chaque niveau de raffinement, on observe que, dans ce cas, λ_{opt} semble se comporter comme $\frac{1}{h}$, ceci diffère du λ_{opt} de [Dub07, Gan06] qui semble se comporter comme $\frac{1}{\sqrt{h}}$. Cette différence vient peut-être de la présence des inconnues de flux φ_{n+1}^τ . Une étude plus approfondie est en cours.

	Mesh ₃ ²	Mesh ₄ ²	Mesh ₅ ²
λ_{opt}	94	164	333

TAB. III.4 – La valeur optimale de λ en fonction du pas de maillage h pour le cas 2.

On considère encore le cas 6 avec deux différentes décompositions de Ω avec le paramètre $\eta = 0.01$ dans le critère d'arrêt (III.23). Pour notre terme source particulier, on observe dans la Figure III.17 que pour une décomposition en 2 sous-domaines on a besoin de moins de 20 itérations pour atteindre (III.23) pour tout λ ,

$0.1 \leq \lambda \leq 400$, alors que pour la décomposition en 3 sous-domaines on a besoin d'au moins 60 itérations (atteint pour λ autour de 225). Le Tableau III.5 résume le nombre d'itérations nbit nécessaires pour atteindre (III.23) avec $\eta = 0.01$ pour la valeur optimale de λ . Donc, dans ce cas, la décomposition en 2 sous-domaines est plus efficace que celle en 3 sous-domaines.

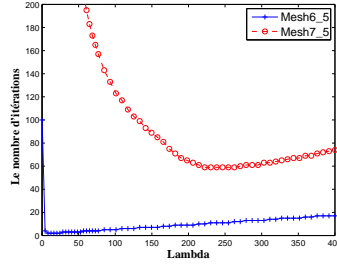


FIG. III.17 – Cas 6 - Le nombre d'itérations nécessaires en fonction de λ pour les deux maillages Mesh_5^6 et Mesh_5^7 .

2 sous-domaines $\lambda_{opt} = 20$	nbit = 2
3 sous-domaines $\lambda_{opt} = 250$	nbit = 59

TAB. III.5 – Le nombre d'itérations nbit nécessaires pour atteindre (III.23) pour le cas 6.

En fait, ce comportement n'est pas toujours observé, et on donne maintenant un exemple où si l'augmentation du nombre de sous-domaines dans la décomposition de Ω améliore la performance du solveur. On considère encore le cas 1 avec deux décompositions différentes de Ω en 2 et 4 sous-domaines c'est-à-dire avec les maillages Mesh_j^8 et Mesh_j^9 (voir la Figure III.13) pour différents niveaux de raffinement ($j = 3$ ou $j = 5$). Pour le maillage grossier ($j = 3$), la partie gauche de la Figure III.18 montre que les performances du solveur pour les deux décompositions sont équivalentes. Pourtant, pour le maillage plus fin ($j = 5$), la partie droite de la même Figure III.18 montre que la décomposition en 4 sous-domaines a besoin de moins de 36 itérations pour atteindre (III.23) pour tout $10 \leq \lambda \leq 300$, alors que la décomposition en 2 sous-domaines a besoin d'au moins de 135 itérations (obtenu pour λ autour de 150).

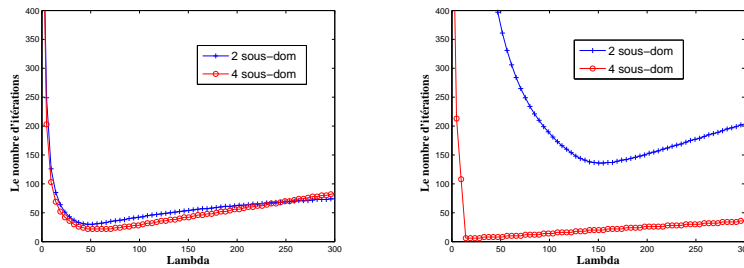


FIG. III.18 – Cas 1 - Le nombre d'itérations nécessaires en fonction de λ pour les deux familles de maillages Mesh_j^8 et Mesh_j^9 . (A gauche) pour $j = 3$. (A droite) pour $j = 5$.

En conclusion, pour ce cas test, plus le nombre de sous-domaines est grand plus la performance du solveur est importante.

III.6 Application au préconditionnement du gradient conjugué

La méthode de Schwarz sans recouvrement étudiée ici a été tout d'abord utilisée comme un solveur itératif pour notre schéma DDFV (III.1). Pourtant, on observe dans la section précédente que la performance n'est pas

toujours très bonne, du moins si on ne choisit pas la valeur optimale du paramètre des conditions de Fourier associée à la situation (cela dépend de l'anisotropie, de l'hétérogénéité du problème, mais aussi du maillage lui-même et des sous-domaines considérés). Comme la valeur du paramètre optimal n'est pas toujours connue précisément, on peut également tirer profit de la méthode de décomposition de domaine en la considérant comme un préconditionneur.

En effet, à la fois l'efficacité et la robustesse des techniques itératives peuvent être améliorées par l'utilisation de préconditionnement. Cela consiste simplement à résoudre un système linéaire qui admet la même solution que celle d'origine. Afin d'accélérer les méthodes itératives, ce nouveau système linéaire est choisi pour avoir un bien meilleur conditionnement. On réfère à [Saa03] pour les techniques standard de préconditionnement. En particulier, les méthodes de Schwarz sans recouvrement peuvent être vues comme des solveurs de Jacobi par blocs, et on sait qu'un faible nombre d'itérations de l'algorithme de décomposition de domaine peut être un préconditionneur efficace pour les méthodes de gradient conjugué.

On propose dans cette section quelques illustrations en évaluant le nombre d'itérations nécessaires pour atteindre la convergence de la méthode de gradient conjugué. On étudie en particulier comment la méthode de gradient conjugué dépend du nombre n d'itérations de l'algorithme de Schwarz comme préconditionneur à chaque itération du CG. Le nombre d'itérations $n = 0$ signifie que le préconditionneur n'est pas utilisé. Le cas test utilisé est décrit ci-dessus et les résultats sont donnés dans la Figure III.19.

- Cas 7 : Anisotropie constante :

$$u(x, y) = 16y(1 - y)(1 - x^2), \text{ et } A(x, y) = \text{Id}.$$

On observe que pour une valeur raisonnable de n (ici, $n = 3$), le nombre d'itérations de CG nécessaires augmente vraiment lentement avec la taille du système linéaire à résoudre. Donc, notre méthode de Schwarz semble être un préconditionneur satisfaisant pour résoudre notre schéma DDFV (III.1).

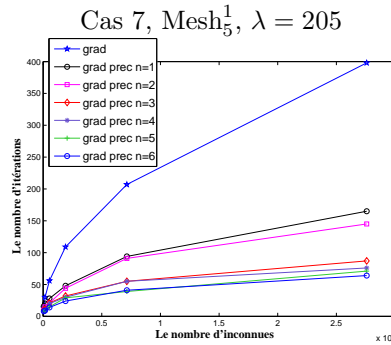
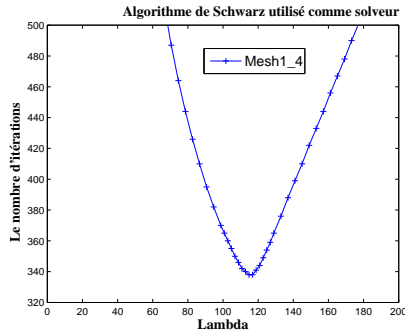
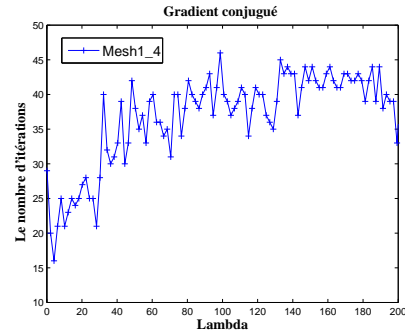


FIG. III.19 – Le nombre d'itérations en fonction du nombres d'inconnues.

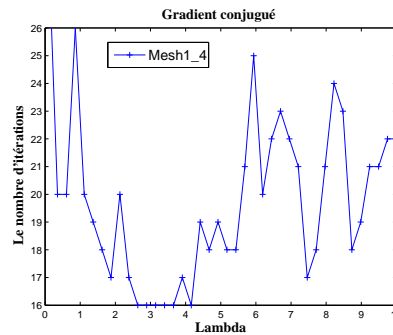
Comme indiqué dans la Section III.5.6, la valeur du paramètre des conditions de Fourier λ a une influence sur la performance de l'algorithme de Schwarz et il semble qu'il existe un choix optimal de cette valeur. On souhaite voir maintenant s'il existe aussi un choix optimal de la valeur de λ quand la méthode de Schwarz est utilisée comme un préconditionneur. A cette fin, on considère les résultats obtenus pour le cas 7. La valeur optimale de λ pour un algorithme, utilisé comme un solveur itératif, est autour de 115 (voir la Figure III.20(a)) pour atteindre une erreur de 10^{-8} . La Figure III.20(b) montre le nombre d'itérations du gradient conjugué préconditionné avec 2 itérations de l'algorithme de Schwarz nécessaire pour atteindre la même précision en fonction de λ . On observe que l'influence de λ n'est pas si claire que pour l'algorithme de Schwarz utilisé comme solveur itératif mais il semble que la valeur optimale de λ soit autour de 3 (voir le zoom dans la Figure III.20(c)).



(a) Algorithme de Schwarz.



(b) Méthode du gradient conjugué.

(c) Zoom $\lambda \in [0, 10]$.FIG. III.20 – Le nombre d'itérations pour atteindre une erreur de 10^{-8} en fonction de λ . Cas 7.

III.7 Conclusions et perspectives

Dans ce chapitre, on a présenté un algorithme de Schwarz sans recouvrement associé à une décomposition de domaines pour résoudre le schéma DDFV (III.1). L'algorithme de Schwarz que nous avons obtenu converge vers la solution du schéma DDFV (III.1) sur tout le domaine. Les propriétés de cet algorithme sont illustrées par des résultats numériques pour des équations elliptiques anisotropes. On illustre en particulier l'existence d'une valeur du paramètre des conditions de Fourier unique pour laquelle la convergence est plus rapide. Néanmoins, on observe comme d'habitude que les performances d'une telle méthode utilisée comme un solveur direct ne sont pas très bonnes alors qu'il y a un réel intérêt pratique à utiliser quelques itérations de cet algorithme comme préconditionneur de la méthode de gradient conjugué.

Les conditions de transmission étudiées ici sont de type Fourier. Dans un travail en cours, on propose d'améliorer ces conditions en considérant des conditions d'ordre 2 optimisées, appelées Ventcell dans la littérature. L'une des premières difficultés est de généraliser au cadre DDFV les conditions d'ordre 2 aux conditions de diffusion anisotrope.

Partie 2

Discrétisation DDFV des problèmes de Stokes 2D

Chapitre IV

Introduction des méthodes DDFV pour Stokes

On va maintenant s'intéresser à l'approximation des solutions du problème de Stokes stationnaire par les méthodes DDFV. Ce problème a fait l'objet de plusieurs études on réfère par exemple à [EHL06, Del07, DE09, BdVGLM09, BdVL10]. La méthode DDFV pour le problème de Stokes conduit à des inconnues décalées, c'est-à-dire localisées en des points différents. Le schéma décalé le plus célèbre est le schéma MAC (Marker and Cell) [HW65] qui est limité à des maillages rectangulaires.

Dans ce chapitre¹, on commence par introduire les espaces d'approximation et les projections discrètes. On définit ensuite les opérateurs discrets dans le cadre vectoriel. On montre que le gradient discret DDFV (voir Définition IV.1) et la divergence discrète (voir Définition IV.4) sont toujours en dualité (voir Théorème IV.9). La dernière section est consacrée aux principaux résultats sur les opérateurs discrets DDFV dans le cadre vectoriel, qui sont pour la plupart des généralisations de ceux montrés dans le Chapitre I, et qui seront utilisés dans toute cette deuxième partie.

IV.1 Localisation des inconnues et définition des projections sur les maillages

La méthode DDFV pour le problème de Stokes va mettre en jeu des inconnues décalées. On associe à chaque maille primale $\kappa \in \mathfrak{M} \cup \partial\mathfrak{M}$ une inconnue $\mathbf{u}_\kappa \in \mathbb{R}^2$ en vitesse, à chaque maille duale $\kappa^* \in \mathfrak{M}^* \cup \partial\mathfrak{M}^*$ une inconnue $\mathbf{u}_{\kappa^*} \in \mathbb{R}^2$ en vitesse et à chaque diamant $\mathcal{D} \in \mathfrak{D}$ une inconnue $p^\mathcal{D} \in \mathbb{R}$ en pression. Ces inconnues sont rassemblées dans les familles :

$$\mathbf{u}^\tau = \left((\mathbf{u}_\kappa)_{\kappa \in (\mathfrak{M} \cup \partial\mathfrak{M})}, (\mathbf{u}_{\kappa^*})_{\kappa^* \in (\mathfrak{M}^* \cup \partial\mathfrak{M}^*)} \right) \in (\mathbb{R}^2)^\tau \quad \text{et} \quad p^\mathfrak{D} = (p^\mathcal{D})_{\mathcal{D} \in \mathfrak{D}} \in \mathbb{R}^\mathfrak{D}. \quad (\text{IV.1})$$

On définit maintenant les projections moyennes discrètes, pour toute fonction \mathbf{v} dans $(H^1(\Omega))^2$, une sur le bord comme suit

$$\mathbb{P}_m^{\partial\Omega} \mathbf{v} = \left(\left(\frac{1}{m_{B_\kappa}} \int_{B_\kappa} \mathbf{v}(x) dx \right)_{\kappa \in \partial\mathfrak{M}}, \left(\frac{1}{m_{B_{\kappa^*}}} \int_{B_{\kappa^*}} \mathbf{v}(x) dx \right)_{\kappa^* \in \partial\mathfrak{M}^*} \right), \quad (\text{IV.2})$$

et une autre à l'intérieur :

$$\mathbb{P}_m^\mathfrak{M} \mathbf{v} = \left(\left(\frac{1}{m_\kappa} \int_\kappa \mathbf{v}(x) dx \right)_{\kappa \in \mathfrak{M}} \right), \quad \mathbb{P}_m^{\mathfrak{M}^*} \mathbf{v} = \left(\left(\frac{1}{m_{\kappa^*}} \int_{\kappa^*} \mathbf{v}(x) dx \right)_{\kappa^* \in \mathfrak{M}^*} \right). \quad (\text{IV.3})$$

¹Un aide mémoire rassemblant les notations de ce chapitre est disponible page 243.

Finalement, on les regroupe de la manière suivante :

$$\mathbb{P}_m^{\mathcal{T}} \mathbf{v} = (\mathbb{P}_m^{\mathfrak{M}} \mathbf{v}, \mathbb{P}_m^{\mathfrak{M}^*} \mathbf{v}, \mathbb{P}_m^{\partial\Omega} \mathbf{v}), \quad \forall \mathbf{v} \in (H^1(\Omega))^2. \quad (\text{IV.4})$$

On introduit également une projection centrée sur le maillage \mathcal{T} :

$$\mathbb{P}_c^{\mathcal{T}} \mathbf{v} = ((\mathbf{v}(x_{\kappa}))_{\kappa \in (\mathfrak{M} \cup \partial\mathfrak{M})}, (\mathbf{v}(x_{\kappa^*}))_{\kappa^* \in (\mathfrak{M}^* \cup \partial\mathfrak{M}^*)}), \quad \forall \mathbf{v} \in (H^2(\Omega))^2, \quad (\text{IV.5})$$

une projection moyenne sur le maillage diamant \mathfrak{D}

$$\mathbb{P}_m^{\mathfrak{D}} q = \left(\left(\frac{1}{m_{\mathfrak{D}}} \int_{\mathfrak{D}} q(x) dx \right)_{\mathfrak{D} \in \mathfrak{D}} \right), \quad \forall q \in H^1(\Omega), \quad (\text{IV.6})$$

et une projection moyenne sur les quarts de diamant \mathfrak{Q}

$$\mathbb{P}_m^{\mathfrak{Q}} q = \left(\left(\frac{1}{m_{\mathfrak{Q}}} \int_{\mathfrak{Q}} q(x) dx \right)_{\mathfrak{Q} \in \mathfrak{Q}} \right), \quad \forall q \in H^1(\Omega). \quad (\text{IV.7})$$

On spécifie deux sous espaces discrets de $(\mathbb{R}^2)^{\mathcal{T}}$ utilisés pour prendre en compte les conditions aux bords de Dirichlet

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_0 &= \left\{ \mathbf{v}^{\mathcal{T}} \in (\mathbb{R}^2)^{\mathcal{T}} \text{ tel que } \mathbf{v}_{\kappa} = 0, \forall \kappa \in \partial\mathfrak{M} \text{ et } \mathbf{v}_{\kappa^*} = 0, \forall \kappa^* \in \partial\mathfrak{M}^* \right\}, \\ \mathbb{E}_{\mathbf{g}} &= \left\{ \mathbf{v}^{\mathcal{T}} \in (\mathbb{R}^2)^{\mathcal{T}} \text{ tel que } \mathbf{v}_{\kappa} = (\mathbb{P}_m^{\partial\Omega} \mathbf{g})_{\kappa}, \forall \kappa \in \partial\mathfrak{M} \text{ et } \mathbf{v}_{\kappa^*} = (\mathbb{P}_m^{\partial\Omega} \mathbf{g})_{\kappa^*}, \forall \kappa^* \in \partial\mathfrak{M}^* \right\}. \end{aligned} \quad (\text{IV.8})$$

On définit également la projection $\mathfrak{P}_{m,\mathbf{g}}$ sur l'espace $\mathbb{E}_{\mathbf{g}}$:

$$\begin{aligned} \mathfrak{P}_{m,\mathbf{g}} : (\mathbb{R}^2)^{\mathcal{T}} &\longrightarrow \mathbb{E}_{\mathbf{g}} \\ \mathbf{u}^{\mathcal{T}} &\longmapsto ((\mathbf{u}_{\kappa})_{\kappa \in \mathfrak{M}}, (\mathbb{P}_m^{\partial\Omega} \mathbf{g})_{\kappa \in \partial\mathfrak{M}}, (\mathbf{u}_{\kappa^*})_{\kappa^* \in \mathfrak{M}^*}, (\mathbb{P}_m^{\partial\Omega} \mathbf{g})_{\kappa^* \in \partial\mathfrak{M}^*}), \end{aligned} \quad (\text{IV.9})$$

et une projection $\mathfrak{P}_{\mathbf{g}}^{\partial\mathfrak{M}}$ faible :

$$\begin{aligned} \mathfrak{P}_{\mathbf{g}}^{\partial\mathfrak{M}} : (\mathbb{R}^2)^{\mathcal{T}} &\longrightarrow (\mathbb{R}^2)^{\mathcal{T}} \\ \mathbf{u}^{\mathcal{T}} &\longmapsto ((\mathbf{u}_{\kappa})_{\kappa \in \mathfrak{M}}, (\mathbf{g}_{\sigma})_{\sigma \in \partial\mathfrak{M}}, (\mathbf{u}_{\kappa^*})_{\kappa^* \in \mathfrak{M}^* \cup \partial\mathfrak{M}^*}), \end{aligned} \quad (\text{IV.10})$$

$$\text{avec } \mathbf{g}_{\sigma} = \frac{1}{m_{\sigma}} \int_{\sigma} \mathbf{g}(x) dx.$$

IV.2 Définitions des opérateurs discrets

Dans cette section, on définit les opérateurs discrets qui sont nécessaires pour écrire et analyser le schéma DDFV. On commence par le gradient discret d'un champ de vecteurs.

Définition IV.1 (Gradient discret)

Le gradient discret d'un champ de vecteurs de $(\mathbb{R}^2)^{\mathcal{T}}$ est défini de la manière suivante : $\nabla^{\mathfrak{D}} : \mathbf{u}^{\mathcal{T}} \in (\mathbb{R}^2)^{\mathcal{T}} \mapsto (\nabla^{\mathfrak{D}} \mathbf{u}^{\mathcal{T}})_{\mathfrak{D} \in \mathfrak{D}} \in (\mathcal{M}_2(\mathbb{R}))^{\mathfrak{D}}$, avec pour $\mathfrak{D} \in \mathfrak{D}$:

$$\nabla^{\mathfrak{D}} \mathbf{u}^{\mathcal{T}} = \frac{1}{\sin(\alpha_{\mathfrak{D}})} \left[\frac{\mathbf{u}_{\mathcal{L}} - \mathbf{u}_{\kappa}}{m_{\sigma^*}} \otimes \vec{\mathbf{n}}_{\sigma\kappa} + \frac{\mathbf{u}_{\mathcal{L}^*} - \mathbf{u}_{\kappa^*}}{m_{\sigma}} \otimes \vec{\mathbf{n}}_{\sigma^*\kappa^*} \right],$$

où \otimes représente le produit tensoriel. Il peut aussi s'écrire de la manière suivante :

$$\nabla^{\mathfrak{D}} \mathbf{u}^{\mathcal{T}} = \frac{1}{2m_{\mathfrak{D}}} [m_{\sigma}(\mathbf{u}_{\mathcal{L}} - \mathbf{u}_{\kappa}) \otimes \vec{\mathbf{n}}_{\sigma\kappa} + m_{\sigma^*}(\mathbf{u}_{\mathcal{L}^*} - \mathbf{u}_{\kappa^*}) \otimes \vec{\mathbf{n}}_{\sigma^*\kappa^*}].$$

Remarque IV.2

Il peut être également vu comme le gradient discret de ses composantes en utilisant le gradient discret d'un champ scalaire de $\mathbb{R}^{\mathcal{T}}$ (Définition I.7) :

$$\nabla^{\mathfrak{D}} \mathbf{u}^{\mathcal{T}} = \nabla^{\mathfrak{D}} \begin{pmatrix} u_1^{\mathcal{T}} \\ u_2^{\mathcal{T}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {}^t \nabla^{\mathfrak{D}} u_1^{\mathcal{T}} \\ {}^t \nabla^{\mathfrak{D}} u_2^{\mathcal{T}} \end{pmatrix}, \quad \forall \mathfrak{D} \in \mathfrak{D}.$$

Remarque IV.3

Pour tout $\mathbf{u}^\tau \in (\mathbb{R}^2)^\tau$, la propriété $\nabla^\mathcal{D} \mathbf{u}^\tau = 0$ implique l'existence de deux constantes $\mathbf{c}_0 \in \mathbb{R}^2$ et $\mathbf{c}_1 \in \mathbb{R}^2$ telles que :

$$\begin{aligned} \forall \kappa \in (\mathfrak{M} \cup \partial\mathfrak{M}), \quad \mathbf{u}_\kappa &= \mathbf{c}_0, \\ \forall \kappa^* \in (\mathfrak{M}^* \cup \partial\mathfrak{M}^*), \quad \mathbf{u}_{\kappa^*} &= \mathbf{c}_1. \end{aligned}$$

Si de plus $\mathbf{u}^\tau \in \mathbb{E}_0$ alors, on en déduit $\mathbf{c}_0 = \mathbf{c}_1 = 0$ et finalement $\mathbf{u}^\tau = 0$.

Définition IV.4 (Divergence discrète)

L'opérateur de divergence discrète d'un champ de tenseurs discrets de $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}))^\mathcal{D}$ est défini de la manière suivante : $\mathbf{div}^\tau : \xi^\mathcal{D} \in (\mathcal{M}_2(\mathbb{R}))^\mathcal{D} \mapsto \mathbf{div}^\tau \xi^\mathcal{D} \in (\mathbb{R}^2)^\tau$. Soit $\xi^\mathcal{D} = (\xi^\mathcal{D})_{\mathcal{D} \in \mathcal{D}} \in (\mathcal{M}_2(\mathbb{R}))^\mathcal{D}$, on pose

$$\mathbf{div}^\tau \xi^\mathcal{D} = (\mathbf{div}^\mathfrak{M} \xi^\mathcal{D}, \mathbf{div}^{\partial\mathfrak{M}} \xi^\mathcal{D}, \mathbf{div}^{\mathfrak{M}^*} \xi^\mathcal{D}, \mathbf{div}^{\partial\mathfrak{M}^*} \xi^\mathcal{D}),$$

où $\mathbf{div}^\mathfrak{M} \xi^\mathcal{D} = (\mathbf{div}^\kappa \xi^\mathcal{D})_{\kappa \in \mathfrak{M}}$, $\mathbf{div}^{\partial\mathfrak{M}} \xi^\mathcal{D} = 0$, $\mathbf{div}^{\mathfrak{M}^*} \xi^\mathcal{D} = (\mathbf{div}^{\kappa^*} \xi^\mathcal{D})_{\kappa^* \in \mathfrak{M}^*}$ et $\mathbf{div}^{\partial\mathfrak{M}^*} \xi^\mathcal{D} = (\mathbf{div}^{\kappa^*} \xi^\mathcal{D})_{\kappa^* \in \partial\mathfrak{M}^*}$ avec :

$$\begin{aligned} \mathbf{div}^\kappa \xi^\mathcal{D} &= \frac{1}{m_\kappa} \sum_{\mathcal{D}_{\sigma, \sigma^*} \in \mathcal{D}_\kappa} m_\sigma \xi^\mathcal{D} \cdot \vec{\mathbf{n}}_{\sigma\kappa}, \quad \forall \kappa \in \mathfrak{M}, \\ \mathbf{div}^{\kappa^*} \xi^\mathcal{D} &= \frac{1}{m_{\kappa^*}} \sum_{\mathcal{D}_{\sigma, \sigma^*} \in \mathcal{D}_{\kappa^*}} m_{\sigma^*} \xi^\mathcal{D} \cdot \vec{\mathbf{n}}_{\sigma^*\kappa^*}, \quad \forall \kappa^* \in \mathfrak{M}^*, \\ \mathbf{div}^{\kappa^*} \xi^\mathcal{D} &= \frac{1}{m_{\kappa^*}} \left(\sum_{\mathcal{D}_{\sigma, \sigma^*} \in \mathcal{D}_{\kappa^*}} m_{\sigma^*} \xi^\mathcal{D} \cdot \vec{\mathbf{n}}_{\sigma^*\kappa^*} + \sum_{\mathcal{D}_{\sigma, \sigma^*} \in \mathcal{D}_{\kappa^*} \cap \mathcal{D}_{ext}} d_{\kappa^*, \mathcal{L}} \xi^\mathcal{D} \cdot \vec{\mathbf{n}}_{\sigma\kappa} \right), \quad \forall \kappa^* \in \partial\mathfrak{M}^*. \end{aligned}$$

Grâce au gradient discret on peut définir un tenseur des taux de déformation et une divergence discrète d'un champ de vecteurs de $(\mathbb{R}^2)^\tau$.

Définition IV.5

Le tenseur des taux de déformation d'un champ de vecteurs de $(\mathbb{R}^2)^\tau$ est défini de la manière suivante : $\mathbf{D}^\mathcal{D} : \mathbf{u}^\tau \in (\mathbb{R}^2)^\tau \mapsto (\mathbf{D}^\mathcal{D} \mathbf{u}^\tau)_{\mathcal{D} \in \mathcal{D}} \in (\mathcal{M}_2(\mathbb{R}))^\mathcal{D}$, avec

$$\mathbf{D}^\mathcal{D} \mathbf{u}^\tau = \frac{\nabla^\mathcal{D} \mathbf{u}^\tau + {}^t(\nabla^\mathcal{D} \mathbf{u}^\tau)}{2}, \quad \forall \mathcal{D} \in \mathcal{D}.$$

Définition IV.6

La divergence discrète d'un champ de vecteurs de $(\mathbb{R}^2)^\tau$ est définie de la manière suivante : $\mathbf{div}^\mathcal{D} : \mathbf{u}^\tau \in (\mathbb{R}^2)^\tau \mapsto (\mathbf{div}^\mathcal{D} \mathbf{u}^\tau)_{\mathcal{D} \in \mathcal{D}} \in \mathbb{R}^\mathcal{D}$, avec

$$\mathbf{div}^\mathcal{D} \mathbf{u}^\tau = \text{Tr}(\nabla^\mathcal{D} \mathbf{u}^\tau), \quad \forall \mathcal{D} \in \mathcal{D}.$$

Remarque IV.7

On remarque que pour tout $\mathcal{D} \in \mathcal{D}$, $\mathbf{div}^\mathcal{D} \mathbf{u}^\tau$ peut s'exprimer de la manière suivante :

$$\mathbf{div}^\mathcal{D} \mathbf{u}^\tau = \frac{1}{2m_\mathcal{D}} [m_\sigma (\mathbf{u}_\mathcal{L} - \mathbf{u}_\kappa) \cdot \vec{\mathbf{n}}_{\sigma\kappa} + m_{\sigma^*} (\mathbf{u}_{\mathcal{L}^*} - \mathbf{u}_{\kappa^*}) \cdot \vec{\mathbf{n}}_{\sigma^*\kappa^*}], \quad \forall \mathbf{u}^\tau \in (\mathbb{R}^2)^\tau,$$

et

$$\mathbf{div}^\mathcal{D} \mathbf{u}^\tau = \frac{1}{m_\mathcal{D}} \sum_{s=[x_\kappa, x_{\kappa^*}] \in \mathcal{E}_\mathcal{D}} m_s \frac{\mathbf{u}_{\kappa^*} + \mathbf{u}_\kappa}{2} \cdot \vec{\mathbf{n}}_{s\mathcal{D}}, \quad \forall \mathbf{u}^\tau \in \mathbb{E}_0. \quad (\text{IV.11})$$

La relation IV.11 est la version discrète de $\int_\mathcal{D} \text{div}(\mathbf{u})(z) dz = \int_{\partial\mathcal{D}} \mathbf{u}(s) \cdot \vec{\mathbf{n}}_\mathcal{D} ds$, pour toute fonction \mathbf{u} régulière.

IV.3 Définitions des produits scalaires et normes associées

Dans la suite, $\|\cdot\|_2$ représente la norme L^2 classique quand on considère une fonction scalaire ou vectorielle et la norme de Frobenius quand on considère une fonction matricielle :

$$\begin{aligned}\|\xi\|_{\mathcal{F}}^2 &= (\xi : \xi), \quad \forall \xi \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}), \\ \|\xi\|_2^2 &= \int_{\Omega} \|\xi(x)\|_{\mathcal{F}}^2 dx, \quad \forall \xi \in L^2(\Omega, \mathcal{M}_2(\mathbb{R})),\end{aligned}$$

où $(\xi : \tilde{\xi}) = \sum_{1 \leq i, j \leq 2} \xi_{i,j} \tilde{\xi}_{i,j} = \text{Tr}({}^t \xi \tilde{\xi})$, $\forall \xi, \tilde{\xi} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Remarque IV.8

La norme matricielle $\|\cdot\|_{\mathcal{F}}$ vérifie la propriété suivante

$$\left\| \frac{A + {}^t A}{2} \right\|_{\mathcal{F}} \leq \|A\|_{\mathcal{F}}, \quad \forall A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}).$$

On définit ensuite les opérateurs de trace sur $(\mathbb{R}^2)^{\mathcal{T}}$ et $(\mathbb{R}^2)^{\mathfrak{D}}$. Soit $\gamma^{\mathcal{T}} : \mathbf{u}^{\mathcal{T}} \in (\mathbb{R}^2)^{\mathcal{T}} \mapsto \gamma^{\mathcal{T}}(\mathbf{u}^{\mathcal{T}}) = (\gamma_{\sigma}(\mathbf{u}^{\mathcal{T}}))_{\sigma \in \partial \mathfrak{M}} \in (\mathbb{R}^2)^{\partial \mathfrak{M}}$, tel que :

$$\gamma_{\sigma}(\mathbf{u}^{\mathcal{T}}) = \frac{d_{\kappa^*, \mathcal{L}}(\mathbf{u}_{\kappa^*} + \mathbf{u}_{\mathcal{L}}) + d_{\mathcal{L}^*, \mathcal{L}}(\mathbf{u}_{\mathcal{L}^*} + \mathbf{u}_{\mathcal{L}})}{2m_{\sigma}}, \quad \forall \sigma = [x_{\kappa^*}, x_{\mathcal{L}^*}] \in \partial \mathfrak{M}. \quad (\text{IV.12})$$

Cet opérateur nous permettra d'imposer les conditions de Dirichlet au sens faible. Le second opérateur est noté $\gamma^{\mathfrak{D}} : \phi^{\mathfrak{D}} \in (\mathbb{R}^2)^{\mathfrak{D}} \mapsto (\phi^{\mathfrak{D}})_{\mathcal{D} \in \mathfrak{D}_{ext}} \in (\mathbb{R}^2)^{\mathfrak{D}_{ext}}$, c'est uniquement l'opérateur de restriction sur \mathfrak{D}_{ext} . On définit maintenant les produits scalaires sur les espaces d'approximation :

$$\begin{aligned}\llbracket \mathbf{v}^{\mathcal{T}}, \mathbf{u}^{\mathcal{T}} \rrbracket_{\mathcal{T}} &= \frac{1}{2} \left(\sum_{\kappa \in \mathfrak{M}} m_{\kappa} \mathbf{u}_{\kappa} \cdot \mathbf{v}_{\kappa} + \sum_{\kappa^* \in \mathfrak{M}^* \cup \partial \mathfrak{M}^*} m_{\kappa^*} \mathbf{u}_{\kappa^*} \cdot \mathbf{v}_{\kappa^*} \right), \quad \forall \mathbf{u}^{\mathcal{T}}, \mathbf{v}^{\mathcal{T}} \in (\mathbb{R}^2)^{\mathcal{T}}, \\ (\phi^{\mathfrak{D}}, \mathbf{v}^{\mathcal{T}})_{\partial \Omega} &= \sum_{\mathcal{D}, \sigma^* \in \mathfrak{D}_{ext}} m_{\sigma} \phi^{\mathfrak{D}} \cdot \mathbf{v}_{\sigma}, \quad \forall \phi^{\mathfrak{D}} \in (\mathbb{R}^2)^{\mathfrak{D}_{ext}}, \mathbf{v}^{\mathcal{T}} \in (\mathbb{R}^2)^{\partial \mathfrak{M}}, \\ (\xi^{\mathfrak{D}} : \phi^{\mathfrak{D}})_{\mathfrak{D}} &= \sum_{\mathcal{D} \in \mathfrak{D}} m_{\mathcal{D}} (\xi^{\mathfrak{D}} : \phi^{\mathfrak{D}}), \quad \forall \xi^{\mathfrak{D}}, \phi^{\mathfrak{D}} \in (\mathcal{M}_2(\mathbb{R}))^{\mathfrak{D}}, \\ (p^{\mathfrak{D}}, q^{\mathfrak{D}})_{\mathfrak{D}} &= \sum_{\mathcal{D} \in \mathfrak{D}} m_{\mathcal{D}} p^{\mathfrak{D}} q^{\mathfrak{D}}, \quad \forall p^{\mathfrak{D}}, q^{\mathfrak{D}} \in \mathbb{R}^{\mathfrak{D}},\end{aligned} \quad (\text{IV.13})$$

et les normes correspondantes :

$$\begin{aligned}\|\mathbf{u}^{\mathcal{T}}\|_2 &= \llbracket \mathbf{u}^{\mathcal{T}}, \mathbf{u}^{\mathcal{T}} \rrbracket_{\mathcal{T}}^{\frac{1}{2}}, \quad \forall \mathbf{u}^{\mathcal{T}} \in (\mathbb{R}^2)^{\mathcal{T}}, \\ \|\xi^{\mathfrak{D}}\|_2 &= (\xi^{\mathfrak{D}} : \xi^{\mathfrak{D}})_{\mathfrak{D}}^{\frac{1}{2}}, \quad \forall \xi^{\mathfrak{D}} \in (\mathcal{M}_2(\mathbb{R}))^{\mathfrak{D}}, \\ \|p^{\mathfrak{D}}\|_2 &= (p^{\mathfrak{D}}, p^{\mathfrak{D}})_{\mathfrak{D}}^{\frac{1}{2}}, \quad \forall p^{\mathfrak{D}} \in \mathbb{R}^{\mathfrak{D}}.\end{aligned} \quad (\text{IV.14})$$

IV.4 Relation de dualité : Formule de Green

On a vu dans le Théorème I.10 que les opérateurs gradient discret d'un champ scalaire de $\mathbb{R}^{\mathcal{T}}$ et divergence discrète d'un champ vectoriel de $(\mathbb{R}^2)^{\mathfrak{D}}$ sont en dualité. On souhaite généraliser cette formule de Green discrète pour les champs de $(\mathbb{R}^2)^{\mathcal{T}}$ et de $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}))^{\mathfrak{D}}$. Cette nouvelle formule de Green discrète est déduite du Théorème I.10 en travaillant composante par composante.

Théorème IV.9 (Formule de Green discrète)

Pour tout $\xi^{\mathfrak{D}} \in (\mathcal{M}_2(\mathbb{R}))^{\mathfrak{D}}$, $\mathbf{u}^{\mathcal{T}} \in (\mathbb{R}^2)^{\mathcal{T}}$, on a

$$\llbracket \text{div}^{\mathcal{T}} \xi^{\mathfrak{D}}, \mathbf{u}^{\mathcal{T}} \rrbracket_{\mathcal{T}} = -(\xi^{\mathfrak{D}} : \nabla^{\mathfrak{D}} \mathbf{u}^{\mathcal{T}})_{\mathfrak{D}} + (\gamma^{\mathfrak{D}}(\xi^{\mathfrak{D}}) \cdot \vec{\mathbf{n}}, \gamma^{\mathcal{T}}(\mathbf{u}^{\mathcal{T}}))_{\partial \Omega},$$

où $\vec{\mathbf{n}}$ est la normale unitaire sortante du domaine.

Démonstration : Soit $\xi^{\mathfrak{D}} \in (\mathcal{M}_2(\mathbb{R}))^{\mathfrak{D}}$ avec $\xi^{\mathfrak{D}} = \begin{pmatrix} \xi_1^{\mathfrak{D}} \\ \xi_2^{\mathfrak{D}} \end{pmatrix}$, $\xi_1^{\mathfrak{D}}, \xi_2^{\mathfrak{D}} \in \mathbb{R}^2$, et $\mathbf{u}^{\mathcal{T}} = \begin{pmatrix} u_1^{\mathcal{T}} \\ u_2^{\mathcal{T}} \end{pmatrix} \in (\mathbb{R}^2)^{\mathcal{T}}$. Par définition de $(\cdot : \cdot)_{\mathfrak{D}}$, on a

$$(\xi^{\mathfrak{D}} : \nabla^{\mathfrak{D}} \mathbf{u}^{\mathcal{T}})_{\mathfrak{D}} = \sum_{\mathcal{D} \in \mathfrak{D}} m_{\mathcal{D}} \xi_1^{\mathfrak{D}} \cdot \nabla^{\mathcal{D}} u_1^{\mathcal{T}} + \sum_{\mathcal{D} \in \mathfrak{D}} m_{\mathcal{D}} \xi_2^{\mathfrak{D}} \cdot \nabla^{\mathcal{D}} u_2^{\mathcal{T}}.$$

On applique la formule de Green discrète (Théorème I.10) à chaque composante de la vitesse

$$\begin{aligned} (\xi^{\mathfrak{D}} : \nabla^{\mathfrak{D}} \mathbf{u}^{\mathcal{T}})_{\mathfrak{D}} &= - [\operatorname{div}^{\mathcal{T}} \xi_1^{\mathfrak{D}}, u_1^{\mathcal{T}}]_{\mathcal{T}} + \sum_{\mathcal{D}_{\sigma, \sigma^*} \in \mathfrak{D}_{ext}} m_{\sigma} (\xi_1^{\mathfrak{D}} \cdot \tilde{\mathbf{n}}_{\sigma \mathcal{K}}) \gamma_{\sigma} (u_1^{\mathcal{T}}) \\ &\quad - [\operatorname{div}^{\mathcal{T}} \xi_2^{\mathfrak{D}}, u_2^{\mathcal{T}}]_{\mathcal{T}} + \sum_{\mathcal{D}_{\sigma, \sigma^*} \in \mathfrak{D}_{ext}} m_{\sigma} (\xi_2^{\mathfrak{D}} \cdot \tilde{\mathbf{n}}_{\sigma \mathcal{K}}) \gamma_{\sigma} (u_2^{\mathcal{T}}). \end{aligned}$$

De plus, comme $(\xi^{\mathfrak{D}} \cdot \tilde{\mathbf{n}}_{\sigma \mathcal{K}}) \cdot \gamma_{\sigma}(\mathbf{u}^{\mathcal{T}}) = (\xi_1^{\mathfrak{D}} \cdot \tilde{\mathbf{n}}_{\sigma \mathcal{K}}) \gamma_{\sigma}(u_1^{\mathcal{T}}) + (\xi_2^{\mathfrak{D}} \cdot \tilde{\mathbf{n}}_{\sigma \mathcal{K}}) \gamma_{\sigma}(u_2^{\mathcal{T}})$ pour tout $\mathcal{D} \in \mathfrak{D}_{ext}$, on obtient

$$\sum_{\mathcal{D}_{\sigma, \sigma^*} \in \mathfrak{D}_{ext}} m_{\sigma} (\xi_1^{\mathfrak{D}} \cdot \tilde{\mathbf{n}}_{\sigma \mathcal{K}}) \gamma_{\sigma}(u_1^{\mathcal{T}}) + \sum_{\mathcal{D}_{\sigma, \sigma^*} \in \mathfrak{D}_{ext}} m_{\sigma} (\xi_2^{\mathfrak{D}} \cdot \tilde{\mathbf{n}}_{\sigma \mathcal{K}}) \gamma_{\sigma}(u_2^{\mathcal{T}}) = (\gamma^{\mathfrak{D}}(\xi^{\mathfrak{D}}) \cdot \tilde{\mathbf{n}}, \gamma^{\mathcal{T}}(\mathbf{u}^{\mathcal{T}}))_{\partial \Omega}.$$

Le produit scalaire $[\cdot, \cdot]_{\mathcal{T}}$ et la Définition IV.4 de la divergence impliquent

$$2[\operatorname{div}^{\mathcal{T}} \xi^{\mathfrak{D}}, \mathbf{u}^{\mathcal{T}}]_{\mathcal{T}} = \sum_{\mathcal{K} \in \mathfrak{M}} \sum_{\mathcal{D}_{\sigma, \sigma^*} \in \mathfrak{D}_{\mathcal{K}}} m_{\sigma} \mathbf{u}_{\mathcal{K}} \cdot (\xi^{\mathfrak{D}} \cdot \tilde{\mathbf{n}}_{\sigma \mathcal{K}}) + \sum_{\mathcal{K}^* \in \mathfrak{M}^* \cup \partial \mathfrak{M}^*} \sum_{\mathcal{D}_{\sigma, \sigma^*} \in \mathfrak{D}_{\mathcal{K}^*}} m_{\sigma^*} \mathbf{u}_{\mathcal{K}^*} \cdot (\xi^{\mathfrak{D}} \cdot \tilde{\mathbf{n}}_{\sigma^* \mathcal{K}^*}).$$

On conclut en utilisant comme précédemment que $\mathbf{u}_{\mathcal{K}} \cdot (\xi^{\mathfrak{D}} \cdot \tilde{\mathbf{n}}_{\sigma \mathcal{K}}) = (\xi_1^{\mathfrak{D}} \cdot \tilde{\mathbf{n}}_{\sigma \mathcal{K}}) u_{1, \mathcal{K}} + (\xi_2^{\mathfrak{D}} \cdot \tilde{\mathbf{n}}_{\sigma \mathcal{K}}) u_{2, \mathcal{K}}$ et $\mathbf{u}_{\mathcal{K}^*} \cdot (\xi^{\mathfrak{D}} \cdot \tilde{\mathbf{n}}_{\sigma^* \mathcal{K}^*}) = (\xi_1^{\mathfrak{D}} \cdot \tilde{\mathbf{n}}_{\sigma^* \mathcal{K}^*}) u_{1, \mathcal{K}^*} + (\xi_2^{\mathfrak{D}} \cdot \tilde{\mathbf{n}}_{\sigma^* \mathcal{K}^*}) u_{2, \mathcal{K}^*}$ pour tout $\mathcal{D} \in \mathfrak{D}_{ext}$, ainsi

$$[\operatorname{div}^{\mathcal{T}} \xi^{\mathfrak{D}}, \mathbf{u}^{\mathcal{T}}]_{\mathcal{T}} = [\operatorname{div}^{\mathcal{T}} \xi_1^{\mathfrak{D}}, u_1^{\mathcal{T}}]_{\mathcal{T}} + [\operatorname{div}^{\mathcal{T}} \xi_2^{\mathfrak{D}}, u_2^{\mathcal{T}}]_{\mathcal{T}},$$

ceci finit la démonstration. ■

IV.5 Stabilisation de type Brezzi-Pitkäranta

Finalement, un opérateur du second ordre discret est nécessaire pour définir le terme de stabilisation dans le problème de Stokes, comme on le verra par la suite. Cet opérateur pénalise les oscillations de la pression.

Définition IV.10

On définit un opérateur du second ordre discret, noté $\Delta^{\mathfrak{D}} : p^{\mathfrak{D}} \in \mathbb{R}^{\mathfrak{D}} \mapsto \Delta^{\mathfrak{D}} p^{\mathfrak{D}} \in \mathbb{R}^{\mathfrak{D}}$, comme suit :

$$\Delta^{\mathfrak{D}} p^{\mathfrak{D}} = \frac{1}{m_{\mathfrak{D}}} \sum_{\mathfrak{s} = \mathfrak{D} \mid \mathfrak{D}' \in \mathcal{E}_{\mathfrak{D}}} \frac{d_{\mathfrak{D}}^2 + d_{\mathfrak{D}'}^2}{d_{\mathfrak{D}}^2} (p^{\mathfrak{D}'} - p^{\mathfrak{D}}), \quad \forall \mathfrak{D} \in \mathfrak{D}.$$

Remarque IV.11

On rappelle que $\mathcal{E}_{\mathfrak{D}}$ ne contient que les côtés intérieurs des diamants. En effet, on ne considère jamais $\mathfrak{s} \subset \partial \Omega$. Ceci revient à dire que l'on a imposé une condition de Neumann homogène sur le bord $\partial \Omega$ directement dans l'opérateur $\Delta^{\mathfrak{D}}$.

De plus, il faut remarquer que cet opérateur n'est pas une approximation consistante de l'opérateur de Laplace. Ceci n'est pas nécessaire. En fait, une approximation consistante est basée sur une formule de flux à deux points qui nécessite un maillage diamant vérifiant la condition d'orthogonalité comme c'est le cas pour des maillages *admissibles* [EGH00], ceci n'a pas de raison d'être vérifié pour le maillage diamant \mathfrak{D} obtenu à partir de \mathfrak{M} .

Relativement à cet opérateur, on définit une semi-norme dépendant du maillage $|\cdot|_h$ sur $\mathbb{R}^{\mathfrak{D}}$ par :

$$|p^{\mathfrak{D}}|_h^2 = \sum_{\mathfrak{s} = \mathfrak{D} \mid \mathfrak{D}' \in \mathcal{E}} (d_{\mathfrak{D}}^2 + d_{\mathfrak{D}'}^2) (p^{\mathfrak{D}'} - p^{\mathfrak{D}})^2, \quad \forall p^{\mathfrak{D}} \in \mathbb{R}^{\mathfrak{D}}. \quad (\text{IV.15})$$

On peut voir cette semi-norme $|p|_h$ comme la version discrète de $\operatorname{size}(\mathcal{T}) |\nabla p|_2$.

Remarque IV.12

En réorganisant la somme sur les côtés $\mathfrak{s} \in \mathfrak{S}$ des diamants, on a pour tout $p^{\mathfrak{D}} \in \mathbb{R}^{\mathfrak{D}}$

$$\begin{aligned} -(d_{\mathfrak{D}}^2 \Delta^{\mathfrak{D}} p^{\mathfrak{D}}, p^{\mathfrak{D}})_{\mathfrak{D}} &= \sum_{\mathfrak{D} \in \mathfrak{D}} p^{\mathfrak{D}} \sum_{\mathfrak{s}=\mathfrak{D} | \mathfrak{D}' \in \mathcal{E}_{\mathfrak{D}}} (d_{\mathfrak{D}}^2 + d_{\mathfrak{D}'}^2) (p^{\mathfrak{D}} - p^{\mathfrak{D}'}) \\ &= \sum_{\mathfrak{s}=\mathfrak{D} | \mathfrak{D}' \in \mathfrak{S}} (d_{\mathfrak{D}}^2 + d_{\mathfrak{D}'}^2) (p^{\mathfrak{D}'} - p^{\mathfrak{D}})^2 \\ &= |p^{\mathfrak{D}}|_h^2. \end{aligned}$$

Le lemme suivant est un lemme de Sobolev inverse, c'est-à-dire que la semi-norme discrète $|\cdot|_h$, définie par (IV.15), est bornée par la norme $L^2 \|\cdot\|_2$.

Lemme IV.13

Soit \mathcal{T} un maillage DDFV associé à Ω . Il existe une constante $C_2 > 0$, dépendant uniquement de $\text{reg}(\mathcal{T})$, telle que pour tout $p^{\mathfrak{D}} \in \mathbb{R}^{\mathfrak{D}}$, on a

$$|p^{\mathfrak{D}}|_h \leq C_2 \|p^{\mathfrak{D}}\|_2.$$

Démonstration : La définition (IV.15) de la semi-norme discrète $|\cdot|_h$ et l'inégalité de Young impliquent

$$|p^{\mathfrak{D}}|_h^2 \leq 2 \sum_{\mathfrak{s}=\mathfrak{D} | \mathfrak{D}' \in \mathfrak{S}} (d_{\mathfrak{D}}^2 + d_{\mathfrak{D}'}^2) ((p^{\mathfrak{D}'})^2 + (p^{\mathfrak{D}})^2).$$

En réorganisant la somme sur les diamants, on obtient

$$|p^{\mathfrak{D}}|_h^2 \leq 2 \sum_{\mathfrak{D} \in \mathfrak{D}} m_{\mathfrak{D}} (p^{\mathfrak{D}})^2 \left(\frac{1}{m_{\mathfrak{D}}} \sum_{\mathfrak{s}=\mathfrak{D} | \mathfrak{D}' \in \mathcal{E}_{\mathfrak{D}}} (d_{\mathfrak{D}}^2 + d_{\mathfrak{D}'}^2) \right).$$

On conclut en utilisant la relation (I.1) et le fait qu'un diamant a au plus quatre voisins. ■

IV.6 Propriétés des opérateurs discrets

Maintenant on donne plusieurs résultats sur les opérateurs discrets et sur les projections de fonctions sur le maillage. On montre seulement les résultats qui ne peuvent pas se déduire immédiatement de leurs versions scalaires, énoncées dans le Chapitre I, en travaillant composante par composante.

Lemme IV.14 ([Dro06, Lemme 8.1])

Pour $d = 2, 3$. Soit K un ouvert non vide polygonal convexe de \mathbb{R}^d tel que, pour un certain $\alpha > 0$, il existe une boule de rayon $\alpha \text{diam}(K)$ contenue dans K . Soit E un hyperplan affine de \mathbb{R}^d et σ un ouvert non vide de E contenu dans $\partial K \cap E$. Alors il existe une constante $C > 0$, dépendant uniquement de α , telle que pour tout $\mathbf{v} \in (H^1(K))^d$:

$$\left| \frac{1}{m_{\sigma}} \int_{\sigma} \mathbf{v}(s) ds \right|^2 \leq \frac{C \text{diam}(K)}{m_{\sigma}} \int_K \|\nabla \mathbf{v}(s)\|_{\mathcal{F}}^2 ds + \frac{C}{\text{diam}(K) m_{\sigma}} \int_K |\mathbf{v}(s)|^2 ds.$$

Théorème IV.15 (Inégalité de Poincaré discrète. Version vectorielle du Théorème I.11)

Soit \mathcal{T} un maillage DDFV associé à Ω . Il existe une constante $C > 0$, dépendant uniquement du diamètre de Ω et de $\text{reg}(\mathcal{T})$, telle que $\forall \mathbf{u}^{\mathcal{T}} \in \mathbb{E}_0$:

$$\|\mathbf{u}^{\mathcal{T}}\|_2 \leq C \|\nabla^{\mathfrak{D}} \mathbf{u}^{\mathcal{T}}\|_2.$$

Les propriétés suivantes pour la projection centrée, définie par (IV.5), seront utilisées par la suite dans l'estimation d'erreur de notre schéma.

Lemme IV.16 (Version vectorielle du Lemme I.14)

Soit \mathcal{T} un maillage DDFV associé à Ω . Il existe une constante $C > 0$, dépendant uniquement de $\text{reg}(\mathcal{T})$, telle que pour toute fonction \mathbf{v} dans $(H^2(\Omega))^2$, on a

$$\|\nabla \mathbf{v} - \nabla^{\mathcal{D}} \mathbb{P}_{\mathcal{C}}^{\mathcal{T}} \mathbf{v}\|_2 \leq C \text{size}(\mathcal{T}) \|\nabla \mathbf{v}\|_{H^1}.$$

Corollaire IV.17 (Version vectorielle du Corollaire I.15)

Soit \mathcal{T} un maillage DDFV associé à Ω . Il existe une constante $C > 0$, dépendant uniquement de $\text{reg}(\mathcal{T})$, telle que pour toute fonction \mathbf{v} dans $(H^2(\Omega))^2$, on a

$$\|\nabla^{\mathcal{D}} \mathbb{P}_{\mathcal{C}}^{\mathcal{T}} \mathbf{v}\|_2 \leq C \|\nabla \mathbf{v}\|_{H^1}.$$

Corollaire IV.18

Soit \mathcal{T} un maillage DDFV associé à Ω . Il existe une constante $C > 0$, dépendant uniquement de $\text{reg}(\mathcal{T})$, telle que pour toute fonction \mathbf{v} dans $(H^2(\Omega))^2$ qui vérifie $\text{div } \mathbf{v} = 0$, on a

$$\|\text{div}^{\mathcal{D}} \mathbb{P}_{\mathcal{C}}^{\mathcal{T}} \mathbf{v}\|_2 \leq C \text{size}(\mathcal{T}) \|\nabla \mathbf{v}\|_{H^1}.$$

Démonstration : Soit $\mathbf{v} \in (H^2(\Omega))^2$ qui vérifie $\text{div } \mathbf{v} = 0$. Soit $\mathcal{D} \in \mathfrak{D}$; en utilisant le fait que $\text{div}^{\mathcal{D}}(\mathbb{P}_{\mathcal{C}}^{\mathcal{T}} \mathbf{v}) = \text{Tr}(\nabla^{\mathcal{D}} \mathbb{P}_{\mathcal{C}}^{\mathcal{T}} \mathbf{v})$ et $\text{div } \mathbf{v} = \text{Tr}(\nabla \mathbf{v}) = 0$, on a

$$\text{div}^{\mathcal{D}}(\mathbb{P}_{\mathcal{C}}^{\mathcal{T}} \mathbf{v}) = \text{Tr}(\nabla^{\mathcal{D}} \mathbb{P}_{\mathcal{C}}^{\mathcal{T}} \mathbf{v} - \nabla \mathbf{v}(x)), \quad \forall x \in \mathcal{D}.$$

Le Lemme IV.16 donne

$$\|\text{div}^{\mathcal{D}}(\mathbb{P}_{\mathcal{C}}^{\mathcal{T}} \mathbf{v})\|_2 \leq \|\nabla^{\mathcal{D}} \mathbb{P}_{\mathcal{C}}^{\mathcal{T}} \mathbf{v} - \nabla \mathbf{v}\|_2 \leq C \text{size}(\mathcal{T}) \|\nabla \mathbf{v}\|_{H^1}.$$

■

Ensuite on donne les propriétés suivantes pour la projection moyenne, définie par (IV.4).

Lemme IV.19 (Version vectorielle du Lemme I.17)

Soit \mathcal{T} un maillage DDFV associé à Ω . Il existe une constante $C_3 > 0$, dépendant uniquement de $\text{reg}(\mathcal{T})$, telle que pour toute fonction $\mathbf{v} \in (H^1(\Omega))^2$, on a

$$\|\nabla^{\mathcal{D}} \mathbb{P}_{\mathbf{m}}^{\mathcal{T}} \mathbf{v}\|_2 \leq C_3 \quad \text{et} \quad \|\mathbf{v} - \mathbb{P}_{\mathbf{m}}^{\mathcal{T}} \mathbf{v}\|_2 \leq C_3 \text{size}(\mathcal{T}) \|\nabla \mathbf{v}\|_2.$$

On a aussi besoin d'évaluer la contribution de l'erreur des deux différentes projections $\mathbb{P}_{\mathcal{C}}^{\mathcal{T}} \mathbf{v}$, $\mathfrak{P}_{\mathbf{m}, \mathbf{g}} \mathbb{P}_{\mathcal{C}}^{\mathcal{T}} \mathbf{v}$, définies par (IV.5) et (IV.9), avec $\mathbf{g} = \gamma(\mathbf{v})$. En fait la différence entre la projection $\mathbb{P}_{\mathcal{C}}^{\mathcal{T}}$ et $\mathfrak{P}_{\mathbf{m}, \mathbf{g}} \mathbb{P}_{\mathcal{C}}^{\mathcal{T}}$ se situe sur le bord primal $\partial \mathfrak{M}$ et sur le bord dual $\partial \mathfrak{M}^*$.

Lemme IV.20 (Version vectorielle du Lemme I.16)

Soit \mathcal{T} un maillage DDFV associé à Ω . Il existe une constante $C > 0$, dépendant uniquement de $\text{reg}(\mathcal{T})$, telle que pour toute fonction \mathbf{v} dans $(H^2(\Omega))^2$, dont la trace est notée $\mathbf{g} = \gamma(\mathbf{v})$, on a

$$\|\nabla^{\mathcal{D}} \mathbb{P}_{\mathcal{C}}^{\mathcal{T}} \mathbf{v} - \nabla^{\mathcal{D}} \mathfrak{P}_{\mathbf{m}, \mathbf{g}} \mathbb{P}_{\mathcal{C}}^{\mathcal{T}} \mathbf{v}\|_2 \leq C \text{size}(\mathcal{T}) \|\mathbf{v}\|_{H^2}.$$

On a aussi besoin d'évaluer la contribution de l'erreur des deux différentes projections $\mathbb{P}_{\mathcal{C}}^{\mathcal{T}} \mathbf{v}$, $\mathfrak{P}_{\mathbf{g}}^{\partial \mathfrak{M}} \mathbb{P}_{\mathcal{C}}^{\mathcal{T}} \mathbf{v}$, définies par (IV.5) et (IV.10), avec $\mathbf{g} = \gamma(\mathbf{v})$. En fait la différence entre la projection $\mathbb{P}_{\mathcal{C}}^{\mathcal{T}}$ et $\mathfrak{P}_{\mathbf{g}}^{\partial \mathfrak{M}} \mathbb{P}_{\mathcal{C}}^{\mathcal{T}}$ se situe uniquement sur le bord primal $\partial \mathfrak{M}$. On peut refaire la même démonstration que pour le Lemme IV.20 car l'argument principal est que $(\mathbb{P}_{\mathbf{m}}^{\partial \Omega} \mathbf{g})_{\kappa}$ vaut $\frac{1}{m_{B_{\kappa}}} \int_{B_{\kappa}} \mathbf{g}(x) dx$ avec x_{κ} le milieu de κ pour $\kappa \in \partial \mathfrak{M}$. Et maintenant on travaille avec $\mathbf{g}_{\sigma} = \frac{1}{m_{\sigma}} \int_{\sigma} \mathbf{g}(s) ds$ et x_{σ} le milieu de σ , on a donc bien le résultat suivant :

Lemme IV.21

Soit \mathcal{T} un maillage DDFV associé à Ω . Il existe une constante $C > 0$, dépendant uniquement de $\text{reg}(\mathcal{T})$, telle que pour toute fonction \mathbf{v} dans $(H^2(\Omega))^2$, dont la trace est notée $\mathbf{g} = \gamma(\mathbf{v})$, on a

$$\|\nabla^{\mathcal{D}} \mathbb{P}_{\mathcal{C}}^{\mathcal{T}} \mathbf{v} - \nabla^{\mathcal{D}} \mathfrak{P}_{\mathbf{g}}^{\mathfrak{m}} \mathbb{P}_{\mathcal{C}}^{\mathcal{T}} \mathbf{v}\|_2 \leq C \text{size}(\mathcal{T}) \|\mathbf{v}\|_{H^2}.$$

Lemme IV.22 (Version vectorielle du Lemme I.18)

Soit \mathcal{T} un maillage DDFV associé à Ω . Il existe une constante $C > 0$, dépendant uniquement de $\text{reg}(\mathcal{T})$, telle que pour toute fonction $\mathbf{v} \in (H^2(\Omega))^2$, on a

$$\|\mathbf{v} - \mathbb{P}_{\mathcal{C}}^{\mathcal{T}} \mathbf{v}\|_2 \leq C \text{size}(\mathcal{T}) \|\nabla \mathbf{v}\|_{H^1} \quad \text{et} \quad \|\mathbf{v} - \mathfrak{P}_{\mathbf{m}, \mathbf{g}} \mathbb{P}_{\mathcal{C}}^{\mathcal{T}} \mathbf{v}\|_2 \leq C \text{size}(\mathcal{T}) \|\nabla \mathbf{v}\|_{H^1},$$

où $\mathbf{g} = \gamma(\mathbf{v})$.

Puis on montre les propriétés suivantes pour la projection moyenne sur les diamants, définie par (IV.6). On rappelle que l'ensemble \mathfrak{S} ne contient que les côtés \mathfrak{s} des diamants tels que $\mathfrak{s} \subset \Omega$.

Lemme IV.23

Soit \mathcal{T} un maillage DDFV associé à Ω . Il existe une constante $C > 0$, dépendant uniquement de $\text{reg}(\mathcal{T})$, telle que pour toute fonction p dans $H^1(\Omega)$, on a

$$\sum_{\mathfrak{s}=\mathcal{D}|\mathcal{D}' \in \mathfrak{S}} (\mathbb{P}_m^{\mathcal{D}'} p - \mathbb{P}_m^{\mathcal{D}} p)^2 \leq C \|\nabla p\|_2^2.$$

Démonstration : Soit $p \in H^1(\Omega)$. On note pour simplifier $p^{\mathcal{D}} = \mathbb{P}_m^{\mathcal{D}} p$ pour tout $\mathcal{D} \in \mathfrak{D}$ et $p^{\mathfrak{s}} = \frac{1}{m_{\mathfrak{s}}} \int_{\mathfrak{s}} p(y) dy$, pour tous les côtés intérieurs des diamants $\mathfrak{s} \in \mathfrak{S}$. On ajoute $0 = p^{\mathfrak{s}} - p^{\mathfrak{s}}$ et on utilise l'inégalité de Young :

$$\sum_{\mathfrak{s}=\mathcal{D}|\mathcal{D}' \in \mathfrak{S}} (p^{\mathcal{D}'} - p^{\mathcal{D}})^2 \leq 2 \sum_{\mathfrak{s}=\mathcal{D}|\mathcal{D}' \in \mathfrak{S}} |p^{\mathcal{D}'} - p^{\mathfrak{s}}|^2 + 2 \sum_{\mathfrak{s}=\mathcal{D}|\mathcal{D}' \in \mathfrak{S}} |p^{\mathcal{D}} - p^{\mathfrak{s}}|^2. \quad (\text{IV.16})$$

Le Lemme I.12, appliqué à un diamant \mathcal{D} et à un de ses côtés \mathfrak{s} , conduit à

$$|p^{\mathcal{D}} - p^{\mathfrak{s}}|^2 \leq C \frac{d_{\mathcal{D}}^3}{m_{\mathfrak{s}} m_{\mathcal{D}}} \int_{\mathcal{D}} |\nabla p(z)|^2 dz.$$

Comme $\frac{d_{\mathcal{D}}^3}{m_{\mathfrak{s}} m_{\mathcal{D}}} \leq C(\text{reg}(\mathcal{T}))$, (voir la relation (I.1)), on obtient

$$|p^{\mathcal{D}} - p^{\mathfrak{s}}|^2 \leq C \int_{\mathcal{D}} |\nabla p(z)|^2 dz. \quad (\text{IV.17})$$

En substituant (IV.17) dans (IV.16), il vient que

$$\sum_{\mathfrak{s}=\mathcal{D}|\mathcal{D}' \in \mathfrak{S}} (p^{\mathcal{D}'} - p^{\mathcal{D}})^2 \leq C \sum_{\mathfrak{s}=\mathcal{D}|\mathcal{D}' \in \mathfrak{S}} \left(\int_{\mathcal{D}} |\nabla p(z)|^2 dz + \int_{\mathcal{D}'} |\nabla p(z)|^2 dz \right).$$

Comme un diamant possède au plus quatre diamants voisins, on en déduit le résultat

$$\sum_{\mathfrak{s}=\mathcal{D}|\mathcal{D}' \in \mathfrak{S}} (p^{\mathcal{D}'} - p^{\mathcal{D}})^2 \leq 4C \sum_{\mathcal{D} \in \mathfrak{D}} \int_{\mathcal{D}} |\nabla p(z)|^2 dz = 4C \int_{\Omega} |\nabla p(z)|^2 dz.$$

■

Proposition IV.24

Soit \mathcal{T} un maillage DDFV associé à Ω . Il existe une constante $C > 0$, dépendant uniquement de $\text{reg}(\mathcal{T})$, telle que pour toute fonction p dans $H^1(\Omega)$, on a

$$\|\mathbb{P}_m^{\mathfrak{D}} p - p\|_2 \leq C \text{size}(\mathcal{T}) \|\nabla p\|_2.$$

Démonstration : Soit $\mathcal{D} \in \mathfrak{D}$. Comme dans la démonstration précédente, on note pour simplifier $p^\mathcal{D} = \mathbb{P}_m^\mathcal{D} p$ pour tout $\mathcal{D} \in \mathfrak{D}$. On applique l'inégalité de Jensen

$$\int_{\mathcal{D}} |p^\mathcal{D} - p(x)|^2 dx \leq \frac{1}{m_\mathcal{D}} \int_{\mathcal{D}} \int_{\mathcal{D}} |p(z) - p(x)|^2 dz dx.$$

Soit $\mathfrak{s} \in \mathcal{E}_\mathcal{D}$, on ajoute $0 = \frac{1}{m_\mathfrak{s}} \int_{\mathfrak{s}} p(y) dy - \frac{1}{m_\mathfrak{s}} \int_{\mathfrak{s}} p(y) dy$ et on utilise l'inégalité de Young et de Jensen :

$$\int_{\mathcal{D}} |p^\mathcal{D} - p(x)|^2 dx \leq \frac{4}{m_\mathfrak{s}} \int_{\mathcal{D}} \int_{\mathfrak{s}} |p(z) - p(y)|^2 dy dz.$$

On applique le Lemme I.12 à un diamant \mathcal{D} et à un de ses côtés \mathfrak{s}

$$\frac{1}{m_\mathfrak{s}} \int_{\mathcal{D}} \int_{\mathfrak{s}} |p(y) - p(x)|^2 dy dx \leq C \frac{d_\mathcal{D}^3}{m_\mathfrak{s}} \int_{\mathcal{D}} |\nabla p(z)|^2 dz.$$

La relation (I.1) donne que $\frac{d_\mathcal{D}}{m_\mathfrak{s}} \leq C$. Finalement, on obtient

$$\int_{\mathcal{D}} |p^\mathcal{D} - p(x)|^2 dx \leq \text{size}(\mathcal{T})^2 C \int_{\mathcal{D}} |\nabla p(z)|^2 dz,$$

ceci conclut la démonstration. ■

Le résultat suivant est très important dans les démonstrations de stabilité des schémas DDFV étudiés dans la suite. Il faut remarquer que l'on utilise les ensembles \mathfrak{S} et $\mathcal{E}_\mathcal{D}$ qui ne contiennent que les côtés \mathfrak{s} des diamants tels que $\mathfrak{s} \subset \Omega$ (voir la Remarque IV.11). Les côtés des diamants situés sur $\partial\Omega$ n'interviennent pas dans la démonstration du fait que les fonctions considérées sont dans $(H_0^1(\Omega))^2$. Ce résultat est une forme de consistance faible de l'opérateur de divergence discrète [EHL06].

Proposition IV.25

Soit \mathcal{T} un maillage DDFV associé à Ω . Il existe une constante $C_4 > 0$, dépendant uniquement de $\text{reg}(\mathcal{T})$, telle que pour toute fonction \mathbf{v} dans $(H_0^1(\Omega))^2$ et tout $p^\mathcal{D} \in \mathbb{R}^\mathfrak{D}$, on a

$$\sum_{\mathcal{D} \in \mathfrak{D}} \int_{\mathcal{D}} p^\mathcal{D} (\text{div}^\mathcal{D}(\mathbf{v}^\mathcal{T}) - \text{div}(\mathbf{v})) dz \leq C_4 |p^\mathfrak{D}|_h \|\mathbf{v}\|_{H^1},$$

où $\mathbf{v}^\mathcal{T} = \mathbb{P}_m^\mathcal{T} \mathbf{v}$ est la projection moyenne de \mathbf{v} , définie par (IV.4), sur le maillage \mathcal{T} .

Démonstration : En utilisant l'égalité (IV.11) et la formule de Green, on a pour tout $\mathcal{D} \in \mathfrak{D}$:

$$\int_{\mathcal{D}} (\text{div}^\mathcal{D}(\mathbf{v}^\mathcal{T}) - \text{div}(\mathbf{v}(z))) dz = \sum_{\mathfrak{s}=[x_\mathcal{K}, x_{\mathcal{K}^*}] \in \mathcal{E}_\mathcal{D}} m_\mathfrak{s} \frac{1}{m_\mathfrak{s}} \int_{\mathfrak{s}} \left(\frac{\mathbf{v}_\mathcal{K} + \mathbf{v}_{\mathcal{K}^*}}{2} - \mathbf{v}(z) \right) \cdot \vec{\mathbf{n}}_{\mathfrak{s}\mathcal{D}} dz.$$

Cette formule est vraie car \mathbf{v} est nulle sur $\partial\Omega$ et que l'ensemble $\mathcal{E}_\mathcal{D}$ ne contient que les côtés \mathfrak{s} intérieurs des diamants, c'est-à-dire $\mathfrak{s} \subset \Omega$ (voir la Remarque IV.11). On note $\mathbf{R}_{\text{div}}^\mathfrak{s}(\mathbf{v}) = \frac{1}{m_\mathfrak{s}} \int_{\mathfrak{s}} \left(\frac{\mathbf{v}_\mathcal{K} + \mathbf{v}_{\mathcal{K}^*}}{2} - \mathbf{v}(z) \right) dz$. Tout d'abord, on multiplie par $p^\mathcal{D}$ et puis on somme sur les diamants $\mathcal{D} \in \mathfrak{D}$

$$\sum_{\mathcal{D} \in \mathfrak{D}} \int_{\mathcal{D}} p^\mathcal{D} (\text{div}^\mathcal{D}(\mathbf{v}^\mathcal{T}) - \text{div}(\mathbf{v}(z))) dz = \sum_{\mathcal{D} \in \mathfrak{D}} p^\mathcal{D} \sum_{\mathfrak{s} \in \mathcal{E}_\mathcal{D}} m_\mathfrak{s} \mathbf{R}_{\text{div}}^\mathfrak{s}(\mathbf{v}) \cdot \vec{\mathbf{n}}_{\mathfrak{s}\mathcal{D}}.$$

On réorganise la somme sur les côtés des diamants $\mathfrak{s} \in \mathfrak{S}$ pour obtenir

$$\sum_{\mathcal{D} \in \mathfrak{D}} \int_{\mathcal{D}} p^\mathcal{D} (\text{div}^\mathcal{D}(\mathbf{v}^\mathcal{T}) - \text{div}(\mathbf{v}(z))) dz = \sum_{\mathfrak{s}=\mathcal{D}|\mathcal{D}' \in \mathfrak{S}} m_\mathfrak{s} \mathbf{R}_{\text{div}}^\mathfrak{s}(\mathbf{v}) \cdot \vec{\mathbf{n}}_{\mathfrak{s}\mathcal{D}} (p^\mathcal{D} - p^{\mathcal{D}'}).$$

L'inégalité de Cauchy-Schwarz et la semi-norme $|\cdot|_h$ (IV.15) impliquent que

$$\sum_{\mathcal{D} \in \mathfrak{D}} \int_{\mathcal{D}} p^\mathcal{D} (\text{div}^\mathcal{D}(\mathbf{v}^\mathcal{T}) - \text{div}(\mathbf{v}(z))) dz \leq |p^\mathfrak{D}|_h \left(\sum_{\mathfrak{s}=\mathcal{D}|\mathcal{D}' \in \mathfrak{S}} \frac{m_\mathfrak{s}^2}{d_\mathcal{D}^2 + d_{\mathcal{D}'}^2} |\mathbf{R}_{\text{div}}^\mathfrak{s}(\mathbf{v})|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Pour conclure il reste à montrer que

$$\left(\sum_{\mathfrak{s}=\mathcal{D}|\mathcal{D}'\in\mathfrak{S}} \frac{m_{\mathfrak{s}}^2}{d_{\mathcal{D}}^2 + d_{\mathcal{D}'}^2} |\mathbf{R}_{\text{div}}^{\mathfrak{s}}(\mathbf{v})|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq C \|\mathbf{v}\|_{H^1}.$$

On note $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \end{pmatrix}$ et $\mathbf{v}_{\mathfrak{s}} := \frac{1}{m_{\mathfrak{s}}} \int_{\mathfrak{s}} \mathbf{v}(y) dy$, pour tout $\mathfrak{s} \in \mathfrak{S}$. Pour montrer le résultat on travaille composante par composante. Soit $i = 1, 2$. Comme $\mathfrak{s} \in \mathfrak{S}$, on peut écrire $\mathfrak{s} = [x_{\kappa}, x_{\kappa^*}] \subset \kappa$ par exemple, on applique le Lemme I.12 à une maille primale κ et à un côté \mathfrak{s}

$$|v_{\kappa}^i - v_{\mathfrak{s}}^i|^2 = \left| \frac{1}{m_{\mathfrak{s}} m_{\kappa}} \int_{\kappa} \int_{\mathfrak{s}} (v^i(z) - v^i(x)) dz dx \right|^2 \leq C \frac{(\text{diam}(\widehat{\kappa}))^3}{m_{\mathfrak{s}} m_{\kappa}} \int_{\widehat{\kappa}} |\nabla v^i(z)|^2 dz.$$

Grâce à la relation (I.1), on a $\frac{m_{\mathfrak{s}}^2 (\text{diam}(\widehat{\kappa}))^3}{m_{\mathfrak{s}} m_{\kappa} (d_{\mathcal{D}}^2 + d_{\mathcal{D}'}^2)} \leq C$. Il vient que

$$\frac{m_{\mathfrak{s}}^2}{d_{\mathcal{D}}^2 + d_{\mathcal{D}'}^2} |v_{\kappa}^i - v_{\mathfrak{s}}^i|^2 \leq C \int_{\widehat{\kappa}} |\nabla v^i(z)|^2 dz.$$

On en déduit que

$$\frac{m_{\mathfrak{s}}^2}{d_{\mathcal{D}}^2 + d_{\mathcal{D}'}^2} |\mathbf{R}_{\text{div}}^{\mathfrak{s}}(v^i)|^2 \leq \frac{m_{\mathfrak{s}}^2}{d_{\mathcal{D}}^2 + d_{\mathcal{D}'}^2} |v_{\kappa}^i - v_{\mathfrak{s}}^i|^2 + \frac{m_{\mathfrak{s}}^2}{d_{\mathcal{D}}^2 + d_{\mathcal{D}'}^2} |v_{\kappa^*}^i - v_{\mathfrak{s}}^i|^2 \leq C \int_{\widehat{\kappa} \cup \widehat{\kappa^*}} |\nabla v^i(z)|^2 dz.$$

Ainsi, on obtient pour $i = 1, 2$

$$\sum_{\mathfrak{s}=\mathcal{D}|\mathcal{D}'\in\mathfrak{S}} \frac{m_{\mathfrak{s}}^2}{d_{\mathcal{D}}^2 + d_{\mathcal{D}'}^2} |\mathbf{R}_{\text{div}}^{\mathfrak{s}}(v^i)|^2 \leq C \int_{\Omega} |\nabla v^i(z)|^2 dz.$$

En sommant sur i , on montre le résultat souhaité. ■

Chapitre V

Le problème de Stokes standard

Dans ce chapitre¹, on commence par s'intéresser au problème de Stokes avec une viscosité constante qu'on prendra égale à 1, le problème est donc le suivant :

$$\begin{aligned} &\text{Trouver } \mathbf{u} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2 \text{ une vitesse et } p : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ une pression telles que} \\ &\quad -\Delta \mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f}, \quad \text{dans } \Omega, \\ &\quad \operatorname{div}(\mathbf{u}) = 0, \quad \text{dans } \Omega, \\ &\quad \mathbf{u} = \mathbf{g}, \quad \text{sur } \partial\Omega, \quad \int_{\Omega} p(x) dx = 0. \end{aligned} \tag{V.1}$$

Comme on l'a vu dans l'Introduction, on a choisi de stabiliser l'équation du bilan de masse, afin d'obtenir un schéma bien posé pour des maillages généraux. On présente un schéma DDFV stabilisé correspondant au problème (V.1), puis on montre qu'il est bien posé pour des maillages généraux (voir Théorème V.2). En effet, si les termes de stabilisation sont nuls le schéma DDFV est bien posé pour des familles de maillages particulières. Pour obtenir ce résultat, on a besoin d'intégrer le bilan de quantité de mouvement sur les mailles primales intérieures et toutes les mailles duales intérieures et du bord. C'est pour cette raison que l'on utilise dans ce chapitre des conditions de Dirichlet faibles, c'est-à-dire uniquement sur $\partial\mathcal{M}$.

On obtient ensuite une première estimation d'erreur (voir Théorème V.4) qui ne donne que de l'ordre 0.5 en norme L^2 pour le gradient de vitesse uniquement. On n'a pas d'estimation sur la norme L^2 de la vitesse car les conditions au bord sont imposées de manière faible, et donc on ne peut pas appliquer une inégalité de Poincaré. Pour obtenir de l'ordre 1 pour le gradient de vitesse et la pression, il suffit d'utiliser correctement la stabilisation de type Brezzi-Pitkäranta, c'est l'objet du Théorème V.13 qui est le résultat principal de ce chapitre. En effet, dans la Section V.3.4, on montre la stabilité du schéma DDFV, ceci nous permet d'obtenir de l'ordre 1 en norme L^2 pour le gradient de vitesse et pour la pression. Notez que l'on n'a pas de résultat sur la norme L^2 de la vitesse, toujours à cause des conditions au bord imposées sur $\partial\mathcal{M}$. Cette restriction sera levée au chapitre suivant dans un cadre plus général en modifiant la façon de prendre en compte les conditions au bord dans le schéma.

V.1 Principe du schéma DDFV stabilisé (S-DDFV) pour le problème de Stokes standard

Le principe pour obtenir un schéma DDFV stabilisé correspondant au problème (V.1) est le suivant. On approche la vitesse sur les centres et les sommets du maillage primal et la pression sur le maillage diamant. On intègre le bilan de quantité de mouvement du problème (V.1) sur le maillage primal et dual \mathcal{T} . L'équation de conservation de la masse est directement approchée sur le maillage diamant \mathfrak{D} en rajoutant un terme de stabilisation proportionnel à la pression et un autre correspondant à une approximation volumes finis de l'opérateur

¹Un aide mémoire rassemblant les notations de ce chapitre est disponible page 243.

de Laplace (voir Définition IV.10), inspiré par la méthode de Brezzi-Pitkäranta, bien connue en éléments finis [BP84]. On impose la condition de Dirichlet au sens faible sur $\partial\mathfrak{M}$. Finalement l'intégrale de la pression doit être nulle et on doit également imposer que l'intégrale sur les mailles primales de la vitesse doit être égale à l'intégrale sur les mailles duales de la vitesse. Ceci vient de la condition de Dirichlet faible. Le schéma DDFV stabilisé, appelé S-DDFV, pour le problème (V.1) s'écrit alors :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } \mathbf{u}^\tau \in (\mathbb{R}^2)^\tau \text{ et } p^\mathfrak{D} \in \mathbb{R}^\mathfrak{D} \text{ tels que,} \\ \mathbf{div}^\tau(-\nabla^\mathfrak{D} \mathbf{u}^\tau + p^\mathfrak{D} \text{Id}) = \mathbf{f}^\tau, \\ \mathbf{div}^\mathfrak{D}(\mathbf{u}^\tau) + \mu \text{size}(\mathcal{T}) p^\mathfrak{D} - \lambda d_\mathfrak{D}^2 \Delta^\mathfrak{D} p^\mathfrak{D} = 0, \\ \gamma^\tau(\mathbf{u}^\tau) = \mathbf{g}^{\partial\mathfrak{M}}, \\ \sum_{\kappa \in \mathfrak{M}} m_\kappa \mathbf{u}_\kappa - \sum_{\kappa^* \in \mathfrak{M}^* \cup \partial\mathfrak{M}^*} m_{\kappa^*} \mathbf{u}_{\kappa^*} = 0, \\ \sum_{\mathfrak{D} \in \mathfrak{D}} m_\mathfrak{D} p^\mathfrak{D} = 0, \end{array} \right. \quad (\text{V.2})$$

avec $\mu, \lambda \geq 0$ donnés. On a pour les termes sources $\mathbf{f}^\tau = (\mathbf{f}^\mathfrak{M}, 0, \mathbf{f}^{\mathfrak{M}^*}, \mathbf{f}^{\partial\mathfrak{M}^*})$ avec $\mathbf{f}^\mathfrak{M} = (\mathbf{f}_\kappa)_{\kappa \in \mathfrak{M}}$, $\mathbf{f}^{\mathfrak{M}^*} = (\mathbf{f}_{\kappa^*})_{\kappa^* \in \mathfrak{M}^*}$ et $\mathbf{f}^{\partial\mathfrak{M}^*} = (\mathbf{f}_{\kappa^*})_{\kappa^* \in \partial\mathfrak{M}^*}$ où :

$$\mathbf{f}_\kappa = \frac{1}{m_\kappa} \int_\kappa \mathbf{f}(x) dx \quad \text{et} \quad \mathbf{f}_{\kappa^*} = \frac{1}{m_{\kappa^*}} \int_{\kappa^*} \mathbf{f}(x) dx, \quad (\text{V.3})$$

et pour la condition de Dirichlet $\mathbf{g}^{\partial\mathfrak{M}} = (\mathbf{g}_\sigma)_{\sigma \in \partial\mathfrak{M}}$ avec :

$$\mathbf{g}_\sigma = \frac{1}{m_\sigma} \int_\sigma \mathbf{g}(x) dx. \quad (\text{V.4})$$

Etude préliminaire du schéma S-DDFV (V.2) :

Les équations sur le bilan de quantité de mouvement sur \mathcal{T} ne sont pas linéairement indépendantes, il faut donc rajouter la relation $\sum_{\kappa \in \mathfrak{M}} m_\kappa \mathbf{u}_\kappa - \sum_{\kappa^* \in \mathfrak{M}^* \cup \partial\mathfrak{M}^*} m_{\kappa^*} \mathbf{u}_{\kappa^*} = 0$. En effet, si on pose $\psi^\tau \in (\mathbb{R}^2)^\tau$ telle que

$\forall \kappa \in (\mathfrak{M} \cup \partial\mathfrak{M}), \psi_\kappa = \vec{\mathbf{e}}_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\forall \kappa^* \in (\mathfrak{M}^* \cup \partial\mathfrak{M}^*), \psi_{\kappa^*} = \vec{\mathbf{0}}$, ceci impose $\nabla^\mathfrak{D} \psi^\tau = 0$ et $\gamma^\tau(\psi) = {}^t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, 0$.

On a

- d'une part, grâce au schéma S-DDFV (V.2)

$$2\llbracket \mathbf{div}^\tau(-\nabla^\mathfrak{D} \mathbf{u}^\tau + p^\mathfrak{D} \text{Id}), \psi^\tau \rrbracket_\mathcal{T} = \sum_{\kappa \in \mathfrak{M}} m_\kappa \mathbf{f}_\kappa \cdot \vec{\mathbf{e}}_1,$$

puis la définition du terme source (V.3) implique

$$2\llbracket \mathbf{div}^\tau(-\nabla^\mathfrak{D} \mathbf{u}^\tau + p^\mathfrak{D} \text{Id}), \psi^\tau \rrbracket_\mathcal{T} = \int_\Omega \mathbf{f}(x) \cdot \vec{\mathbf{e}}_1 dx.$$

- D'autre part, la formule de Green (Théorème IV.9) donne

$$\begin{aligned} 2\llbracket \mathbf{div}^\tau(-\nabla^\mathfrak{D} \mathbf{u}^\tau + p^\mathfrak{D} \text{Id}), \psi^\tau \rrbracket_\mathcal{T} &= 2(\nabla^\mathfrak{D} \mathbf{u}^\tau : \nabla^\mathfrak{D} \psi)_\mathfrak{D} - 2(\gamma^\mathfrak{D}(\nabla^\mathfrak{D} \mathbf{u}^\tau) \cdot \vec{\mathbf{n}}, \gamma^\tau(\psi))_{\partial\Omega} \\ &\quad - 2(p^\mathfrak{D}, \text{Tr} \nabla^\mathfrak{D} \psi)_\mathfrak{D} + 2(\gamma^\mathfrak{D}(p^\mathfrak{D} \text{Id}) \cdot \vec{\mathbf{n}}, \gamma^\tau(\psi))_{\partial\Omega}. \end{aligned}$$

Le choix de ψ^τ mène à

$$2\llbracket \mathbf{div}^\tau(-\nabla^\mathfrak{D} \mathbf{u}^\tau + p^\mathfrak{D} \text{Id}), \psi^\tau \rrbracket_\mathcal{T} = \sum_{\mathfrak{D} \in \mathfrak{D}_{ext}} m_\sigma ((-\nabla^\mathfrak{D} \mathbf{u}^\tau + p^\mathfrak{D} \text{Id}) \cdot \vec{\mathbf{n}}_{\sigma\kappa}) \cdot \vec{\mathbf{e}}_1.$$

En résumé, on arrive à la relation :

$$\sum_{\mathfrak{D} \in \mathfrak{D}_{ext}} m_\sigma ((-\nabla^\mathfrak{D} \mathbf{u}^\tau + p^\mathfrak{D} \text{Id}) \cdot \vec{\mathbf{n}}_{\sigma\kappa}) \cdot \vec{\mathbf{e}}_1 = \int_\Omega \mathbf{f}(x) \cdot \vec{\mathbf{e}}_1 dx.$$

On peut refaire exactement le même calcul en utilisant : $\psi^\tau \in (\mathbb{R}^2)^\tau$ telle que $\forall \kappa \in (\mathfrak{M} \cup \partial\mathfrak{M}), \psi_\kappa = \vec{\mathbf{e}}_2 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

et $\forall \kappa^* \in (\mathfrak{M}^* \cup \partial\mathfrak{M}^*), \psi_{\kappa^*} = \vec{\mathbf{0}}$, ceci impose $\nabla^\mathfrak{D} \psi^\tau = 0$ et $\gamma^\tau(\psi) = {}^t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. On a alors le résultat suivant :

$$\sum_{\mathfrak{D} \in \mathfrak{D}_{ext}} m_\sigma ((-\nabla^\mathfrak{D} \mathbf{u}^\tau + p^\mathfrak{D} \text{Id}) \cdot \vec{\mathbf{n}}_{\sigma\kappa}) \cdot \vec{\mathbf{e}}_2 = \int_\Omega \mathbf{f}(x) \cdot \vec{\mathbf{e}}_2 dx.$$

On obtient donc

$$\sum_{\mathcal{D} \in \mathcal{D}_{ext}} m_\sigma (-\nabla^{\mathcal{D}} \mathbf{u}^{\mathcal{T}} + p^{\mathcal{D}} \text{Id}) \cdot \vec{\mathbf{n}}_{\sigma\kappa} = \int_{\Omega} \mathbf{f}(x) dx.$$

En refaisant la même chose en utilisant $\psi^{\mathcal{T}} \in (\mathbb{R}^2)^{\mathcal{T}}$ telle que $\forall \kappa \in (\mathfrak{M} \cup \partial\mathfrak{M}), \psi_{\kappa} = \vec{\mathbf{0}}$ et $\forall \kappa^* \in (\mathfrak{M}^* \cup \partial\mathfrak{M}^*), \psi_{\kappa^*} = \vec{\mathbf{e}}_1$, ceci impose $\gamma^{\mathcal{T}}(\psi) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\nabla^{\mathcal{D}} \psi^{\mathcal{T}} = 0$, puis $\psi^{\mathcal{T}} \in (\mathbb{R}^2)^{\mathcal{T}}$ telle que $\forall \kappa \in (\mathfrak{M} \cup \partial\mathfrak{M}), \psi_{\kappa} = \vec{\mathbf{0}}$ et $\forall \kappa^* \in (\mathfrak{M}^* \cup \partial\mathfrak{M}^*), \psi_{\kappa^*} = \vec{\mathbf{e}}_2$, ceci impose $\gamma^{\mathcal{T}}(\psi) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\nabla^{\mathcal{D}} \psi^{\mathcal{T}} = 0$, on obtient finalement le même résultat :

$$\sum_{\mathcal{D} \in \mathcal{D}_{ext}} m_\sigma (-\nabla^{\mathcal{D}} \mathbf{u}^{\mathcal{T}} + p^{\mathcal{D}} \text{Id}) \cdot \vec{\mathbf{n}}_{\sigma\kappa} = \int_{\Omega} \mathbf{f}(x) dx.$$

Ainsi les équations sur le bilan de quantité de mouvement sur \mathcal{T} ne sont pas linéairement indépendantes. De plus, au niveau continu, on a la condition de compatibilité (9). La même relation est encore vérifiée au niveau discret. En effet, même avec le terme de stabilisation, on a

$$(\text{div}^{\mathcal{D}}(\mathbf{u}^{\mathcal{T}}) - \lambda d_{\mathcal{D}}^2 \Delta^{\mathcal{D}} p^{\mathcal{D}}, 1)_{\mathcal{D}} = (\text{div}^{\mathcal{D}} \mathbf{u}^{\mathcal{T}}, 1)_{\mathcal{D}} = (\nabla^{\mathcal{D}} \mathbf{u}^{\mathcal{T}} : \text{Id})_{\mathcal{D}}.$$

La formule de Green (Théorème IV.9) implique

$$(\text{div}^{\mathcal{D}}(\mathbf{u}^{\mathcal{T}}) - \lambda d_{\mathcal{D}}^2 \Delta^{\mathcal{D}} p^{\mathcal{D}}, 1)_{\mathcal{D}} = (\gamma^{\mathcal{D}}(\text{Id}) \cdot \vec{\mathbf{n}}, \gamma^{\mathcal{T}}(\mathbf{u}^{\mathcal{T}}))_{\partial\Omega}.$$

Grâce à la condition de Dirichlet, on obtient la condition suivante

$$\sum_{\mathcal{D}_{\sigma, \sigma^*} \in \mathcal{D}_{ext}} m_\sigma \mathbf{g}_\sigma \cdot \vec{\mathbf{n}}_{\sigma\kappa} = 0.$$

On déduit une relation entre l'équation de la conservation de la masse et la condition aux bords de Dirichlet. On rajoute la version discrète de $\int_{\Omega} p(x) dx = 0$, c'est-à-dire $\sum_{\mathcal{D} \in \mathcal{D}} m_{\mathcal{D}} p^{\mathcal{D}} = 0$ afin d'avoir unicité de la pression.

Remarque V.1

Il faut noter qu'avec notre choix de $\mathbf{f}^{\mathcal{T}}$ donné par (V.3) et de $\mathbf{g}^{\partial\mathfrak{M}}$ donné par (V.4), on a toujours

$$\sum_{\kappa \in \mathfrak{M}} m_{\kappa} \mathbf{f}_{\kappa} = \sum_{\kappa^* \in \mathfrak{M}^* \cup \partial\mathfrak{M}^*} m_{\kappa^*} \mathbf{f}_{\kappa^*} \quad \text{et} \quad \sum_{\mathcal{D}_{\sigma, \sigma^*} \in \mathcal{D}_{ext}} m_\sigma \mathbf{g}_\sigma \cdot \vec{\mathbf{n}}_{\sigma\kappa} = \int_{\partial\Omega} \mathbf{g} \cdot \vec{\mathbf{n}} = 0,$$

car on suppose que \mathbf{g} vérifie la condition de compatibilité (9).

On va étudier plus précisément trois schémas particuliers en fonction des valeurs de $\lambda \geq 0$ et $\mu \geq 0$:

- $\mu = 0, \lambda = 0$, schéma non stabilisé (US) : il semble être le plus naturel pour approcher le problème. Ce schéma non-stabilisé est étudié dans [Del07].
- $\mu = 0, \lambda > 0$, schéma (BPS) : c'est un schéma stabilisé de type Brezzi-Pitkäranta.
- $\mu > 0, \lambda = 0$, schéma (PS) : cela correspond au schéma stabilisé par un terme d'ordre 0 en pression de [BEH05].

V.2 Existence et unicité de la solution du schéma S-DDFV

Schéma non-stabilisé : Nous savons montrer que le schéma (US) ($\lambda = \mu = 0$) est bien posé (voir [Del07]) mais seulement pour les familles de maillages décrites ci-dessous. On dit qu'un maillage DDFV \mathcal{T} satisfait la condition $(\mathcal{H}_{\mathcal{M}})$:

$$\begin{cases} \text{Si } \mathcal{T} \text{ est un maillage avec des triangles conformes et des angles aigus,} \\ \text{ou si } \mathcal{T} \text{ est un maillage avec des rectangles non-conformes.} \end{cases} \quad (\mathcal{H}_{\mathcal{M}})$$

Schéma stabilisé : Le schéma stabilisé S-DDFV (V.2) avec $\lambda + \mu > 0$ est bien posé pour tout maillage DDFV.

Théorème V.2

Soient $\lambda, \mu \geq 0$ et \mathcal{T} un maillage DDFV. Si $\lambda = \mu = 0$, on suppose de plus que \mathcal{T} vérifie $(\mathcal{H}_{\mathcal{M}})$. Alors, le schéma S-DDFV (V.2) possède une unique solution $(\mathbf{u}^{\mathcal{T}}, p^{\mathcal{D}}) \in (\mathbb{R}^2)^{\mathcal{T}} \times \mathbb{R}^{\mathcal{D}}$.

Démonstration : Si $\lambda = \mu = 0$, on réfère à [Del07] pour la démonstration. On ne considère ici que le cas $\lambda + \mu > 0$. On note N la dimension de $(\mathbb{R}^2)^{\mathcal{T}} \times \mathbb{R}^{\mathcal{D}}$. Le schéma (V.2) peut s'écrire avec $q^{\mathcal{D}} = 0$ et $\alpha = \beta = 0$ comme suit

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } \mathbf{u}^{\mathcal{T}} \in (\mathbb{R}^2)^{\mathcal{T}} \text{ et } p^{\mathcal{D}} \in \mathbb{R}^{\mathcal{D}} \text{ tels que,} \\ \mathbf{div}^{\mathcal{T}}(-\nabla^{\mathcal{D}} \mathbf{u}^{\mathcal{T}} + p^{\mathcal{D}} \text{Id}) = \mathbf{f}^{\mathcal{T}}, \\ \mathbf{div}^{\mathcal{D}}(\mathbf{u}^{\mathcal{T}}) + \mu \text{size}(\mathcal{T})p^{\mathcal{D}} - \lambda d_{\mathcal{D}}^2 \Delta^{\mathcal{D}} p^{\mathcal{D}} = q^{\mathcal{D}}, \\ \gamma^{\mathcal{T}}(\mathbf{u}^{\mathcal{T}}) = \mathbf{g}^{\partial \mathcal{M}}, \\ \sum_{\kappa \in \mathcal{M}} m_{\kappa} \mathbf{u}_{\kappa} - \sum_{\kappa^* \in \mathcal{M}^* \cup \partial \mathcal{M}^*} m_{\kappa^*} \mathbf{u}_{\kappa^*} = \alpha, \\ \sum_{\mathcal{D} \in \mathcal{D}} m_{\mathcal{D}} p^{\mathcal{D}} = \beta, \end{array} \right.$$

C'est un système linéaire : $A\mathbf{v} = \mathbf{b}$ avec une matrice rectangle $A \in \mathcal{M}_{N+2, N}(\mathbb{R})$, $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^N$ et le second membre $\mathbf{b} = {}^t(\mathbf{f}^{\mathcal{T}}, q^{\mathcal{D}}, \mathbf{g}^{\partial \mathcal{M}}, \alpha, \beta) \in \mathbb{R}^{N+2}$. Soit X l'ensemble suivant

$$X = \left\{ (\mathbf{f}^{\mathcal{T}}, q^{\mathcal{D}}, \mathbf{g}^{\partial \mathcal{M}}, \alpha, \beta)' \in \mathbb{R}^{N+2}, \sum_{\kappa \in \mathcal{M}} m_{\kappa} \mathbf{f}_{\kappa} = \sum_{\kappa^* \in \mathcal{M}^* \cup \partial \mathcal{M}^*} m_{\kappa^*} \mathbf{f}_{\kappa^*} \text{ et } \sum_{\mathcal{D}_{\sigma, \sigma^*} \in \mathcal{D}_{ext}} m_{\sigma} \mathbf{g}_{\sigma} \cdot \vec{\mathbf{n}}_{\sigma \kappa} = \sum_{\mathcal{D} \in \mathcal{D}} m_{\mathcal{D}} q^{\mathcal{D}} \right\},$$

la dimension de X vaut N . On a que ${}^t(\mathbf{f}^{\mathcal{T}}, 0, \mathbf{g}^{\partial \mathcal{M}}, 0, 0)$ appartient à X , (voir la Remarque V.1). Grâce à l'étude préliminaire du schéma S-DDFV, on a que $\text{Im} A \subset X$. Si on montre que la matrice A est injective, on conclut que $\dim \text{Im} A = N$ et ainsi $\text{Im} A = X$. Etudions donc le noyau de la matrice A . Soit $\mathbf{u}^{\mathcal{T}} \in (\mathbb{R}^2)^{\mathcal{T}}$ et $p^{\mathcal{D}} \in \mathbb{R}^{\mathcal{D}}$ tels que :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{div}^{\mathcal{T}}(-\nabla^{\mathcal{D}} \mathbf{u}^{\mathcal{T}} + p^{\mathcal{D}} \text{Id}) = 0, \\ \mathbf{div}^{\mathcal{D}}(\mathbf{u}^{\mathcal{T}}) + \mu \text{size}(\mathcal{T})p^{\mathcal{D}} - \lambda d_{\mathcal{D}}^2 \Delta^{\mathcal{D}} p^{\mathcal{D}} = 0, \\ \gamma^{\mathcal{T}}(\mathbf{u}^{\mathcal{T}}) = 0, \\ \sum_{\kappa \in \mathcal{M}} m_{\kappa} \mathbf{u}_{\kappa} - \sum_{\kappa^* \in \mathcal{M}^* \cup \partial \mathcal{M}^*} m_{\kappa^*} \mathbf{u}_{\kappa^*} = 0, \\ \sum_{\mathcal{D} \in \mathcal{D}} m_{\mathcal{D}} p^{\mathcal{D}} = 0. \end{array} \right.$$

On en déduit que

$$\llbracket \mathbf{div}^{\mathcal{T}}(-\nabla^{\mathcal{D}} \mathbf{u}^{\mathcal{T}} + p^{\mathcal{D}} \text{Id}), \mathbf{u}^{\mathcal{T}} \rrbracket_{\mathcal{T}} = 0.$$

En utilisant la formule de Green discrète (Théorème IV.9) et le fait que $\mathbf{div}^{\mathcal{D}} \mathbf{u}^{\mathcal{T}} = \text{Tr} \nabla^{\mathcal{D}} \mathbf{u}^{\mathcal{T}} = (\text{Id} : \nabla^{\mathcal{D}} \mathbf{u}^{\mathcal{T}})$ et que $\gamma^{\mathcal{T}}(\mathbf{u}^{\mathcal{T}}) = 0$, on obtient

$$\llbracket \mathbf{div}^{\mathcal{T}}(-\nabla^{\mathcal{D}} \mathbf{u}^{\mathcal{T}} + p^{\mathcal{D}} \text{Id}), \mathbf{u}^{\mathcal{T}} \rrbracket_{\mathcal{T}} = (\nabla^{\mathcal{D}} \mathbf{u}^{\mathcal{T}} : \nabla^{\mathcal{D}} \mathbf{u}^{\mathcal{T}})_{\mathcal{D}} - (\mathbf{div}^{\mathcal{D}} \mathbf{u}^{\mathcal{T}}, p^{\mathcal{D}})_{\mathcal{D}}.$$

De plus, l'équation de la conservation de la masse et la Remarque IV.12 donne :

$$-(\mathbf{div}^{\mathcal{D}} \mathbf{u}^{\mathcal{T}}, p^{\mathcal{D}})_{\mathcal{D}} = \mu \text{size}(\mathcal{T}) \|p^{\mathcal{D}}\|_2^2 - \lambda (d_{\mathcal{D}}^2 \Delta^{\mathcal{D}} p^{\mathcal{D}}, p^{\mathcal{D}})_{\mathcal{D}} = \mu \text{size}(\mathcal{T}) \|p^{\mathcal{D}}\|_2^2 + \lambda |p^{\mathcal{D}}|_h^2,$$

où $|\cdot|_h$ est la semi-norme introduite dans (IV.15). Il vient que :

$$0 = \llbracket \mathbf{div}^{\mathcal{T}}(-\nabla^{\mathcal{D}} \mathbf{u}^{\mathcal{T}} + p^{\mathcal{D}} \text{Id}), \mathbf{u}^{\mathcal{T}} \rrbracket_{\mathcal{T}} = \|\nabla^{\mathcal{D}} \mathbf{u}^{\mathcal{T}}\|_2^2 + \mu \text{size}(\mathcal{T}) \|p^{\mathcal{D}}\|_2^2 + \lambda |p^{\mathcal{D}}|_h^2.$$

Ceci implique que si $\mu > 0$ on a $\|p^{\mathcal{D}}\|_2^2 = 0$ donc $p^{\mathcal{D}} = 0$ et sinon on a forcément $\lambda > 0$, d'où $|p^{\mathcal{D}}|_h^2 = 0$, ceci donne que $p^{\mathcal{D}}$ est constant. Comme $p^{\mathcal{D}}$ vérifie $\sum_{\mathcal{D} \in \mathcal{D}} m_{\mathcal{D}} p^{\mathcal{D}} = 0$ on a également $p^{\mathcal{D}} = 0$. On a également que

$\|\nabla^{\mathcal{D}} \mathbf{u}^{\mathcal{T}}\|_2^2 = 0$, d'où $\nabla^{\mathcal{D}} \mathbf{u}^{\mathcal{T}} = 0$. La Remarque IV.3 implique l'existence deux constantes $\mathbf{c}_0 \in \mathbb{R}^2$ et $\mathbf{c}_1 \in \mathbb{R}^2$ telles que :

$$\begin{aligned} \forall \kappa \in (\mathcal{M} \cup \partial \mathcal{M}), \quad \mathbf{u}_{\kappa} &= \mathbf{c}_0, \\ \forall \kappa^* \in (\mathcal{M}^* \cup \partial \mathcal{M}^*), \quad \mathbf{u}_{\kappa^*} &= \mathbf{c}_1. \end{aligned}$$

Or $\gamma^{\mathcal{T}}(\mathbf{u}^{\mathcal{T}}) = 0$, donc $\mathbf{c}_0 + \mathbf{c}_1 = 0$. De plus, comme on a imposé $\sum_{\kappa \in \mathcal{M}} m_{\kappa} \mathbf{u}_{\kappa} - \sum_{\kappa^* \in \mathcal{M}^* \cup \partial \mathcal{M}^*} m_{\kappa^*} \mathbf{u}_{\kappa^*} = 0$, il vient que $\mathbf{c}_0 = \mathbf{c}_1$. Ainsi on a $\mathbf{c}_0 = \mathbf{c}_1 = 0$, d'où $\mathbf{u}^{\mathcal{T}} = \mathbf{0}$. ■

V.3 Estimations d'erreur pour le schéma S-DDFV

V.3.1 Première estimation

On commence par donner la forme bilinéaire associée au schéma S-DDFV (V.2).

Définition V.3

On définit la forme bilinéaire associée au schéma S-DDFV (V.2) pour tout $(\mathbf{u}^\tau, p^\mathfrak{D}), (\tilde{\mathbf{u}}^\tau, \tilde{p}^\mathfrak{D}) \in (\mathbb{R}^2)^\tau \times \mathbb{R}^\mathfrak{D}$ par :

$$B(\mathbf{u}^\tau, p^\mathfrak{D}; \tilde{\mathbf{u}}^\tau, \tilde{p}^\mathfrak{D}) = \llbracket \mathbf{div}^\tau(-\nabla^\mathfrak{D} \mathbf{u}^\tau + p^\mathfrak{D} \text{Id}), \tilde{\mathbf{u}}^\tau \rrbracket_T + (\mathbf{div}^\mathfrak{D}(\mathbf{u}^\tau) + \mu \text{size}(T)p^\mathfrak{D} - \lambda d_\mathfrak{D}^2 \Delta^\mathfrak{D} p^\mathfrak{D}, \tilde{p}^\mathfrak{D})_\mathfrak{D},$$

avec $\mu \geq 0$ et $\lambda \geq 0$.

On va maintenant reformuler une première estimation d'erreur d'ordre 0.5 en norme L^2 pour le gradient de vitesse. Notez qu'on n'obtient pas d'estimations en norme L^2 pour la vitesse. Cela est dû aux conditions aux bords qui ne sont imposées que de manière faible, c'est-à-dire uniquement sur $\partial\mathfrak{M}$. On ne suppose pas ici que $\lambda > 0$. On peut en effet dans ce cas là obtenir des meilleures estimations (voir section V.3.5).

Théorème V.4

On suppose que la solution (\mathbf{u}, p) du problème de Stokes (V.1) appartient à $(H^2(\Omega))^2 \times H^1(\Omega)$. On suppose que $\mu > 0$. Soit $(\mathbf{u}^\tau, p^\mathfrak{D}) \in (\mathbb{R}^2)^\tau \times \mathbb{R}^\mathfrak{D}$ la solution du schéma S-DDFV (V.2). Alors il existe une constante $C > 0$ dépendant uniquement de $\text{reg}(T)$, μ , $\|\mathbf{u}\|_{H^2}$ et $\|p\|_{H^1}$, telle que

$$\|\nabla \mathbf{u} - \nabla^\mathfrak{D} \mathbf{u}^\tau\|_2 \leq C \text{size}(T)^{\frac{1}{2}}.$$

Eléments de démonstration : On pose $\mathbf{e}^\tau = (\mathfrak{P}_\mathbf{g}^{\mathfrak{D}\mathfrak{M}} \mathbb{P}_\mathbf{c}^\tau \mathbf{u}) - \mathbf{u}^\tau \in (\mathbb{R}^2)^\tau$ l'erreur pour le champ de vitesse et $e^\mathfrak{D} = \mathbb{P}_m^\mathfrak{D} p - p^\mathfrak{D} \in \mathbb{R}^\mathfrak{D}$ l'erreur pour le champ de pression. On rappelle que $\mathbf{g} = \gamma(\mathbf{u})$. Grâce à (V.2) et (V.1), on a $\forall \kappa \in \mathfrak{M}$

$$\begin{cases} \mathbf{div}^\kappa(-\nabla^\mathfrak{D} \mathbf{u}^\tau + p^\mathfrak{D} \text{Id}) = \mathbf{f}_\kappa, \\ -\frac{1}{m_\kappa} \int_\kappa \mathbf{div}(\nabla \mathbf{u}(x)) dx + \frac{1}{m_\kappa} \int_\kappa \nabla p(x) dx = \mathbf{f}_\kappa. \end{cases}$$

Ainsi, on en déduit

$$m_\kappa \mathbf{div}^\kappa(-\nabla^\mathfrak{D} \mathbf{e}^\tau + e^\mathfrak{D} \text{Id}) = m_\kappa \mathbf{div}^\kappa(-\nabla^\mathfrak{D} \mathfrak{P}_\mathbf{g}^{\mathfrak{D}\mathfrak{M}} \mathbb{P}_\mathbf{c}^\tau \mathbf{u} + \mathbb{P}_m^\mathfrak{D} p \text{Id}) + \int_\kappa \mathbf{div}(\nabla \mathbf{u}(x)) dx - \int_\kappa \nabla p(x) dx.$$

La Définition IV.4 de la divergence discrète et la formule de Green impliquent

$$m_\kappa \mathbf{div}^\kappa(-\nabla^\mathfrak{D} \mathbf{e}^\tau + e^\mathfrak{D} \text{Id}) = \sum_{\mathfrak{D} \in \mathfrak{D}_\kappa} \int_\sigma (\nabla \mathbf{u}(s) - \nabla^\mathfrak{D} \mathfrak{P}_\mathbf{g}^{\mathfrak{D}\mathfrak{M}} \mathbb{P}_\mathbf{c}^\tau \mathbf{u}) \cdot \tilde{\mathbf{n}}_{\sigma\kappa} ds + \sum_{\mathfrak{D} \in \mathfrak{D}_\kappa} \int_\sigma (\mathbb{P}_m^\mathfrak{D} p - p(s)) \tilde{\mathbf{n}}_{\sigma\kappa} ds. \quad (\text{V.5})$$

De la même manière, on obtient pour tout $\kappa^* \in \mathfrak{M}^*$ que

$$\begin{aligned} m_{\kappa^*} \mathbf{div}^{\kappa^*}(-\nabla^\mathfrak{D} \mathbf{e}^\tau + e^\mathfrak{D} \text{Id}) &= \sum_{\mathfrak{D} \in \mathfrak{D}_{\kappa^*}} \int_{\sigma^*} (\nabla \mathbf{u}(s) - \nabla^\mathfrak{D} \mathfrak{P}_\mathbf{g}^{\mathfrak{D}\mathfrak{M}} \mathbb{P}_\mathbf{c}^\tau \mathbf{u}) \cdot \tilde{\mathbf{n}}_{\sigma^*\kappa^*} ds \\ &\quad + \sum_{\mathfrak{D} \in \mathfrak{D}_{\kappa^*}} \int_{\sigma^*} (\mathbb{P}_m^\mathfrak{D} p - p(s)) \tilde{\mathbf{n}}_{\sigma^*\kappa^*} ds, \end{aligned} \quad (\text{V.6})$$

et pour tout $\kappa^* \in \partial\mathfrak{M}^*$:

$$\begin{aligned} m_{\kappa^*} \mathbf{div}^{\kappa^*}(-\nabla^\mathfrak{D} \mathbf{e}^\tau + e^\mathfrak{D} \text{Id}) &= \sum_{\mathfrak{D} \in \mathfrak{D}_{\kappa^*}} \int_{\sigma^*} (\nabla \mathbf{u}(s) - \nabla^\mathfrak{D} \mathfrak{P}_\mathbf{g}^{\mathfrak{D}\mathfrak{M}} \mathbb{P}_\mathbf{c}^\tau \mathbf{u}) \cdot \tilde{\mathbf{n}}_{\sigma^*\kappa^*} ds \\ &\quad + \sum_{\mathfrak{D} \in \mathfrak{D}_{\kappa^*}} \int_{\sigma^*} (\mathbb{P}_m^\mathfrak{D} p - p(s)) \tilde{\mathbf{n}}_{\sigma^*\kappa^*} ds \\ &\quad + \sum_{\mathfrak{D}_{\sigma, \sigma^*} \in \mathfrak{D}_{\kappa^*} \cap \mathfrak{D}_{ext}} \int_{x_{\kappa^*}}^{x_\sigma} (\nabla \mathbf{u}(s) - \nabla^\mathfrak{D} \mathfrak{P}_\mathbf{g}^{\mathfrak{D}\mathfrak{M}} \mathbb{P}_\mathbf{c}^\tau \mathbf{u}) \cdot \tilde{\mathbf{n}}_{\sigma\kappa} ds \\ &\quad + \sum_{\mathfrak{D}_{\sigma, \sigma^*} \in \mathfrak{D}_{\kappa^*} \cap \mathfrak{D}_{ext}} \int_{x_{\kappa^*}}^{x_\sigma} (\mathbb{P}_m^\mathfrak{D} p - p(s)) \tilde{\mathbf{n}}_{\sigma\kappa} ds. \end{aligned} \quad (\text{V.7})$$

On définit l'erreur de consistance sur les diamants \mathfrak{D}

$$\begin{aligned} R_{\mathfrak{D}}^{\mathbf{u}}(z) &= \nabla \mathbf{u}(z) - \nabla^{\mathfrak{D}} \mathfrak{P}_{\mathbf{g}}^{\partial \mathfrak{M}} \mathbb{P}_{\mathbf{c}}^{\mathcal{T}} \mathbf{u}, \quad \text{pour } z \in \mathcal{D}, \mathcal{D} \in \mathfrak{D}, \\ R_{\mathfrak{D}}^p(z) &= \mathbb{P}_m^{\mathfrak{D}} p - p(z), \quad \text{pour } z \in \mathcal{D}, \mathcal{D} \in \mathfrak{D}, \end{aligned}$$

et pour $i \in \{\mathbf{u}, p\}$:

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{\sigma, \kappa}^i &= -\mathbf{R}_{\sigma, \mathcal{L}}^i = \frac{1}{m_{\sigma}} \int_{\sigma} R_{\mathfrak{D}}^i(s) \mathbf{n}_{\sigma \kappa} ds, \\ \mathbf{R}_{\sigma^*, \kappa^*}^i &= -\mathbf{R}_{\sigma^*, \mathcal{L}^*}^i = \frac{1}{m_{\sigma^*}} \int_{\sigma^*} R_{\mathfrak{D}}^i(s) \mathbf{n}_{\sigma^* \kappa^*} ds, \\ \mathbf{R}_{\sigma}^i &= |\mathbf{R}_{\sigma, \kappa}^i| = |\mathbf{R}_{\sigma, \mathcal{L}}^i|, \\ \mathbf{R}_{\sigma^*}^i &= |\mathbf{R}_{\sigma^*, \kappa^*}^i| = |\mathbf{R}_{\sigma^*, \mathcal{L}^*}^i|. \end{aligned}$$

On note les normes L^2 des erreurs de consistance comme suit, pour $i = \mathbf{u}, p$:

$$\|\mathbf{R}_{\sigma}^i\|_2^2 = \sum_{\mathcal{D}_{\sigma, \sigma^*} \in \mathfrak{D}} m_{\mathcal{D}} |\mathbf{R}_{\sigma}^i|^2 \quad \text{et} \quad \|\mathbf{R}_{\sigma^*}^i\|_2^2 = \sum_{\mathcal{D}_{\sigma, \sigma^*} \in \mathfrak{D}} m_{\mathcal{D}} |\mathbf{R}_{\sigma^*}^i|^2.$$

On définit l'erreur de consistance sur les demi-arêtes du bord pour $i \in \{\mathbf{u}, p\}$:

$$\mathbf{R}_{\kappa^*, \mathcal{L}}^i = \frac{1}{d_{\kappa^*, \mathcal{L}}} \int_{x_{\kappa^*}}^{x_{\mathcal{L}}} R_{\mathfrak{D}}^i(s) \mathbf{n}_{\sigma \kappa} ds \quad \text{et} \quad \mathbf{R}_{\mathcal{L}^*, \mathcal{L}}^i = \frac{1}{d_{\mathcal{L}^*, \mathcal{L}}} \int_{x_{\mathcal{L}^*}}^{x_{\mathcal{L}}} R_{\mathfrak{D}}^i(s) \mathbf{n}_{\sigma \kappa} ds, \quad \forall \mathcal{L} = [x_{\kappa^*}, x_{\mathcal{L}^*}] \in \partial \mathfrak{M}.$$

On remarque que pour $\sigma = [x_{\kappa^*}, x_{\mathcal{L}^*}] \subset \partial \Omega$:

$$m_{\sigma} \mathbf{R}_{\sigma, \kappa}^i = d_{\kappa^*, \mathcal{L}} \mathbf{R}_{\kappa^*, \mathcal{L}}^i + d_{\mathcal{L}^*, \mathcal{L}} \mathbf{R}_{\mathcal{L}^*, \mathcal{L}}^i, \quad \text{pour } i = \mathbf{u}, p. \quad (\text{V.8})$$

Grâce à (V.5), (V.6) et (V.7), le couple $(\mathbf{e}^{\mathcal{T}}, e^{\mathfrak{D}}) \in (\mathbb{R}^2)^{\mathcal{T}} \times \mathbb{R}^{\mathfrak{D}}$ est solution de :

$$\left\{ \begin{aligned} \operatorname{div}^{\mathcal{T}}(-\nabla^{\mathfrak{D}} \mathbf{e}^{\mathcal{T}} + e^{\mathfrak{D}} \operatorname{Id}) &= \mathbf{R}_{\mathcal{T}}, \\ \operatorname{div}^{\mathfrak{D}}(\mathbf{e}^{\mathcal{T}}) + \mu \operatorname{size}(\mathcal{T}) e^{\mathfrak{D}} - \lambda d_{\mathfrak{D}}^2 \Delta^{\mathfrak{D}} e^{\mathfrak{D}} &= R_{\mathfrak{D}}, \\ \gamma^{\mathcal{T}}(\mathbf{e}^{\mathcal{T}}) &= 0, \\ \sum_{\kappa \in \mathfrak{M}} m_{\kappa} \mathbf{e}_{\kappa} - \sum_{\kappa^* \in \mathfrak{M}^* \cup \partial \mathfrak{M}^*} m_{\kappa^*} \mathbf{e}_{\kappa^*} &= \sum_{\kappa \in \mathfrak{M}} m_{\kappa} (\mathbb{P}_{\mathbf{c}}^{\mathcal{T}} \mathbf{u})_{\kappa} - \sum_{\kappa^* \in \mathfrak{M}^* \cup \partial \mathfrak{M}^*} m_{\kappa^*} (\mathbb{P}_{\mathbf{c}}^{\mathcal{T}} \mathbf{u})_{\kappa^*}, \\ \sum_{\mathcal{D} \in \mathfrak{D}} m_{\mathcal{D}} e^{\mathfrak{D}} &= 0, \end{aligned} \right. \quad (\text{V.9})$$

où $\mathbf{R}_{\mathcal{T}} = ((\mathbf{R}_{\kappa})_{\kappa \in \mathfrak{M}}, (\mathbf{R}_{\kappa^*})_{\kappa^* \in \mathfrak{M}^* \cup \partial \mathfrak{M}^*})$ et $R_{\mathfrak{D}} = (R_{\mathcal{D}})_{\mathcal{D} \in \mathfrak{D}}$ avec :

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{\kappa} &= \frac{1}{m_{\kappa}} \sum_{\mathcal{D} \in \mathfrak{D}_{\kappa}} m_{\sigma} \mathbf{R}_{\sigma, \kappa}^{\mathbf{u}} + \frac{1}{m_{\kappa}} \sum_{\mathcal{D} \in \mathfrak{D}_{\kappa}} m_{\sigma} \mathbf{R}_{\sigma, \kappa}^p, \quad \forall \kappa \in \mathfrak{M}, \\ \mathbf{R}_{\kappa^*} &= \frac{1}{m_{\kappa^*}} \sum_{\mathcal{D} \in \mathfrak{D}_{\kappa^*}} m_{\sigma^*} \mathbf{R}_{\sigma^*, \kappa^*}^{\mathbf{u}} + \frac{1}{m_{\kappa^*}} \sum_{\mathcal{D} \in \mathfrak{D}_{\kappa^*}} m_{\sigma^*} \mathbf{R}_{\sigma^*, \kappa^*}^p, \quad \forall \kappa^* \in \mathfrak{M}^*, \\ \mathbf{R}_{\kappa^*} &= \frac{1}{m_{\kappa^*}} \sum_{\mathcal{D} \in \mathfrak{D}_{\kappa^*}} m_{\sigma^*} (\mathbf{R}_{\sigma^*, \kappa^*}^{\mathbf{u}} + \mathbf{R}_{\sigma^*, \kappa^*}^p) + \frac{1}{m_{\kappa^*}} \sum_{\mathcal{D}_{\sigma, \sigma^*} \in \mathfrak{D}_{\kappa^*} \cap \mathfrak{D}_{ext}} d_{\kappa^*, \mathcal{L}} (\mathbf{R}_{\kappa^*, \mathcal{L}}^{\mathbf{u}} + \mathbf{R}_{\kappa^*, \mathcal{L}}^p), \quad \forall \kappa^* \in \partial \mathfrak{M}^*, \\ R_{\mathcal{D}} &= \operatorname{div}^{\mathfrak{D}}(\mathfrak{P}_{\mathbf{g}}^{\partial \mathfrak{M}} \mathbb{P}_{\mathbf{c}}^{\mathcal{T}} \mathbf{u}) + \mu \operatorname{size}(\mathcal{T}) \mathbb{P}_m^{\mathfrak{D}} p - \lambda d_{\mathcal{D}}^2 \Delta^{\mathfrak{D}} \mathbb{P}_m^{\mathfrak{D}} p, \quad \forall \mathcal{D} \in \mathfrak{D}. \end{aligned}$$

Grâce à la Définition V.3 de B et à (V.9), on a $B(\mathbf{e}^{\mathcal{T}}, e^{\mathfrak{D}}; \mathbf{e}^{\mathcal{T}}, e^{\mathfrak{D}}) = \llbracket \mathbf{R}^{\mathcal{T}}, \mathbf{e}^{\mathcal{T}} \rrbracket_{\mathcal{T}} + (R^{\mathfrak{D}}, e^{\mathfrak{D}})_{\mathfrak{D}}$. On note

$$I := \llbracket \mathbf{R}^{\mathcal{T}}, \mathbf{e}^{\mathcal{T}} \rrbracket_{\mathcal{T}} \quad \text{et} \quad T := (R^{\mathfrak{D}}, e^{\mathfrak{D}})_{\mathfrak{D}}.$$

Estimation de I . La définition de I donne

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2} \sum_{\kappa \in \mathfrak{M}} \sum_{\mathcal{D} \in \mathfrak{D}_{\kappa}} m_{\sigma} (\mathbf{R}_{\sigma, \kappa}^p + \mathbf{R}_{\sigma, \kappa}^{\mathbf{u}}) \cdot \mathbf{e}_{\kappa} + \frac{1}{2} \sum_{\kappa^* \in \mathfrak{M}^* \cup \partial \mathfrak{M}^*} \sum_{\mathcal{D} \in \mathfrak{D}_{\kappa^*}} m_{\sigma} (\mathbf{R}_{\sigma^*, \kappa^*}^p + \mathbf{R}_{\sigma^*, \kappa^*}^{\mathbf{u}}) \cdot \mathbf{e}_{\kappa^*} \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{\kappa^* \in \partial \mathfrak{M}^*} \sum_{\mathcal{D}_{\sigma, \sigma^*} \in \mathfrak{D}_{\kappa^*} \cap \mathfrak{D}_{ext}} d_{\kappa^*, \mathcal{L}} (\mathbf{R}_{\kappa^*, \mathcal{L}}^{\mathbf{u}} + \mathbf{R}_{\kappa^*, \mathcal{L}}^p) \cdot \mathbf{e}_{\kappa^*}. \end{aligned}$$

En réorganisant la somme sur les diamants $\mathcal{D} \in \mathfrak{D}$ et en utilisant le fait que $\mathbf{R}_{\sigma,\kappa}^i = -\mathbf{R}_{\sigma,\mathcal{L}}^i$ et $\mathbf{R}_{\sigma^*,\kappa^*}^i = -\mathbf{R}_{\sigma^*,\mathcal{L}^*}^i$ pour $i = \mathbf{u}, p$, il vient que

$$\begin{aligned} I = & \frac{1}{2} \sum_{\mathcal{D}_{\sigma,\sigma^*} \in \mathfrak{D}} m_{\sigma}(\mathbf{R}_{\sigma,\kappa}^p + \mathbf{R}_{\sigma,\kappa}^{\mathbf{u}}) \cdot (\mathbf{e}_{\kappa} - \mathbf{e}_{\mathcal{L}}) + \frac{1}{2} \sum_{\mathcal{D}_{\sigma,\sigma^*} \in \mathfrak{D}} m_{\sigma^*}(\mathbf{R}_{\sigma^*,\kappa^*}^p + \mathbf{R}_{\sigma^*,\kappa^*}^{\mathbf{u}}) \cdot (\mathbf{e}_{\kappa^*} - \mathbf{e}_{\mathcal{L}^*}) \\ & + \frac{1}{2} \sum_{\mathcal{D}_{\sigma,\sigma^*} \in \mathfrak{D}_{ext}} m_{\sigma}(\mathbf{R}_{\sigma,\kappa}^p + \mathbf{R}_{\sigma,\kappa}^{\mathbf{u}}) \cdot \mathbf{e}_{\mathcal{L}} + \frac{1}{2} \sum_{\mathcal{D}_{\sigma,\sigma^*} \in \mathfrak{D}_{ext}} d_{\kappa^*,\mathcal{L}}(\mathbf{R}_{\kappa^*,\mathcal{L}}^{\mathbf{u}} + \mathbf{R}_{\kappa^*,\mathcal{L}}^p) \cdot \mathbf{e}_{\kappa^*} \\ & + \frac{1}{2} \sum_{\mathcal{D}_{\sigma,\sigma^*} \in \mathfrak{D}_{ext}} d_{\mathcal{L}^*,\mathcal{L}}(\mathbf{R}_{\mathcal{L}^*,\mathcal{L}}^{\mathbf{u}} + \mathbf{R}_{\mathcal{L}^*,\mathcal{L}}^p) \cdot \mathbf{e}_{\mathcal{L}^*}. \end{aligned}$$

Comme on a $\gamma^{\mathcal{T}}(\mathbf{e}^{\mathcal{T}}) = 0$, on obtient

$$m_{\sigma} \mathbf{e}_{\mathcal{L}} = -d_{\kappa^*,\mathcal{L}} \mathbf{e}_{\kappa^*} - d_{\mathcal{L}^*,\mathcal{L}} \mathbf{e}_{\mathcal{L}^*},$$

ainsi on en déduit

$$\begin{aligned} I = & \frac{1}{2} \sum_{\mathcal{D}_{\sigma,\sigma^*} \in \mathfrak{D}} m_{\sigma}(\mathbf{R}_{\sigma,\kappa}^p + \mathbf{R}_{\sigma,\kappa}^{\mathbf{u}}) \cdot (\mathbf{e}_{\kappa} - \mathbf{e}_{\mathcal{L}}) + \frac{1}{2} \sum_{\mathcal{D}_{\sigma,\sigma^*} \in \mathfrak{D}} m_{\sigma^*}(\mathbf{R}_{\sigma^*,\kappa^*}^p + \mathbf{R}_{\sigma^*,\kappa^*}^{\mathbf{u}}) \cdot (\mathbf{e}_{\kappa^*} - \mathbf{e}_{\mathcal{L}^*}) \\ & + \frac{1}{2} \sum_{\mathcal{D}_{\sigma,\sigma^*} \in \mathfrak{D}_{ext}} d_{\kappa^*,\mathcal{L}}(\mathbf{R}_{\kappa^*,\mathcal{L}}^{\mathbf{u}} - \mathbf{R}_{\sigma,\kappa}^{\mathbf{u}} + \mathbf{R}_{\kappa^*,\mathcal{L}}^p - \mathbf{R}_{\sigma,\kappa}^p) \cdot \mathbf{e}_{\kappa^*} \\ & + \frac{1}{2} \sum_{\mathcal{D}_{\sigma,\sigma^*} \in \mathfrak{D}_{ext}} d_{\mathcal{L}^*,\mathcal{L}}(\mathbf{R}_{\mathcal{L}^*,\mathcal{L}}^{\mathbf{u}} - \mathbf{R}_{\sigma,\kappa}^{\mathbf{u}} + \mathbf{R}_{\mathcal{L}^*,\mathcal{L}}^p - \mathbf{R}_{\sigma,\kappa}^p) \cdot \mathbf{e}_{\mathcal{L}^*}. \end{aligned}$$

Grâce à (V.8), on a pour $i = \mathbf{u}, p$

$$d_{\kappa^*,\mathcal{L}} \mathbf{R}_{\kappa^*,\mathcal{L}}^i + d_{\mathcal{L}^*,\mathcal{L}} \mathbf{R}_{\mathcal{L}^*,\mathcal{L}}^i = m_{\sigma} \mathbf{R}_{\sigma,\kappa}^i = d_{\kappa^*,\mathcal{L}} \mathbf{R}_{\sigma,\kappa}^i + d_{\mathcal{L}^*,\mathcal{L}} \mathbf{R}_{\sigma,\kappa}^i,$$

ainsi il vient que

$$d_{\mathcal{L}^*,\mathcal{L}}(\mathbf{R}_{\mathcal{L}^*,\mathcal{L}}^{\mathbf{u}} - \mathbf{R}_{\sigma,\kappa}^{\mathbf{u}} + \mathbf{R}_{\mathcal{L}^*,\mathcal{L}}^p - \mathbf{R}_{\sigma,\kappa}^p) = -d_{\kappa^*,\mathcal{L}}(\mathbf{R}_{\kappa^*,\mathcal{L}}^{\mathbf{u}} - \mathbf{R}_{\sigma,\kappa}^{\mathbf{u}} + \mathbf{R}_{\kappa^*,\mathcal{L}}^p - \mathbf{R}_{\sigma,\kappa}^p).$$

Ceci implique que

$$\begin{aligned} I = & \frac{1}{2} \sum_{\mathcal{D}_{\sigma,\sigma^*} \in \mathfrak{D}} m_{\sigma}(\mathbf{R}_{\sigma,\kappa}^p + \mathbf{R}_{\sigma,\kappa}^{\mathbf{u}}) \cdot (\mathbf{e}_{\kappa} - \mathbf{e}_{\mathcal{L}}) + \frac{1}{2} \sum_{\mathcal{D}_{\sigma,\sigma^*} \in \mathfrak{D}} m_{\sigma^*}(\mathbf{R}_{\sigma^*,\kappa^*}^p + \mathbf{R}_{\sigma^*,\kappa^*}^{\mathbf{u}}) \cdot (\mathbf{e}_{\kappa^*} - \mathbf{e}_{\mathcal{L}^*}) \\ & + \frac{1}{2} \sum_{\mathcal{D}_{\sigma,\sigma^*} \in \mathfrak{D}_{ext}} d_{\kappa^*,\mathcal{L}}(\mathbf{R}_{\kappa^*,\mathcal{L}}^{\mathbf{u}} - \mathbf{R}_{\sigma,\kappa}^{\mathbf{u}} + \mathbf{R}_{\kappa^*,\mathcal{L}}^p - \mathbf{R}_{\sigma,\kappa}^p) \cdot (\mathbf{e}_{\kappa^*} - \mathbf{e}_{\mathcal{L}^*}). \end{aligned}$$

On remarque que

$$\begin{aligned} & \sum_{\mathcal{D}_{\sigma,\sigma^*} \in \mathfrak{D}_{ext}} d_{\kappa^*,\mathcal{L}}(\mathbf{R}_{\kappa^*,\mathcal{L}}^{\mathbf{u}} - \mathbf{R}_{\sigma,\kappa}^{\mathbf{u}} + \mathbf{R}_{\kappa^*,\mathcal{L}}^p - \mathbf{R}_{\sigma,\kappa}^p) \cdot (\mathbf{e}_{\kappa^*} - \mathbf{e}_{\mathcal{L}^*}) \\ & = \sum_{\mathcal{D}_{\sigma,\sigma^*} \in \mathfrak{D}_{ext}} \frac{d_{\kappa^*,\mathcal{L}} d_{\mathcal{L}^*,\mathcal{L}}}{m_{\sigma}} (\mathbf{R}_{\kappa^*,\mathcal{L}}^{\mathbf{u}} + \mathbf{R}_{\kappa^*,\mathcal{L}}^p) \cdot (\mathbf{e}_{\kappa^*} - \mathbf{e}_{\mathcal{L}^*}) \\ & - \sum_{\mathcal{D}_{\sigma,\sigma^*} \in \mathfrak{D}_{ext}} \frac{d_{\kappa^*,\mathcal{L}} d_{\mathcal{L}^*,\mathcal{L}}}{m_{\sigma}} (\mathbf{R}_{\mathcal{L}^*,\mathcal{L}}^{\mathbf{u}} + \mathbf{R}_{\mathcal{L}^*,\mathcal{L}}^p) \cdot (\mathbf{e}_{\kappa^*} - \mathbf{e}_{\mathcal{L}^*}). \end{aligned}$$

On en déduit que

$$\begin{aligned} I = & \frac{1}{2} \sum_{\mathcal{D}_{\sigma,\sigma^*} \in \mathfrak{D}} m_{\sigma}(\mathbf{R}_{\sigma,\kappa}^p + \mathbf{R}_{\sigma,\kappa}^{\mathbf{u}}) \cdot (\mathbf{e}_{\kappa} - \mathbf{e}_{\mathcal{L}}) + \frac{1}{2} \sum_{\mathcal{D}_{\sigma,\sigma^*} \in \mathfrak{D}} m_{\sigma^*}(\mathbf{R}_{\sigma^*,\kappa^*}^p + \mathbf{R}_{\sigma^*,\kappa^*}^{\mathbf{u}}) \cdot (\mathbf{e}_{\kappa^*} - \mathbf{e}_{\mathcal{L}^*}) \\ & + \sum_{\mathcal{D}_{\sigma,\sigma^*} \in \mathfrak{D}_{ext}} \frac{d_{\kappa^*,\mathcal{L}} d_{\mathcal{L}^*,\mathcal{L}}}{m_{\sigma}} (\mathbf{R}_{\kappa^*,\mathcal{L}}^{\mathbf{u}} + \mathbf{R}_{\kappa^*,\mathcal{L}}^p) \cdot (\mathbf{e}_{\kappa^*} - \mathbf{e}_{\mathcal{L}^*}) - \sum_{\mathcal{D}_{\sigma,\sigma^*} \in \mathfrak{D}_{ext}} \frac{d_{\kappa^*,\mathcal{L}} d_{\mathcal{L}^*,\mathcal{L}}}{m_{\sigma}} (\mathbf{R}_{\mathcal{L}^*,\mathcal{L}}^{\mathbf{u}} + \mathbf{R}_{\mathcal{L}^*,\mathcal{L}}^p) \cdot (\mathbf{e}_{\kappa^*} - \mathbf{e}_{\mathcal{L}^*}). \end{aligned}$$

La Définition IV.1 du gradient discret conduit à

$$\begin{aligned}
I = & - \sum_{\mathcal{D}_{\sigma,\sigma^*} \in \mathfrak{D}} \frac{m_{\mathcal{D}}}{\sin(\alpha_{\mathcal{D}})} (\mathbf{R}_{\sigma,\kappa}^p + \mathbf{R}_{\sigma,\kappa}^u) \cdot ((\nabla^{\mathcal{D}} \mathbf{e}^{\tau}) \cdot \vec{\tau}_{\kappa,\mathcal{L}}) \\
& - \sum_{\mathcal{D}_{\sigma,\sigma^*} \in \mathfrak{D}} \frac{m_{\mathcal{D}}}{\sin(\alpha_{\mathcal{D}})} (\mathbf{R}_{\sigma^*,\kappa^*}^p + \mathbf{R}_{\sigma^*,\kappa^*}^u) \cdot ((\nabla^{\mathcal{D}} \mathbf{e}^{\tau}) \cdot \vec{\tau}_{\kappa^*,\mathcal{L}^*}) \\
& - \sum_{\mathcal{D}_{\sigma,\sigma^*} \in \mathfrak{D}_{ext}} \frac{d_{\kappa^*,\mathcal{L}} d_{\mathcal{L}^*,\mathcal{L}}}{m_{\sigma^*} m_{\sigma}} \frac{m_{\mathcal{D}}}{\sin(\alpha_{\mathcal{D}})} (\mathbf{R}_{\kappa^*,\mathcal{L}}^u + \mathbf{R}_{\kappa^*,\mathcal{L}}^p) \cdot ((\nabla^{\mathcal{D}} \mathbf{e}^{\tau}) \cdot \vec{\tau}_{\kappa^*,\mathcal{L}^*}) \\
& + \sum_{\mathcal{D}_{\sigma,\sigma^*} \in \mathfrak{D}_{ext}} \frac{d_{\kappa^*,\mathcal{L}} d_{\mathcal{L}^*,\mathcal{L}}}{m_{\sigma^*} m_{\sigma}} \frac{m_{\mathcal{D}}}{\sin(\alpha_{\mathcal{D}})} (\mathbf{R}_{\mathcal{L}^*,\mathcal{L}}^u + \mathbf{R}_{\mathcal{L}^*,\mathcal{L}}^p) \cdot ((\nabla^{\mathcal{D}} \mathbf{e}^{\tau}) \cdot \vec{\tau}_{\kappa^*,\mathcal{L}^*}).
\end{aligned}$$

L'inégalité de Cauchy-Schwarz et la relation (I.1) donnent

$$\begin{aligned}
I \leq & C(\text{reg}(\mathcal{T})) \|\nabla^{\mathcal{D}} \mathbf{e}^{\tau}\|_2 [\|\mathbf{R}_{\sigma}^u\|_2 + \|\mathbf{R}_{\sigma^*}^u\|_2 + \|\mathbf{R}_{\sigma}^p\|_2 + \|\mathbf{R}_{\sigma^*}^p\|_2] \\
& + C(\text{reg}(\mathcal{T})) \|\nabla^{\mathcal{D}} \mathbf{e}^{\tau}\|_2 \left(\sum_{\mathcal{D}_{\sigma,\sigma^*} \in \mathfrak{D}_{ext}} m_{\mathcal{D}} |\mathbf{R}_{\kappa^*,\mathcal{L}}^u + \mathbf{R}_{\kappa^*,\mathcal{L}}^p|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
& + C(\text{reg}(\mathcal{T})) \|\nabla^{\mathcal{D}} \mathbf{e}^{\tau}\|_2 \left(\sum_{\mathcal{D}_{\sigma,\sigma^*} \in \mathfrak{D}_{ext}} m_{\mathcal{D}} |\mathbf{R}_{\mathcal{L}^*,\mathcal{L}}^u + \mathbf{R}_{\mathcal{L}^*,\mathcal{L}}^p|^2 \right)^{\frac{1}{2}},
\end{aligned}$$

ou encore

$$\begin{aligned}
I \leq & C(\text{reg}(\mathcal{T})) \|\nabla^{\mathcal{D}} \mathbf{e}^{\tau}\|_2 [\|\mathbf{R}_{\sigma}^u\|_2 + \|\mathbf{R}_{\sigma^*}^u\|_2 + \|\mathbf{R}_{\sigma}^p\|_2 + \|\mathbf{R}_{\sigma^*}^p\|_2] \\
& + C(\text{reg}(\mathcal{T})) \|\nabla^{\mathcal{D}} \mathbf{e}^{\tau}\|_2 \left[\left(\sum_{\mathcal{D}_{\sigma,\sigma^*} \in \mathfrak{D}_{ext}} m_{\mathcal{D}} |\mathbf{R}_{\kappa^*,\mathcal{L}}^u|^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_{\mathcal{D}_{\sigma,\sigma^*} \in \mathfrak{D}_{ext}} m_{\mathcal{D}} |\mathbf{R}_{\kappa^*,\mathcal{L}}^p|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right] \\
& + C(\text{reg}(\mathcal{T})) \|\nabla^{\mathcal{D}} \mathbf{e}^{\tau}\|_2 \left[\left(\sum_{\mathcal{D}_{\sigma,\sigma^*} \in \mathfrak{D}_{ext}} m_{\mathcal{D}} |\mathbf{R}_{\mathcal{L}^*,\mathcal{L}}^u|^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_{\mathcal{D}_{\sigma,\sigma^*} \in \mathfrak{D}_{ext}} m_{\mathcal{D}} |\mathbf{R}_{\mathcal{L}^*,\mathcal{L}}^p|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right].
\end{aligned}$$

Estimation de T . Premièrement, on a

$$\|\text{div}^{\mathcal{D}}(\mathfrak{P}_{\mathbf{g}}^{\partial \mathfrak{M}} \mathbb{P}_{\mathbf{c}}^{\tau} \mathbf{u})\|_2 \leq \|\nabla^{\mathcal{D}}(\mathfrak{P}_{\mathbf{g}}^{\partial \mathfrak{M}} \mathbb{P}_{\mathbf{c}}^{\tau} \mathbf{u} - \mathbb{P}_{\mathbf{c}}^{\tau} \mathbf{u})\|_2 + \|\text{div}^{\mathcal{D}}(\mathbb{P}_{\mathbf{c}}^{\tau} \mathbf{u})\|_2.$$

Ainsi le Lemme IV.21 et le Corollaire IV.18 impliquent que

$$\|\text{div}^{\mathcal{D}}(\mathfrak{P}_{\mathbf{g}}^{\partial \mathfrak{M}} \mathbb{P}_{\mathbf{c}}^{\tau} \mathbf{u})\|_2 \leq C \text{size}(\mathcal{T}) \|\mathbf{u}\|_{H^2}.$$

L'inégalité de Cauchy-Schwarz donne

$$(\text{div}^{\mathcal{D}}(\mathfrak{P}_{\mathbf{g}}^{\partial \mathfrak{M}} \mathbb{P}_{\mathbf{c}}^{\tau} \mathbf{u}), e^{\mathcal{D}})_{\mathfrak{D}} \leq C \text{size}(\mathcal{T}) \|\mathbf{u}\|_{H^2} \|e^{\mathcal{D}}\|_2. \quad (\text{V.10})$$

En réorganisant la somme sur $\mathfrak{s} \in \mathfrak{S}$ dans le terme $T_1 := -(\lambda d_{\mathcal{D}}^2 \Delta^{\mathcal{D}} \mathbb{P}_{\mathbf{m}}^{\mathcal{D}} p, e^{\mathcal{D}})_{\mathfrak{D}}$, on a comme dans la Remarque IV.12

$$T_1 = -\lambda \sum_{\mathcal{D} \in \mathfrak{D}} m_{\mathcal{D}} e^{\mathcal{D}} d_{\mathcal{D}}^2 \Delta^{\mathcal{D}} \mathbb{P}_{\mathbf{m}}^{\mathcal{D}} p = \lambda \sum_{\mathfrak{s}=\mathcal{D}|\mathcal{D}' \in \mathfrak{S}} (d_{\mathcal{D}}^2 + d_{\mathcal{D}'}^2) (\mathbb{P}_{\mathbf{m}}^{\mathcal{D}'} p - \mathbb{P}_{\mathbf{m}}^{\mathcal{D}} p) (e^{\mathcal{D}'} - e^{\mathcal{D}}).$$

L'inégalité de Cauchy-Schwarz et la définition de la semi-norme $|\cdot|_h$ (IV.15) donnent

$$\begin{aligned}
|T_1| & \leq \lambda \left(\sum_{\mathfrak{s}=\mathcal{D}|\mathcal{D}' \in \mathfrak{S}} (d_{\mathcal{D}}^2 + d_{\mathcal{D}'}^2) (\mathbb{P}_{\mathbf{m}}^{\mathcal{D}'} p - \mathbb{P}_{\mathbf{m}}^{\mathcal{D}} p)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{\mathfrak{s}=\mathcal{D}|\mathcal{D}' \in \mathfrak{S}} (d_{\mathcal{D}}^2 + d_{\mathcal{D}'}^2) (e^{\mathcal{D}'} - e^{\mathcal{D}})^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
& \leq 2 \text{size}(\mathcal{T}) \lambda |e^{\mathcal{D}}|_h \left(\sum_{\mathfrak{s}=\mathcal{D}|\mathcal{D}' \in \mathfrak{S}} (\mathbb{P}_{\mathbf{m}}^{\mathcal{D}'} p - \mathbb{P}_{\mathbf{m}}^{\mathcal{D}} p)^2 \right)^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

Les Lemmes IV.13 et IV.23 conduisent à

$$|T_1| \leq C \text{size}(\mathcal{T}) \|e^{\mathcal{D}}\|_2 \|\nabla p\|_2. \quad (\text{V.11})$$

Ensuite, l'inégalité de Cauchy-Schwarz et la Proposition IV.24 donnent

$$(\mu \text{size}(\mathcal{T}) \mathbb{P}_m^{\mathfrak{D}} p, e^{\mathfrak{D}})_{\mathfrak{D}} \leq C \text{size}(\mathcal{T}) \|p\|_{H^1} \|e^{\mathfrak{D}}\|_2. \quad (\text{V.12})$$

On remarque que $T = (\text{div}^{\mathfrak{D}}(\mathfrak{P}_g^{\partial \mathfrak{M}} \mathbb{P}_c^{\mathfrak{T}} \mathbf{u}), e^{\mathfrak{D}})_{\mathfrak{D}} + (\mu \text{size}(\mathcal{T}) \mathbb{P}_m^{\mathfrak{D}} p, e^{\mathfrak{D}})_{\mathfrak{D}} + T_1$, grâce à (V.10), (V.11) et (V.12), on déduit que

$$|T| \leq C \text{size}(\mathcal{T}) \|e^{\mathfrak{D}}\|_2 (\|\mathbf{u}\|_{H^2} + \|p\|_{H^1}).$$

Estimation de B . En regroupant l'estimation sur I et T , on a

$$\begin{aligned} |B(\mathbf{e}^{\mathfrak{T}}, e^{\mathfrak{D}}; \mathbf{e}^{\mathfrak{T}}, e^{\mathfrak{D}})| &\leq C \|\nabla^{\mathfrak{D}} \mathbf{e}^{\mathfrak{T}}\|_2 [\|\mathbf{R}_{\sigma}^{\mathbf{u}}\|_2 + \|\mathbf{R}_{\sigma^*}^{\mathbf{u}}\|_2 + \|\mathbf{R}_{\sigma}^p\|_2 + \|\mathbf{R}_{\sigma^*}^p\|_2] \\ &\quad + C \|\nabla^{\mathfrak{D}} \mathbf{e}^{\mathfrak{T}}\|_2 \left[\left(\sum_{\mathcal{D} \in \mathfrak{D}_{ext}} m_{\mathcal{D}} |\mathbf{R}_{\kappa^*, \mathcal{L}}^{\mathbf{u}}|^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_{\mathcal{D} \in \mathfrak{D}_{ext}} m_{\mathcal{D}} |\mathbf{R}_{\kappa^*, \mathcal{L}}^p|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right] \\ &\quad + C \|\nabla^{\mathfrak{D}} \mathbf{e}^{\mathfrak{T}}\|_2 \left[\left(\sum_{\mathcal{D} \in \mathfrak{D}_{ext}} m_{\mathcal{D}} |\mathbf{R}_{\mathcal{L}^*, \mathcal{L}}^{\mathbf{u}}|^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_{\mathcal{D} \in \mathfrak{D}_{ext}} m_{\mathcal{D}} |\mathbf{R}_{\mathcal{L}^*, \mathcal{L}}^p|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right] \\ &\quad + C \text{size}(\mathcal{T}) \|e^{\mathfrak{D}}\|_2 (\|\mathbf{u}\|_{H^2} + \|p\|_{H^1}). \end{aligned} \quad (\text{V.13})$$

On calcule la valeur de B donnée par la Définition V.3. On applique la formule de Green discrète (Théorème IV.9), en remarquant que $\gamma^{\mathfrak{T}}(\mathbf{e}^{\mathfrak{T}}) = 0$, on obtient ainsi

$$B(\mathbf{e}^{\mathfrak{T}}, e^{\mathfrak{D}}; \mathbf{e}^{\mathfrak{T}}, e^{\mathfrak{D}}) = \|\nabla^{\mathfrak{D}} \mathbf{e}^{\mathfrak{T}}\|_2^2 + \mu \text{size}(\mathcal{T}) \|e^{\mathfrak{D}}\|_2^2 - \lambda (d_{\mathfrak{D}}^2 \Delta^{\mathfrak{D}} e^{\mathfrak{D}}, e^{\mathfrak{D}})_{\mathfrak{D}}.$$

Grâce à la Remarque IV.12, on a

$$B(\mathbf{e}^{\mathfrak{T}}, e^{\mathfrak{D}}; \mathbf{e}^{\mathfrak{T}}, e^{\mathfrak{D}}) = \|\nabla^{\mathfrak{D}} \mathbf{e}^{\mathfrak{T}}\|_2^2 + \mu \text{size}(\mathcal{T}) \|e^{\mathfrak{D}}\|_2^2 + \underbrace{\lambda |e^{\mathfrak{D}}|_h^2}_{\geq 0}.$$

Ceci et (V.13) impliquent

$$\begin{aligned} \|\nabla^{\mathfrak{D}} \mathbf{e}^{\mathfrak{T}}\|_2^2 + \mu \text{size}(\mathcal{T}) \|e^{\mathfrak{D}}\|_2^2 &\leq C \|\nabla^{\mathfrak{D}} \mathbf{e}^{\mathfrak{T}}\|_2 [\|\mathbf{R}_{\sigma}^{\mathbf{u}}\|_2 + \|\mathbf{R}_{\sigma^*}^{\mathbf{u}}\|_2 + \|\mathbf{R}_{\sigma}^p\|_2 + \|\mathbf{R}_{\sigma^*}^p\|_2] \\ &\quad + C \|\nabla^{\mathfrak{D}} \mathbf{e}^{\mathfrak{T}}\|_2 \left[\left(\sum_{\mathcal{D} \in \mathfrak{D}_{ext}} m_{\mathcal{D}} |\mathbf{R}_{\kappa^*, \mathcal{L}}^{\mathbf{u}}|^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_{\mathcal{D} \in \mathfrak{D}_{ext}} m_{\mathcal{D}} |\mathbf{R}_{\kappa^*, \mathcal{L}}^p|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right] \\ &\quad + C \|\nabla^{\mathfrak{D}} \mathbf{e}^{\mathfrak{T}}\|_2 \left[\left(\sum_{\mathcal{D} \in \mathfrak{D}_{ext}} m_{\mathcal{D}} |\mathbf{R}_{\mathcal{L}^*, \mathcal{L}}^{\mathbf{u}}|^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_{\mathcal{D} \in \mathfrak{D}_{ext}} m_{\mathcal{D}} |\mathbf{R}_{\mathcal{L}^*, \mathcal{L}}^p|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right] \\ &\quad + C \text{size}(\mathcal{T}) \|e^{\mathfrak{D}}\|_2 (\|\mathbf{u}\|_{H^2} + \|p\|_{H^1}). \end{aligned} \quad (\text{V.14})$$

Il reste à montrer les estimations des erreurs de consistance.

V.3.2 Erreur de consistance

Estimation de la vitesse : l'erreur de consistance $R_{\mathfrak{D}}^{\mathbf{u}}$ peut être décomposée en trois contributions $R_{\mathfrak{D}}^{\mathbf{u}, \eta}$, $R_{\mathfrak{D}}^{\mathbf{u}, \text{Du}}$ et $R_{\mathfrak{D}}^{\mathbf{u}, bd}$ venant, respectivement, de l'erreur due à l'approximation des flux, à l'approximation du gradient et à l'approximation de la donnée du bord :

$$R_{\mathfrak{D}}^{\mathbf{u}}(z) = R_{\mathfrak{D}}^{\mathbf{u}, \eta}(z) + R_{\mathfrak{D}}^{\mathbf{u}, \text{Du}} + R_{\mathfrak{D}}^{\mathbf{u}, bd}, \quad (\text{V.15})$$

avec, pour $z \in \mathcal{D}$,

$$\begin{aligned} R_{\mathfrak{D}}^{\mathbf{u}, \eta}(z) &= \nabla \mathbf{u}(z) - \frac{1}{m_{\mathcal{D}}} \int_{\mathcal{D}} \nabla \mathbf{u}(x) dx, \\ R_{\mathfrak{D}}^{\mathbf{u}, \text{Du}} &= \frac{1}{m_{\mathcal{D}}} \int_{\mathcal{D}} (\nabla \mathbf{u}(x) - \nabla^{\mathfrak{D}} \mathbb{P}_c^{\mathfrak{T}} \mathbf{u}) dx, \\ R_{\mathfrak{D}}^{\mathbf{u}, bd} &= \nabla^{\mathfrak{D}} \mathbb{P}_c^{\mathfrak{T}} \mathbf{u} - \nabla^{\mathfrak{D}} \mathfrak{P}_g^{\partial \mathfrak{M}} \mathbb{P}_c^{\mathfrak{T}} \mathbf{u}. \end{aligned}$$

Afin de contrôler $\mathbf{R}_{\sigma}^{\mathbf{u}}$ et $\mathbf{R}_{\sigma^*}^{\mathbf{u}}$, on va estimer séparément les différents termes du membre de droite de (V.15).

Proposition V.5 (Erreur due au gradient)

Soit \mathcal{T} un maillage DDFV associé à Ω . Il existe une constante $C > 0$, dépendant uniquement de $\text{reg}(\mathcal{T})$, telle que pour toute fonction \mathbf{u} dans $(H^2(\Omega))^2$, on a

$$\|R_{\mathcal{D}}^{\mathbf{u}, \text{Du}}\|_2 \leq C \text{size}(\mathcal{T}) \|\nabla \mathbf{u}\|_{H^1}.$$

Démonstration : L'inégalité de Jensen donne

$$\|R_{\mathcal{D}}^{\mathbf{u}, \text{Du}}\|_2^2 = \sum_{\mathcal{D} \in \mathcal{D}} m_{\mathcal{D}} \left| \frac{1}{m_{\mathcal{D}}} \int_{\mathcal{D}} (\nabla \mathbf{u}(x) - \nabla^{\mathcal{D}} \mathbb{P}_{\mathcal{C}}^{\tau} \mathbf{u}) dx \right|^2 \leq \|\nabla \mathbf{u} - \nabla^{\mathcal{D}} \mathbb{P}_{\mathcal{C}}^{\tau} \mathbf{u}\|_2^2,$$

puis on applique le Lemme IV.16 pour obtenir le résultat. \blacksquare

Proposition V.6 (Erreur due au bord)

Soit \mathcal{T} un maillage DDFV associé à Ω . Il existe une constante $C > 0$, dépendant uniquement de $\text{reg}(\mathcal{T})$, telle que pour toute fonction \mathbf{u} dans $(H^2(\Omega))^2$, dont la trace est notée $\mathbf{g} = \gamma(\mathbf{u})$, on a

$$\|R_{\mathcal{D}}^{\mathbf{u}, bd}\|_2 \leq C \text{size}(\mathcal{T}) \|\mathbf{u}\|_{H^2}.$$

Démonstration : Par définition, on a

$$\|R_{\mathcal{D}}^{\mathbf{u}, bd}\|_2 = \|\nabla^{\mathcal{D}} \mathbb{P}_{\mathcal{C}}^{\tau} \mathbf{u} - \nabla^{\mathcal{D}} \mathfrak{P}_{\mathbf{g}}^{\text{om}} \mathbb{P}_{\mathcal{C}}^{\tau} \mathbf{u}\|_2.$$

Le Lemme IV.21 implique le résultat. \blacksquare

Proposition V.7 (Erreur due au flux)

Soit \mathcal{T} un maillage DDFV associé à Ω . Il existe une constante $C > 0$, dépendant uniquement de $\text{reg}(\mathcal{T})$, telle que pour toute fonction \mathbf{u} dans $(H^2(\Omega))^2$, on a

$$\sum_{\mathcal{D}_{\sigma}, \sigma^* \in \mathcal{D}} m_{\mathcal{D}} \left[\frac{1}{m_{\sigma}} \int_{\sigma} \|R_{\mathcal{D}}^{\mathbf{u}, \eta}(s)\|_{\mathcal{F}}^2 ds + \frac{1}{m_{\sigma^*}} \int_{\sigma^*} \|R_{\mathcal{D}}^{\mathbf{u}, \eta}(s)\|_{\mathcal{F}}^2 ds \right] \leq C \text{size}(\mathcal{T})^2 \|\nabla \mathbf{u}\|_{H^1}^2.$$

Démonstration : On applique l'inégalité de Jensen

$$\frac{1}{m_{\sigma}} \int_{\sigma} \|R_{\mathcal{D}}^{\mathbf{u}, \eta}(s)\|_{\mathcal{F}}^2 ds \leq \frac{1}{m_{\sigma} m_{\mathcal{D}}} \int_{\sigma} \int_{\mathcal{D}} \|\nabla \mathbf{u}(s) - \nabla \mathbf{u}(x)\|_{\mathcal{F}}^2 dx ds.$$

Une extension matricielle du Lemme I.12, appliqué à un diamant \mathcal{D} et à σ , implique

$$\frac{1}{m_{\mathcal{D}} m_{\sigma}} \int_{\sigma} \int_{\mathcal{D}} \|\nabla \mathbf{u}(s) - \nabla \mathbf{u}(x)\|_{\mathcal{F}}^2 dx ds \leq C \frac{d_{\mathcal{D}}^3}{m_{\sigma} m_{\mathcal{D}}} \int_{\mathcal{D}} |\nabla^2 \mathbf{u}(y)|^2 dy.$$

Grâce à la relation (I.1), on a $\frac{d_{\mathcal{D}}}{m_{\sigma}} \leq C$ il vient que

$$\sum_{\mathcal{D}_{\sigma}, \sigma^* \in \mathcal{D}} m_{\mathcal{D}} \frac{1}{m_{\sigma}} \int_{\sigma} \|R_{\mathcal{D}}^{\mathbf{u}, \eta}(s)\|_{\mathcal{F}}^2 ds \leq C \text{size}(\mathcal{T})^2 \|\nabla \mathbf{u}\|_{H^1}^2.$$

On fait la même chose pour les arêtes duales σ^* . \blacksquare

Maintenant, on peut contrôler $\mathbf{R}_{\sigma}^{\mathbf{u}}$ et $\mathbf{R}_{\sigma^*}^{\mathbf{u}}$, comme suit.

Lemme V.8

Soit \mathcal{T} un maillage DDFV associé à Ω . Il existe une constante $C > 0$, dépendant uniquement de $\text{reg}(\mathcal{T})$, telle que pour toute fonction \mathbf{u} dans $(H^2(\Omega))^2$, on a

$$\|\mathbf{R}_{\sigma}^{\mathbf{u}}\|_2 + \|\mathbf{R}_{\sigma^*}^{\mathbf{u}}\|_2 \leq C \text{size}(\mathcal{T}) \|\nabla \mathbf{u}\|_{H^1}.$$

Démonstration : Grâce à (V.15) et l'inégalité de Jensen, on obtient

$$\sum_{\mathcal{D}_{\sigma,\sigma^*} \in \mathfrak{D}} m_{\mathcal{D}} |\mathbf{R}_{\sigma}^{\mathbf{u}}|^2 \leq 3 \sum_{\mathcal{D}_{\sigma,\sigma^*} \in \mathfrak{D}} m_{\mathcal{D}} \frac{1}{m_{\sigma}} \int_{\sigma} \|R_{\mathfrak{D}}^{\mathbf{u},\eta}(s)\|_{\mathcal{F}}^2 ds + 3 \|R_{\mathfrak{D}}^{\mathbf{u},\text{Du}}\|_2^2 + 3 \|R_{\mathfrak{D}}^{\mathbf{u},bd}\|_2^2.$$

On conclut en utilisant les Propositions V.5, V.6 et V.7. On fait de même pour l'estimation de $\mathbf{R}_{\sigma^*}^{\mathbf{u}}$. ■

On peut faire de même pour contrôler $\mathbf{R}_{\kappa^*,\mathcal{L}}^{\mathbf{u}}$.

Lemme V.9

Soit \mathcal{T} un maillage DDFV associé à Ω . Il existe une constante $C > 0$, dépendant uniquement de $\text{reg}(\mathcal{T})$, telle que pour toute fonction \mathbf{u} dans $(H^2(\Omega))^2$, on a

$$\sum_{\mathcal{D}_{\sigma,\sigma^*} \in \mathfrak{D}_{ext}} m_{\mathcal{D}} |\mathbf{R}_{\kappa^*,\mathcal{L}}^{\mathbf{u}}|^2 + \sum_{\mathcal{D}_{\sigma,\sigma^*} \in \mathfrak{D}_{ext}} m_{\mathcal{D}} |\mathbf{R}_{\mathcal{L}^*,\mathcal{L}}^{\mathbf{u}}|^2 \leq C \text{size}(\mathcal{T})^2 \|\nabla \mathbf{u}\|_{H^1}.$$

Démonstration : Grâce à (V.15) et l'inégalité de Jensen, on obtient

$$\sum_{\mathcal{D}_{\sigma,\sigma^*} \in \mathfrak{D}_{ext}} m_{\mathcal{D}} |\mathbf{R}_{\kappa^*,\mathcal{L}}^{\mathbf{u}}|^2 \leq 3 \sum_{\mathcal{D}_{\sigma,\sigma^*} \in \mathfrak{D}_{ext}} m_{\mathcal{D}} \frac{m_{\sigma}}{d_{\kappa^*,\mathcal{L}} m_{\sigma}} \int_{\sigma} \|R_{\mathfrak{D}}^{\mathbf{u},\eta}(s)\|_{\mathcal{F}}^2 ds + 3 \|R_{\mathfrak{D}}^{\mathbf{u},\text{Du}}\|_2^2 + 3 \|R_{\mathfrak{D}}^{\mathbf{u},bd}\|_2^2.$$

La relation (I.1) conduit à $\frac{m_{\sigma}}{d_{\kappa^*,\mathcal{L}}} \leq \text{reg}(\mathcal{T})$ pour tout $\mathcal{D}_{\sigma,\sigma^*} \in \mathfrak{D}_{ext}$ et ceci implique

$$\sum_{\mathcal{D}_{\sigma,\sigma^*} \in \mathfrak{D}_{ext}} m_{\mathcal{D}} |\mathbf{R}_{\kappa^*,\mathcal{L}}^{\mathbf{u}}|^2 \leq 3 \text{reg}(\mathcal{T}) \sum_{\mathcal{D}_{\sigma,\sigma^*} \in \mathfrak{D}} m_{\mathcal{D}} \frac{1}{m_{\sigma}} \int_{\sigma} \|R_{\mathfrak{D}}^{\mathbf{u},\eta}(s)\|_{\mathcal{F}}^2 ds + 3 \|R_{\mathfrak{D}}^{\mathbf{u},\text{Du}}\|_2^2 + 3 \|R_{\mathfrak{D}}^{\mathbf{u},bd}\|_2^2.$$

Par conséquent, on conclut en utilisant les Propositions V.5, V.6 et V.7. On fait de même pour le second terme. ■

Estimation de la pression : on contrôle \mathbf{R}_{σ}^p et $\mathbf{R}_{\sigma^*}^p$, comme suit.

Lemme V.10

Soit \mathcal{T} un maillage DDFV associé à Ω . Il existe une constante $C > 0$, dépendant uniquement de $\text{reg}(\mathcal{T})$, telle que pour toute fonction p dans $H^1(\Omega)$, on a

$$\|\mathbf{R}_{\sigma}^p\|_2 + \|\mathbf{R}_{\sigma^*}^p\|_2 \leq C \text{size}(\mathcal{T}) \|\nabla p\|_2.$$

Démonstration : On applique le Lemme IV.14 sur l'arête primale σ et le demi-diamant \mathcal{D}_1 tels que $\mathcal{D}_{\sigma,\sigma^*} = \mathcal{D}_1 \cup \mathcal{D}_2$ avec $\mathcal{D}_1 \cap \mathcal{D}_2 = \sigma$ pour $R_{\mathfrak{D}}^p(s) \tilde{\mathbf{n}}_{\sigma\kappa}$: pour $i = 1, 2$

$$|\mathbf{R}_{\sigma}^p|^2 \left| \frac{1}{m_{\sigma}} \int_{\sigma} R_{\mathfrak{D}}^p(s) \tilde{\mathbf{n}}_{\sigma\kappa} ds \right|^2 \leq \frac{C h_{\mathcal{D}_i}}{m_{\sigma}} \int_{\mathcal{D}_i} \|\nabla(R_{\mathfrak{D}}^p(z) \tilde{\mathbf{n}}_{\sigma\kappa})\|_{\mathcal{F}}^2 dz + \frac{C}{h_{\mathcal{D}_i} m_{\sigma}} \int_{\mathcal{D}_i} |(R_{\mathfrak{D}}^p(z) \tilde{\mathbf{n}}_{\sigma\kappa})|^2 dz.$$

Grâce à la relation (I.1) on a $\frac{m_{\mathcal{D}} h_{\mathcal{D}_i}}{m_{\sigma}} \leq \frac{1}{2} \text{size}(\mathcal{T})^2$ et $\frac{m_{\mathcal{D}}}{h_{\mathcal{D}_i} m_{\sigma}} \leq C$. On rappelle que $R_{\mathfrak{D}}^p = \mathbb{P}_{m^{\mathcal{D}}}^{\mathcal{D}} p - p$, on déduit

$$\sum_{\mathcal{D}_{\sigma,\sigma^*} \in \mathfrak{D}} m_{\mathcal{D}} |\mathbf{R}_{\sigma}^p|^2 \leq C \text{size}(\mathcal{T})^2 \sum_{\mathcal{D} \in \mathfrak{D}} \int_{\mathcal{D}} |\nabla p(z)|^2 dz + C \sum_{\mathcal{D} \in \mathfrak{D}} \int_{\mathcal{D}} |\mathbb{P}_{m^{\mathcal{D}}}^{\mathcal{D}} p - p(z)|^2 dz.$$

Finalement, la Proposition IV.24 implique

$$\sum_{\mathcal{D}_{\sigma,\sigma^*} \in \mathfrak{D}} m_{\mathcal{D}} |\mathbf{R}_{\sigma}^p|^2 \leq C \text{size}(\mathcal{T})^2 \|\nabla p\|_2^2.$$

On fait de même pour l'estimation de $\mathbf{R}_{\sigma^*}^p$. ■

On contrôle $\mathbf{R}_{\kappa^*,\mathcal{L}}^p$, en refaisant la même démonstration que ci-dessus en remplaçant σ par $[x_{\kappa^*}, x_{\mathcal{L}}]$ pour tout $\sigma \subset \partial\Omega$.

Lemme V.11

Soit \mathcal{T} un maillage DDFV associé à Ω . Il existe une constante $C > 0$, dépendant uniquement de $\text{reg}(\mathcal{T})$, telle que pour toute fonction p dans $H^1(\Omega)$, on a

$$\sum_{\mathcal{D}_{\sigma,\sigma^*} \in \mathcal{D}_{ext}} m_{\mathcal{D}} |\mathbf{R}_{\mathcal{K}^*,\mathcal{L}}^p|^2 + \sum_{\mathcal{D}_{\sigma,\sigma^*} \in \mathcal{D}_{ext}} m_{\mathcal{D}} |\mathbf{R}_{\mathcal{L}^*,\mathcal{L}}^p|^2 \leq C \text{size}(\mathcal{T})^2 \|\nabla p\|_2^2.$$

V.3.3 Fin de la démonstration du Théorème V.4

On avait posé $\mathbf{e}^{\mathcal{T}} = \mathfrak{P}_{\mathbf{g}}^{\theta\mathfrak{m}} \mathbb{P}_{\mathcal{C}}^{\mathcal{T}} \mathbf{u} - \mathbf{u}^{\mathcal{T}}$ et $e^{\mathcal{D}} = \mathbb{P}_{\mathcal{m}}^{\mathcal{D}} p - p^{\mathcal{D}}$ et obtenu l'inégalité suivante (V.14) :

$$\begin{aligned} \|\nabla^{\mathcal{D}} \mathbf{e}^{\mathcal{T}}\|_2^2 + \mu \text{size}(\mathcal{T}) \|e^{\mathcal{D}}\|_2^2 &\leq C \|\nabla^{\mathcal{D}} \mathbf{e}^{\mathcal{T}}\|_2 [\|\mathbf{R}_{\sigma}^{\mathbf{u}}\|_2 + \|\mathbf{R}_{\sigma^*}^{\mathbf{u}}\|_2 + \|\mathbf{R}_{\sigma}^p\|_2 + \|\mathbf{R}_{\sigma^*}^p\|_2] \\ &\quad + C \|\nabla^{\mathcal{D}} \mathbf{e}^{\mathcal{T}}\|_2 \left[\left(\sum_{\mathcal{D} \in \mathcal{D}_{ext}} m_{\mathcal{D}} |\mathbf{R}_{\mathcal{K}^*,\mathcal{L}}^{\mathbf{u}}|^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_{\mathcal{D} \in \mathcal{D}_{ext}} m_{\mathcal{D}} |\mathbf{R}_{\mathcal{L}^*,\mathcal{L}}^p|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right] \\ &\quad + C \|\nabla^{\mathcal{D}} \mathbf{e}^{\mathcal{T}}\|_2 \left[\left(\sum_{\mathcal{D} \in \mathcal{D}_{ext}} m_{\mathcal{D}} |\mathbf{R}_{\mathcal{L}^*,\mathcal{L}}^{\mathbf{u}}|^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_{\mathcal{D} \in \mathcal{D}_{ext}} m_{\mathcal{D}} |\mathbf{R}_{\mathcal{K}^*,\mathcal{L}}^p|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right] \\ &\quad + C \text{size}(\mathcal{T}) \|e^{\mathcal{D}}\|_2 (\|\mathbf{u}\|_{H^2} + \|p\|_{H^1}). \end{aligned}$$

Les Lemmes V.8, V.9, V.10 et V.11 impliquent

$$\|\nabla^{\mathcal{D}} \mathbf{e}^{\mathcal{T}}\|_2^2 + \mu \text{size}(\mathcal{T}) \|e^{\mathcal{D}}\|_2^2 \leq C \text{size}(\mathcal{T}) \|\nabla^{\mathcal{D}} \mathbf{e}^{\mathcal{T}}\|_2 + C \text{size}(\mathcal{T}) \|e^{\mathcal{D}}\|_2.$$

On applique l'inégalité de Young pour obtenir

$$\|\nabla^{\mathcal{D}} \mathbf{e}^{\mathcal{T}}\|_2^2 \leq C \text{size}(\mathcal{T}) \quad \text{et} \quad \|e^{\mathcal{D}}\|_2 \leq C. \quad (\text{V.16})$$

Estimation de $\|\nabla \mathbf{u} - \nabla^{\mathcal{D}} \mathbf{u}^{\mathcal{T}}\|_2$: On a

$$\|\nabla \mathbf{u} - \nabla^{\mathcal{D}} \mathbf{u}^{\mathcal{T}}\|_2 \leq \|\nabla \mathbf{u} - \nabla^{\mathcal{D}} \mathbb{P}_{\mathcal{C}}^{\mathcal{T}} \mathbf{u}\|_2 + \|\nabla^{\mathcal{D}} \mathbb{P}_{\mathcal{C}}^{\mathcal{T}} \mathbf{u} - \nabla^{\mathcal{D}} \mathfrak{P}_{\mathbf{g}}^{\theta\mathfrak{m}} \mathbb{P}_{\mathcal{C}}^{\mathcal{T}} \mathbf{u}\|_2 + \|\nabla^{\mathcal{D}} \mathfrak{P}_{\mathbf{g}}^{\theta\mathfrak{m}} \mathbb{P}_{\mathcal{C}}^{\mathcal{T}} \mathbf{u} - \nabla^{\mathcal{D}} \mathbf{u}^{\mathcal{T}}\|_2.$$

Finalement, les Lemmes IV.16 et IV.21 et la relation (V.16) donnent

$$\|\nabla \mathbf{u} - \nabla^{\mathcal{D}} \mathbf{u}^{\mathcal{T}}\|_2 \leq C \text{size}(\mathcal{T})^{\frac{1}{2}}. \quad \blacksquare$$

V.3.4 Stabilité du schéma S-DDFV

Dans cette section, on suppose que $\lambda > 0$. On améliore l'estimation d'erreur pour le schéma (BPS). En particulier on obtient une pour la pression. Ces estimations reposent sur le résultat de stabilité du schéma, que l'on montre dans le Théorème V.12. La stabilisation de type Brezzi-Pitkäranta joue un rôle essentiel ici.

Théorème V.12 (Stabilité du schéma)

On suppose que $\lambda > 0$. Il existe deux constantes $C_1 > 0$ et $C_2 > 0$, dépendant uniquement de Ω , λ et $\text{reg}(\mathcal{T})$, telles que pour chaque couple $(\mathbf{u}^{\mathcal{T}}, p^{\mathcal{D}}) \in (\mathbb{R}^2)^{\mathcal{T}} \times \mathbb{R}^{\mathcal{D}}$ avec $\gamma^{\mathcal{T}}(\mathbf{u}^{\mathcal{T}}) = 0$ et $\sum_{\mathcal{D} \in \mathcal{D}} m_{\mathcal{D}} p^{\mathcal{D}} = 0$, il existe

$\tilde{\mathbf{u}}^{\mathcal{T}} \in (\mathbb{R}^2)^{\mathcal{T}}$ et $\tilde{p}^{\mathcal{D}} \in \mathbb{R}^{\mathcal{D}}$ avec $\gamma^{\mathcal{T}}(\tilde{\mathbf{u}}^{\mathcal{T}}) = 0$ vérifiant :

$$\|\nabla^{\mathcal{D}} \tilde{\mathbf{u}}^{\mathcal{T}}\|_2 + \|\tilde{p}^{\mathcal{D}}\|_2 \leq C_1 (\|\nabla^{\mathcal{D}} \mathbf{u}^{\mathcal{T}}\|_2 + \|p^{\mathcal{D}}\|_2), \quad (\text{V.17})$$

et

$$\|\nabla^{\mathcal{D}} \mathbf{u}^{\mathcal{T}}\|_2^2 + \|p^{\mathcal{D}}\|_2^2 \leq C_2 B(\mathbf{u}^{\mathcal{T}}, p^{\mathcal{D}}; \tilde{\mathbf{u}}^{\mathcal{T}}, \tilde{p}^{\mathcal{D}}). \quad (\text{V.18})$$

Démonstration : Soit $(\mathbf{u}^{\mathcal{T}}, p^{\mathcal{D}}) \in (\mathbb{R}^2)^{\mathcal{T}} \times \mathbb{R}^{\mathcal{D}}$ tels que $\gamma^{\mathcal{T}}(\mathbf{u}^{\mathcal{T}}) = 0$ et $\sum_{\mathcal{D} \in \mathcal{D}} m_{\mathcal{D}} p^{\mathcal{D}} = 0$. La démonstration

de ce résultat est obtenue en construisant explicitement $(\tilde{\mathbf{u}}^{\mathcal{T}}, \tilde{p}^{\mathcal{D}}) \in (\mathbb{R}^2)^{\mathcal{T}} \times \mathbb{R}^{\mathcal{D}}$ tels que les relations (V.17) et (V.18) soient vérifiées.

Etape 1 : On applique la formule de Green discrète (Théorème IV.9) à B Définition V.3, en remarquant que $\gamma^\tau(\mathbf{u}^\tau) = 0$ et on obtient

$$B(\mathbf{u}^\tau, p^\mathfrak{D}; \mathbf{u}^\tau, p^\mathfrak{D}) = \|\nabla^\mathfrak{D} \mathbf{u}^\tau\|_2^2 + \mu \text{size}(\mathcal{T}) \|p^\mathfrak{D}\|_2^2 - \lambda(d_\mathfrak{D}^2 \Delta^\mathfrak{D} p^\mathfrak{D}, p^\mathfrak{D})_\mathfrak{D}.$$

Grâce à la Remarque IV.12, on a

$$B(\mathbf{u}^\tau, p^\mathfrak{D}; \mathbf{u}^\tau, p^\mathfrak{D}) = \|\nabla^\mathfrak{D} \mathbf{u}^\tau\|_2^2 + \mu \text{size}(\mathcal{T}) \|p^\mathfrak{D}\|_2^2 + \lambda |p^\mathfrak{D}|_h^2. \quad (\text{V.19})$$

Etape 2 : On utilise le Lemme de Nečas (voir [GR86, Corollaire 2.4] ou [BF06, Lemme III.1.17]) : comme $p^\mathfrak{D} = \sum_{\mathfrak{D} \in \mathfrak{D}} p^\mathfrak{D} \mathbf{1}_\mathfrak{D} \in L^2(\Omega)$ est d'intégrale nulle sur Ω , il existe une constante $C > 0$, dépendant uniquement de Ω , et $\mathbf{v} \in (H_0^1(\Omega))^2$ telle que $\text{div}(\mathbf{v}) = -p^\mathfrak{D}$ et

$$\|\mathbf{v}\|_{H^1} \leq C \|p^\mathfrak{D}\|_2. \quad (\text{V.20})$$

On pose $\mathbf{v}^\tau = \mathbb{P}_m^\tau \mathbf{v}$, définie par (IV.4). En particulier, on a $\gamma^\tau(\mathbf{v}^\tau) = 0$. En utilisant le Lemme IV.19, on obtient

$$\|\nabla^\mathfrak{D} \mathbf{v}^\tau\|_2 \leq C \|\mathbf{v}\|_{H^1} \leq C \|p^\mathfrak{D}\|_2. \quad (\text{V.21})$$

La formule de Green (Théorème IV.9) implique que

$$B(\mathbf{u}^\tau, p^\mathfrak{D}; \mathbf{v}^\tau, 0) = (\nabla^\mathfrak{D} \mathbf{u}^\tau : \nabla^\mathfrak{D} \mathbf{v}^\tau)_\mathfrak{D} - (p^\mathfrak{D}, \text{div}^\mathfrak{D}(\mathbf{v}^\tau))_\mathfrak{D}.$$

On applique l'inégalité de Cauchy-Schwarz, ensuite on ajoute et soustrait $\sum_{\mathfrak{D} \in \mathfrak{D}} \int_\mathfrak{D} p^\mathfrak{D} \text{div}(\mathbf{v}(z)) dz$ afin obtenir

$$B(\mathbf{u}^\tau, p^\mathfrak{D}; \mathbf{v}^\tau, 0) \geq -\|\nabla^\mathfrak{D} \mathbf{u}^\tau\|_2 \|\nabla^\mathfrak{D} \mathbf{v}^\tau\|_2 - \sum_{\mathfrak{D} \in \mathfrak{D}} \int_\mathfrak{D} p^\mathfrak{D} \text{div}(\mathbf{v}(z)) dz - \sum_{\mathfrak{D} \in \mathfrak{D}} \int_\mathfrak{D} p^\mathfrak{D} (\text{div}^\mathfrak{D}(\mathbf{v}^\tau) - \text{div}(\mathbf{v}(z))) dz.$$

En utilisant la relation $\text{div}(\mathbf{v}) = -p^\mathfrak{D}$, l'inégalité (V.21) donne

$$B(\mathbf{u}^\tau, p^\mathfrak{D}; \mathbf{v}^\tau, 0) \geq -C \|\nabla^\mathfrak{D} \mathbf{u}^\tau\|_2 \|p^\mathfrak{D}\|_2 + \|p^\mathfrak{D}\|_2^2 - \sum_{\mathfrak{D} \in \mathfrak{D}} \int_\mathfrak{D} p^\mathfrak{D} (\text{div}^\mathfrak{D}(\mathbf{v}^\tau) - \text{div}(\mathbf{v}(z))) dz.$$

La Proposition IV.25 et l'estimation (V.20) impliquent

$$\sum_{\mathfrak{D} \in \mathfrak{D}} \int_\mathfrak{D} p^\mathfrak{D} (\text{div}^\mathfrak{D}(\mathbf{v}^\tau) - \text{div}(\mathbf{v}(z))) dz \leq C |p^\mathfrak{D}|_h \|\mathbf{v}\|_{H^1} \leq C |p^\mathfrak{D}|_h \|p^\mathfrak{D}\|_2.$$

On en déduit que

$$B(\mathbf{u}^\tau, p^\mathfrak{D}; \mathbf{v}^\tau, 0) \geq \|p^\mathfrak{D}\|_2^2 - C \|p^\mathfrak{D}\|_2 \|\nabla^\mathfrak{D} \mathbf{u}^\tau\|_2 - C |p^\mathfrak{D}|_h \|p^\mathfrak{D}\|_2.$$

En utilisant l'inégalité de Young, on obtient l'existence de trois constantes $C_1, C_2, C_3 > 0$, dépendant uniquement de Ω et $\text{reg}(\mathcal{T})$, telles que

$$B(\mathbf{u}^\tau, p^\mathfrak{D}; \mathbf{v}^\tau, 0) \geq C_1 \|p^\mathfrak{D}\|_2^2 - C_2 \|\nabla^\mathfrak{D} \mathbf{u}^\tau\|_2^2 - C_3 |p^\mathfrak{D}|_h^2. \quad (\text{V.22})$$

Etape 3 : La bilinéarité de B , les estimations (V.19) et (V.22) donnent pour tout nombre strictement positif $\xi > 0$:

$$B(\mathbf{u}^\tau, p^\mathfrak{D}; \mathbf{u}^\tau + \xi \mathbf{v}^\tau, p^\mathfrak{D}) \geq (1 - \xi C_2) \|\nabla^\mathfrak{D} \mathbf{u}^\tau\|_2^2 + \xi C_1 \|p^\mathfrak{D}\|_2^2 + (\lambda - \xi C_3) |p^\mathfrak{D}|_h^2. \quad (\text{V.23})$$

On choisit la valeur de $\xi > 0$ suffisamment petite (dépendant uniquement de C_2, λ et C_3) telle que toutes les constantes devant les normes soient strictement positives, cette inégalité (V.23) conduit à l'estimation (V.18). La relation (V.17) est vérifiée pour le couple $\tilde{\mathbf{u}}^\tau = \mathbf{u}^\tau + \xi \mathbf{v}^\tau$ et $\tilde{p}^\mathfrak{D} = p^\mathfrak{D}$, grâce à (V.21) ceci conclut la démonstration. ■

V.3.5 Estimations d'erreur optimale pour le schéma S-DDFV

On applique le théorème de stabilité à la différence entre la projection $\mathfrak{P}_{\mathbf{g}}^{\partial \mathfrak{M}} \mathbb{P}_{\mathbf{c}}^{\mathcal{T}}$ de \mathbf{u} et $\mathbf{u}^{\mathcal{T}}$ et à la différence entre la projection $\mathbb{P}_m^{\mathcal{D}}$ de p et $p^{\mathcal{D}}$ où (\mathbf{u}, p) est la solution exacte du problème de Stokes (V.1) et $(\mathbf{u}^{\mathcal{T}}, p^{\mathcal{D}}) \in (\mathbb{R}^2)^{\mathcal{T}} \times \mathbb{R}^{\mathcal{D}}$ est la solution du schéma S-DDFV (V.2) avec $\lambda > 0$.

Théorème V.13

On suppose que la solution (\mathbf{u}, p) du problème de Stokes (V.1) appartient à $(H^2(\Omega))^2 \times H^1(\Omega)$. Soit $\lambda > 0$ et $(\mathbf{u}^{\mathcal{T}}, p^{\mathcal{D}}) \in (\mathbb{R}^2)^{\mathcal{T}} \times \mathbb{R}^{\mathcal{D}}$ la solution du schéma S-DDFV (V.2). Alors il existe une constante $C > 0$ dépendant uniquement de Ω , $\text{reg}(\mathcal{T})$, λ , $\|\mathbf{u}\|_{H^2}$ et $\|p\|_{H^1}$, telle que

$$\|\nabla \mathbf{u} - \nabla^{\mathcal{D}} \mathbf{u}^{\mathcal{T}}\|_2 \leq C \text{size}(\mathcal{T}),$$

et

$$\|p - p^{\mathcal{D}}\|_2 \leq C \text{size}(\mathcal{T}).$$

Démonstration : Si on pose $\mathbf{e}^{\mathcal{T}} = \mathfrak{P}_{\mathbf{g}}^{\partial \mathfrak{M}} \mathbb{P}_{\mathbf{c}}^{\mathcal{T}} \mathbf{u} - \mathbf{u}^{\mathcal{T}}$ et $e^{\mathcal{D}} = \mathbb{P}_m^{\mathcal{D}} p - p^{\mathcal{D}}$. On rappelle que grâce à (V.5), (V.6) et (V.7), le couple $(\mathbf{e}^{\mathcal{T}}, e^{\mathcal{D}}) \in (\mathbb{R}^2)^{\mathcal{T}} \times \mathbb{R}^{\mathcal{D}}$ est solution de (V.9) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{div}^{\mathcal{T}}(-\nabla^{\mathcal{D}} \mathbf{e}^{\mathcal{T}} + e^{\mathcal{D}} \text{Id}) = \mathbf{R}_{\mathcal{T}}, \\ \text{div}^{\mathcal{D}}(\mathbf{e}^{\mathcal{T}}) + \mu \text{size}(\mathcal{T}) e^{\mathcal{D}} - \lambda d_{\mathcal{D}}^2 \Delta^{\mathcal{D}} e^{\mathcal{D}} = R_{\mathcal{D}}, \\ \gamma^{\mathcal{T}}(\mathbf{e}^{\mathcal{T}}) = 0, \\ \sum_{\kappa \in \mathfrak{M}} m_{\kappa} \mathbf{e}_{\kappa} - \sum_{\kappa^* \in \mathfrak{M}^* \cup \partial \mathfrak{M}^*} m_{\kappa^*} \mathbf{e}_{\kappa^*} = \sum_{\kappa \in \mathfrak{M}} m_{\kappa} (\mathbb{P}_{\mathbf{c}}^{\mathcal{T}} \mathbf{u})_{\kappa} - \sum_{\kappa^* \in \mathfrak{M}^* \cup \partial \mathfrak{M}^*} m_{\kappa^*} (\mathbb{P}_{\mathbf{c}}^{\mathcal{T}} \mathbf{u})_{\kappa^*}, \\ \sum_{\mathcal{D} \in \mathcal{D}} m_{\mathcal{D}} e^{\mathcal{D}} = 0, \end{array} \right.$$

où $\mathbf{R}_{\mathcal{T}} = ((\mathbf{R}_{\kappa})_{\kappa \in \mathfrak{M}}, (\mathbf{R}_{\kappa^*})_{\kappa^* \in \mathfrak{M}^* \cup \partial \mathfrak{M}^*})$ et $R_{\mathcal{D}} = (R_{\mathcal{D}})_{\mathcal{D} \in \mathcal{D}}$ avec

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{\kappa} &= \frac{1}{m_{\kappa}} \sum_{\mathcal{D} \in \mathcal{D}_{\kappa}} m_{\sigma} \mathbf{R}_{\sigma, \kappa}^{\mathbf{u}} + \frac{1}{m_{\kappa}} \sum_{\mathcal{D} \in \mathcal{D}_{\kappa}} m_{\sigma} \mathbf{R}_{\sigma, \kappa}^p, \quad \forall \kappa \in \mathfrak{M}, \\ \mathbf{R}_{\kappa^*} &= \frac{1}{m_{\kappa^*}} \sum_{\mathcal{D} \in \mathcal{D}_{\kappa^*}} m_{\sigma^*} \mathbf{R}_{\sigma^*, \kappa^*}^{\mathbf{u}} + \frac{1}{m_{\kappa^*}} \sum_{\mathcal{D} \in \mathcal{D}_{\kappa^*}} m_{\sigma^*} \mathbf{R}_{\sigma^*, \kappa^*}^p, \quad \forall \kappa^* \in \mathfrak{M}^*, \\ \mathbf{R}_{\kappa^*} &= \frac{1}{m_{\kappa^*}} \sum_{\mathcal{D} \in \mathcal{D}_{\kappa^*}} m_{\sigma^*} (\mathbf{R}_{\sigma^*, \kappa^*}^{\mathbf{u}} + \mathbf{R}_{\sigma^*, \kappa^*}^p) + \frac{1}{m_{\kappa^*}} \sum_{\mathcal{D}_{\sigma, \sigma^*} \in \mathcal{D}_{\kappa^*} \cap \mathcal{D}_{ext}} d_{\kappa^*, \mathcal{L}} (\mathbf{R}_{\kappa^*, \mathcal{L}}^{\mathbf{u}} + \mathbf{R}_{\kappa^*, \mathcal{L}}^p), \quad \forall \kappa^* \in \partial \mathfrak{M}^*, \\ R_{\mathcal{D}} &= \text{div}^{\mathcal{D}}(\mathfrak{P}_{\mathbf{g}}^{\partial \mathfrak{M}} \mathbb{P}_{\mathbf{c}}^{\mathcal{T}} \mathbf{u}) + \mu \text{size}(\mathcal{T}) \mathbb{P}_m^{\mathcal{D}} p - \lambda d_{\mathcal{D}}^2 \Delta^{\mathcal{D}} \mathbb{P}_m^{\mathcal{D}} p, \quad \forall \mathcal{D} \in \mathcal{D}. \end{aligned}$$

Le Théorème V.12 implique qu'il existe $\tilde{\mathbf{e}}^{\mathcal{T}} \in (\mathbb{R}^2)^{\mathcal{T}}$ avec $\gamma^{\mathcal{T}}(\tilde{\mathbf{e}}^{\mathcal{T}}) = 0$, $\tilde{e}^{\mathcal{D}} \in \mathbb{R}^{\mathcal{D}}$ et $C > 0$ tels que :

$$\|\nabla^{\mathcal{D}} \tilde{\mathbf{e}}^{\mathcal{T}}\|_2 + \|\tilde{e}^{\mathcal{D}}\|_2 \leq C (\|\nabla^{\mathcal{D}} \mathbf{e}^{\mathcal{T}}\|_2 + \|e^{\mathcal{D}}\|_2), \quad (\text{V.24})$$

et

$$\|\nabla^{\mathcal{D}} \mathbf{e}^{\mathcal{T}}\|_2^2 + \|e^{\mathcal{D}}\|_2^2 \leq CB(\mathbf{e}^{\mathcal{T}}, e^{\mathcal{D}}; \tilde{\mathbf{e}}^{\mathcal{T}}, \tilde{e}^{\mathcal{D}}). \quad (\text{V.25})$$

Grâce à la Définition V.3 de B et à (V.9), on a $B(\mathbf{e}^{\mathcal{T}}, e^{\mathcal{D}}; \tilde{\mathbf{e}}^{\mathcal{T}}, \tilde{e}^{\mathcal{D}}) = \llbracket \mathbf{R}^{\mathcal{T}}, \tilde{\mathbf{e}}^{\mathcal{T}} \rrbracket_{\mathcal{T}} + (R^{\mathcal{D}}, \tilde{e}^{\mathcal{D}})_{\mathcal{D}}$. En faisant de la même manière que dans la démonstration du Théorème V.4 pour estimer B (cf (V.13)) en remplaçant $\mathbf{e}^{\mathcal{T}}$ par $\tilde{\mathbf{e}}^{\mathcal{T}}$ et $e^{\mathcal{D}}$ par $\tilde{e}^{\mathcal{D}}$, (V.25) devient

$$\begin{aligned} \|\nabla^{\mathcal{D}} \mathbf{e}^{\mathcal{T}}\|_2^2 + \|e^{\mathcal{D}}\|_2^2 &\leq C |B(\mathbf{e}^{\mathcal{T}}, e^{\mathcal{D}}; \tilde{\mathbf{e}}^{\mathcal{T}}, \tilde{e}^{\mathcal{D}})| \leq C \|\nabla^{\mathcal{D}} \tilde{\mathbf{e}}^{\mathcal{T}}\|_2 [\|\mathbf{R}_{\sigma}^{\mathbf{u}}\|_2 + \|\mathbf{R}_{\sigma^*}^{\mathbf{u}}\|_2 + \|\mathbf{R}_{\sigma}^p\|_2 + \|\mathbf{R}_{\sigma^*}^p\|_2] \\ &\quad + C \|\nabla^{\mathcal{D}} \tilde{\mathbf{e}}^{\mathcal{T}}\|_2 \left[\left(\sum_{\mathcal{D} \in \mathcal{D}_{ext}} m_{\mathcal{D}} |\mathbf{R}_{\kappa^*, \mathcal{L}}^{\mathbf{u}}|^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_{\mathcal{D} \in \mathcal{D}_{ext}} m_{\mathcal{D}} |\mathbf{R}_{\kappa^*, \mathcal{L}}^p|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right] \\ &\quad + C \text{size}(\mathcal{T}) \|\tilde{e}^{\mathcal{D}}\|_2 (\|\mathbf{u}\|_{H^2} + \|p\|_{H^1}). \end{aligned}$$

Finalement, en utilisant (V.24), on obtient

$$\begin{aligned} \|\nabla^{\mathfrak{D}} \mathbf{e}^{\tau}\|_2^2 + \|e^{\mathfrak{D}}\|_2^2 &\leq C(\|\mathbf{R}_{\sigma}^{\mathbf{u}}\|_2 + \|\mathbf{R}_{\sigma^*}^{\mathbf{u}}\|_2 + \|\mathbf{R}_{\sigma}^p\|_2 + \|\mathbf{R}_{\sigma^*}^p\|_2)(\|\nabla^{\mathfrak{D}} \mathbf{e}^{\tau}\|_2 + \|e^{\mathfrak{D}}\|_2) \\ &\quad + C(\|\nabla^{\mathfrak{D}} \mathbf{e}^{\tau}\|_2 + \|e^{\mathfrak{D}}\|_2) \left[\left(\sum_{\mathcal{D} \in \mathfrak{D}_{ext}} m_{\mathcal{D}} |\mathbf{R}_{\kappa^*, \mathcal{L}}^{\mathbf{u}}|^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_{\mathcal{D} \in \mathfrak{D}_{ext}} m_{\mathcal{D}} |\mathbf{R}_{\kappa^*, \mathcal{L}}^p|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right] \\ &\quad + C \text{size}(\mathcal{T}) (\|\mathbf{u}\|_{H^2} + \|p\|_{H^1}) (\|\nabla^{\mathfrak{D}} \mathbf{e}^{\tau}\|_2 + \|e^{\mathfrak{D}}\|_2). \end{aligned}$$

Les Lemmes V.8, V.9, V.10 et V.11 impliquent

$$\|\nabla^{\mathfrak{D}} \mathbf{e}^{\tau}\|_2^2 + \|e^{\mathfrak{D}}\|_2^2 \leq C \text{size}(\mathcal{T})^2. \quad (\text{V.26})$$

Estimation de $\|\nabla \mathbf{u} - \nabla^{\mathfrak{D}} \mathbf{u}^{\tau}\|_2$: On a

$$\|\nabla \mathbf{u} - \nabla^{\mathfrak{D}} \mathbf{u}^{\tau}\|_2 \leq \|\nabla \mathbf{u} - \nabla^{\mathfrak{D}} \mathbb{P}_{\mathbf{c}}^{\tau} \mathbf{u}\|_2 + \|\nabla^{\mathfrak{D}} \mathbb{P}_{\mathbf{c}}^{\tau} \mathbf{u} - \nabla^{\mathfrak{D}} \mathfrak{P}_{\mathbf{g}}^{\mathfrak{D}} \mathbb{P}_{\mathbf{c}}^{\tau} \mathbf{u}\|_2 + \|\nabla^{\mathfrak{D}} \mathfrak{P}_{\mathbf{g}}^{\mathfrak{D}} \mathbb{P}_{\mathbf{c}}^{\tau} \mathbf{u} - \nabla^{\mathfrak{D}} \mathbf{u}^{\tau}\|_2.$$

Finalement, les Lemmes IV.16 et IV.21 et la relation (V.26) donnent l'estimation sur $\|\nabla \mathbf{u} - \nabla^{\mathfrak{D}} \mathbf{u}^{\tau}\|_2$.

Estimation de $\|p - p^{\mathfrak{D}}\|_2$: On a

$$\|p - p^{\mathfrak{D}}\|_2 \leq \|p - \mathbb{P}_m^{\mathfrak{D}} p\|_2 + \|\mathbb{P}_m^{\mathfrak{D}} p - p^{\mathfrak{D}}\|_2.$$

On conclut grâce à la Proposition IV.24 et (V.26). ■

V.4 Tests numériques

On présente quelques résultats numériques obtenus sur le domaine $\Omega =]0, 1[^2$. On compare les schémas (US), (BPS) et (PS) sur différents tests. Le premier est celui des tourbillons de Green-Taylor sur un maillage rectangulaire localement raffiné (voir la Figure V.2). Dans le second test, la solution exacte est polynomiale sur un maillage de quadrangles très déformés (voir la Figure V.3). Le dernier test est celui de la cavité entraînée sur un maillage triangulaire (voir la Figure V.5).

Pour les deux premiers cas tests, on donne l'expression de la solution exacte (\mathbf{u}, p) desquelles on déduit le terme source \mathbf{f} et la condition aux bords \mathbf{g} pour que (\mathbf{u}, p) soit solution du problème (V.1).

On rappelle que pour illustrer l'estimation d'erreur, la famille de maillages est obtenue en raffinant successivement et uniformément le maillage original. Afin de mettre en évidence le processus de raffinement choisi, on présente sur les Figures V.1(a) et V.3(a) le maillage primal original et sur les Figures V.1(b) et V.3(b) le maillage primal obtenu après le processus de raffinement. Plus précisément, la famille de maillages, correspondant aux Figures V.2 et V.3, est obtenue en divisant chaque arête primale en deux. On précise que les centres $(x_{\kappa})_{\kappa}$ sont les barycentres des mailles primales et que l'on a utilisé le maillage dual direct pour tous les tests numériques.

On définit la projection centrée sur \mathfrak{D} :

$$\mathbb{P}_{\mathbf{c}}^{\mathfrak{D}} p = (p(x_{\mathcal{D}}))_{\mathcal{D} \in \mathfrak{D}}.$$

Dans les Figures V.2 et V.3, on représente, pour chacun des schémas, la norme L^2 de l'erreur de la pression $\frac{\|\mathbb{P}_{\mathbf{c}}^{\mathfrak{D}} p - p^{\mathfrak{D}}\|_2}{\|\mathbb{P}_{\mathbf{c}}^{\mathfrak{D}} p\|_2}$, du gradient de vitesse $\frac{\|\nabla^{\mathfrak{D}} \mathbb{P}_{\mathbf{c}}^{\tau} \mathbf{u} - \nabla^{\mathfrak{D}} \mathbf{u}^{\tau}\|_2}{\|\nabla^{\mathfrak{D}} \mathbb{P}_{\mathbf{c}}^{\tau} \mathbf{u}\|_2}$ et de la vitesse $\frac{\|\mathbb{P}_{\mathbf{c}}^{\tau} \mathbf{u} - \mathbf{u}^{\tau}\|_2}{\|\mathbb{P}_{\mathbf{c}}^{\tau} \mathbf{u}\|_2}$ respectivement, en fonction du pas du maillage $\text{size}(\mathcal{T})$ en échelle logarithmique. Les ordres de convergence indiqués sur les Figures V.2 et V.3 sont obtenus à l'aide d'une approximation par les moindres carrés des données calculées.

V.4.1 Test 1 - Tourbillons de Green-Taylor

La solution exacte est donnée par

$$\mathbf{u}(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \sin(2\pi x) \cos(2\pi y) \\ -\frac{1}{2} \cos(2\pi x) \sin(2\pi y) \end{pmatrix}, \quad p(x, y) = \frac{1}{8} \cos(4\pi x) \sin(4\pi y).$$

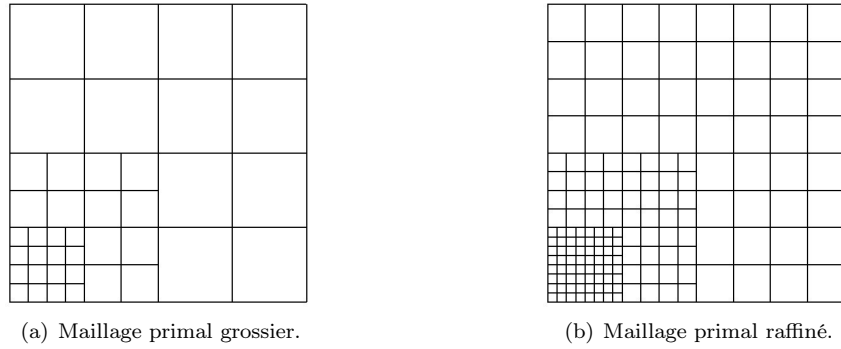


FIG. V.1 – Un maillage rectangulaire localement raffiné.

On considère le maillage primal localement raffiné (voir la Figure V.1). On rappelle que le schéma (US) est bien posé sur un tel maillage. La Figure V.2 compare les normes L^2 des erreurs obtenues avec les trois schémas (US), (BPS) et (PS), pour la pression, la vitesse et le gradient de vitesse. On remarque que les ordres de convergence obtenus dans ce test sont plus grand que les ordres théoriques donnés par les Théorèmes V.4 et V.13. En effet, on observe une super convergence en norme L^2 pour la vitesse qui est classique en volumes finis. On remarque également que l'ordre de convergence n'est pas sensible à la présence de mailles localement raffinées non-conformes.

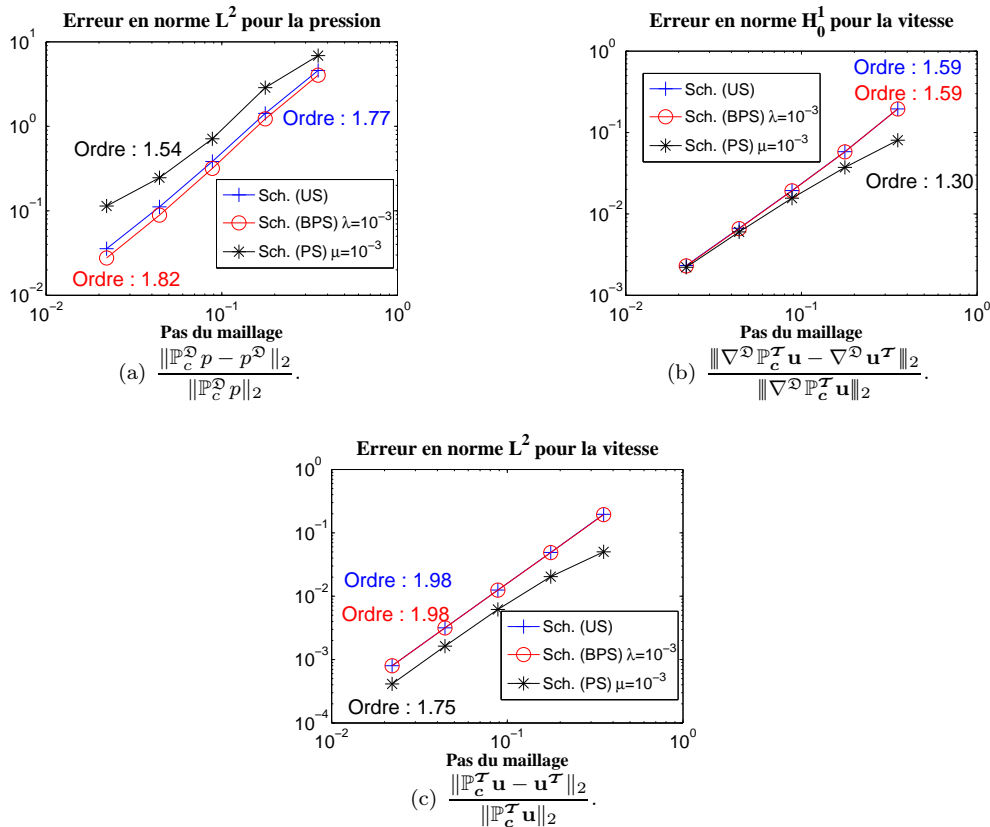


FIG. V.2 – Tourbillons de Green-Taylor sur le maillage rectangulaire localement raffiné de la Figure V.1.

Pour le schéma (PS), l'ordre de convergence en norme L^2 pour la vitesse et le gradient de vitesse est plus petit que pour les deux autres schémas même si le schéma (PS) semble plus précis pour la vitesse en norme L^2 . Pour la pression, le schéma (PS) semble avoir une précision légèrement plus faible que les deux autres schémas.

Les résultats obtenus pour les schémas (BPS) et (US) sont essentiellement identiques en ce qui concerne la vitesse. Toutefois, pour la pression, le schéma (BPS) est plus précis que le schéma (US).

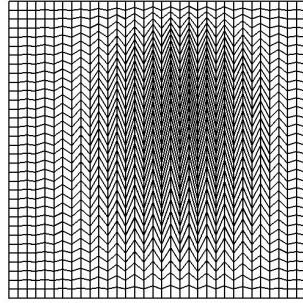
En conséquent, la stabilisation provoque un gain de précision sur la vitesse pour le schéma (PS), ou sur la pression pour le schéma (BPS). Au niveau de l'implémentation, le schéma (PS) est d'une extrême simplicité comparé à l'implémentation du schéma (BPS). Néanmoins, à cause de la détérioration de la pression, le schéma (PS) ne semble pas apporter d'importantes améliorations. C'est pourquoi dans le test suivant, on compare uniquement les schémas (BPS) et (US).

V.4.2 Test 2 - Solutions polynomiales

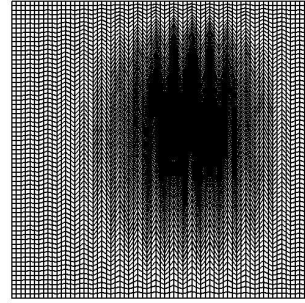
Dans ce test, on choisit

$$\mathbf{u}(x, y) = \begin{pmatrix} 1000x^2(1-x)^2 2y(1-y)(1-2y) \\ -1000y^2(1-y)^2 2x(1-x)(1-2x) \end{pmatrix}, \quad p(x, y) = x^2 + y^2 - \frac{2}{3}.$$

On utilise un maillage de quadrangles déformés (voir la Figure V.3(a)). Pour un tel maillage, l'existence et l'unicité des solutions du schéma (US) est toujours ouverte. Néanmoins, numériquement, le schéma semble bien posé et il converge.



(a) Maillage primal grossier.



(b) Maillage primal raffiné.

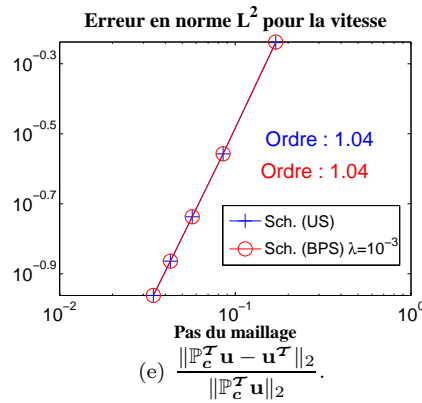
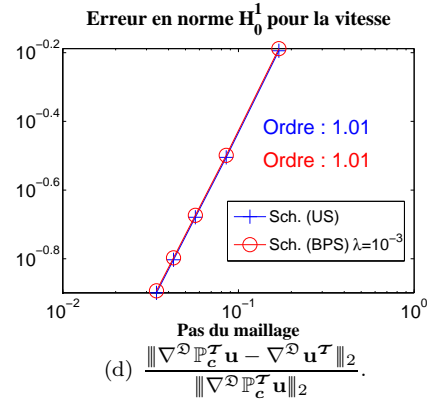
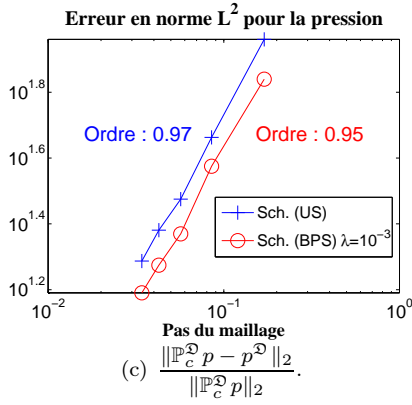


FIG. V.3 – Fonctions polynomiales sur un maillage quadrangle déformé.

Les Figures V.3(c), V.3(d) et V.3(e) comparent les normes L^2 des erreurs obtenues avec les deux schémas (US) et (BPS), pour la pression, la vitesse et le gradient de vitesse. Comme dans le premier test, les deux schémas donnent essentiellement les mêmes résultats pour la vitesse, et le schéma (BPS) est plus précis pour la pression. Tel que prédit par le Théorème V.13, on observe de l'ordre 1 pour le schéma (BPS) et pour toutes les normes considérées, ceci semble optimal. Il faut remarquer que sur ce maillage primal de quadrangles déformés, on n'observe plus la super-convergence de la vitesse en norme L^2 .

V.4.3 Test 3 - Cavité entr  n  

On considère un écoulement dans une cavité carré dont la paroi du haut est défilante à vitesse constante $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, les autres étant statiques. Ceci impose le déplacement du fluide à vitesse constante $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ sur le bord situé en haut du domaine. On ne connaît pas la solution analytique de ce problème qui s'écrit :

$$\begin{cases} \operatorname{div}(-10^{-4}\nabla \mathbf{u} + p\operatorname{Id}) = 0 & \text{dans } \Omega, \\ \operatorname{div}(\mathbf{u}) = 0 & \text{dans } \Omega, \\ \mathbf{u} = \begin{pmatrix} u \\ 0 \end{pmatrix}, & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

avec

$$u(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } y = 1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On utilise un maillage constitué de triangles (voir la Figure V.4). Les caractéristiques de ce maillage sont

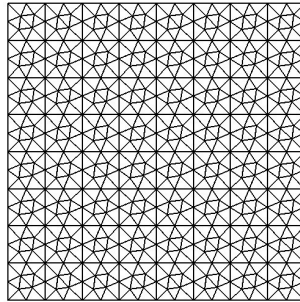


FIG. V.4 – Maillage primal avec 896 triangles.

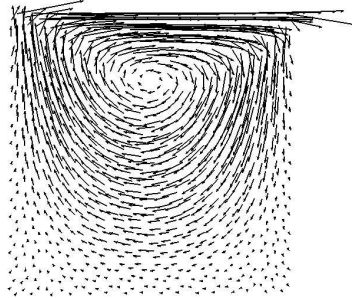
données dans le Tableau V.1. Pour un tel maillage, le schéma (US) possède une unique solution. On montre sur

Nombre de triangles	Pas du maillage	Nombre d'inconnues
896	6.25e-2	1441

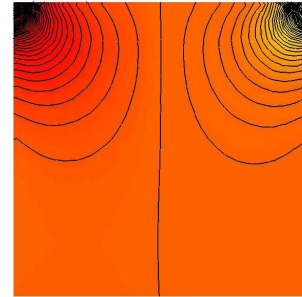
TAB. V.1 – Caractéristiques du maillage V.4.

la Figure V.5 le champ de vitesse et les lignes de niveaux de la pression pour les trois schémas (US), (BPS) avec $\lambda = 10^{-3}$ et (PS) avec $\mu = 10^{-3}$. Les résultats sont en accord avec [aKKCSK05]. On constate encore une fois que le schéma (PS) est plus précis pour le champ de vitesse que les deux autres schémas mais qu'il détériore la pression dont les lignes de niveaux ne sont plus symétriques. Les schémas (US) et (BPS) donnent des résultats très semblables avec une pression symétrique.

Dans la Figure V.6, on s'intéresse aux profils de la vitesse. Sur la colonne de gauche (resp. droite) de la Figure V.6, on observe le profil de la première composante de la vitesse \mathbf{u}_1 (resp. deuxième composante de la vitesse \mathbf{u}_2) en fonction de y en $x = 0.5$ (resp. x en $y = 0.5$). Ces profils sont obtenus pour les trois schémas (US), (BPS) avec $\lambda = 10^{-3}$ et (PS) avec $\mu = 10^{-3}$, pour deux maillages : le premier est le maillage de la Figure V.4, le second est le premier maillage raffiné deux fois. Ainsi pour le premier maillage, on a 17 points le long de $\{x = 0.5\}$ et de $\{y = 0.5\}$ et pour le second, on a 65 points. Ces profils correspondent très bien à ceux donnés



(a) Le schéma (US).



(b) Le schéma (US).

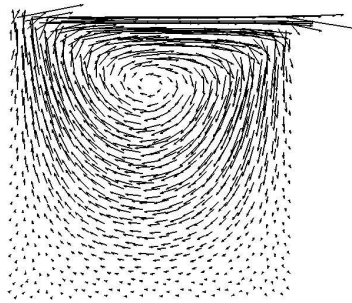
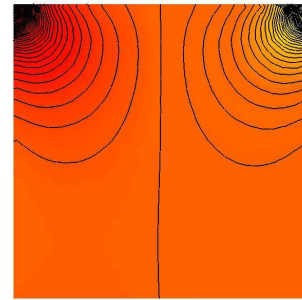
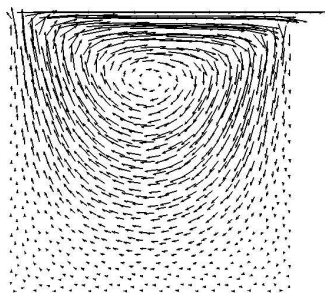
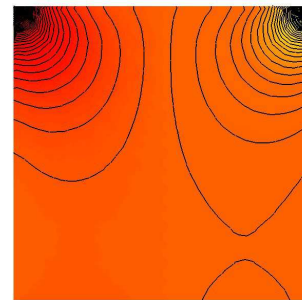
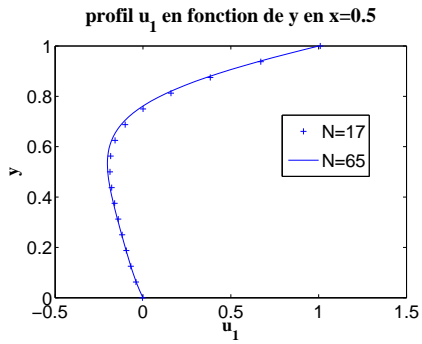
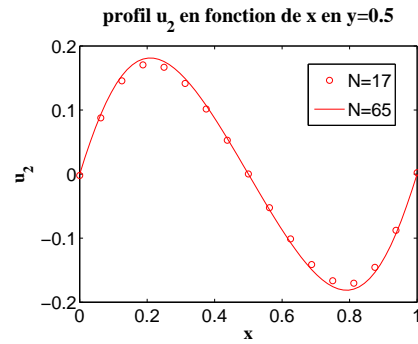
(c) Le schéma (BPS) avec $\lambda = 10^{-3}$.(d) Le schéma (BPS) avec $\lambda = 10^{-3}$.(e) Le schéma (PS) avec $\mu = 10^{-3}$.(f) Le schéma (PS) avec $\mu = 10^{-3}$.

FIG. V.5 – Cavité entrain e sur le maillage de la Figure V.4. (A gauche) Le champ de vitesse. (A droite) Les lignes de niveaux de la pression.



(a) Le schéma (US).



(b) Le schéma (US).

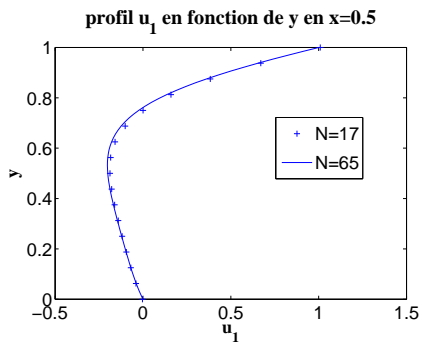
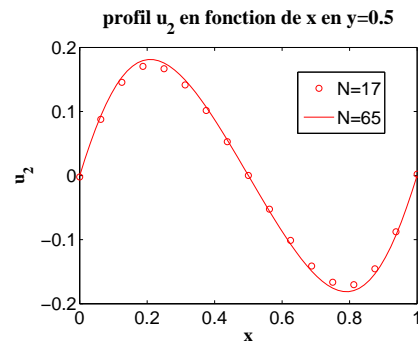
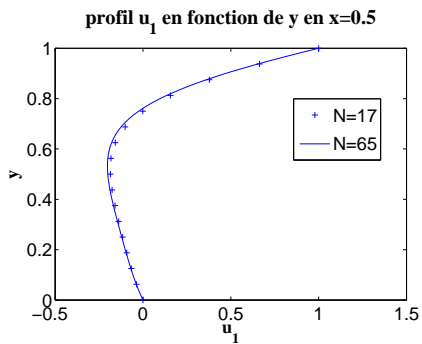
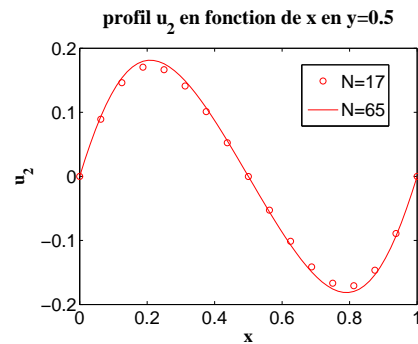
(c) Le schéma (BPS) $\lambda = 10^{-3}$.(d) Le schéma (BPS) $\lambda = 10^{-3}$.(e) Le schéma (PS) $\mu = 10^{-3}$.(f) Le schéma (PS) $\mu = 10^{-3}$.

FIG. V.6 – Cavité entraînée sur les maillages de la Figure V.4.

par exemple dans [DSC⁺06] pour les trois schémas. De plus, on remarque que le premier maillage donne une approximation très raisonnable des profils. On constate néanmoins que la première composante de la vitesse au point $(x = 0.5, y = 1)$ est plus grande que 1 pour les deux schémas (US) et (BPS). Ces valeurs sont données par le tableau V.2. Ceci vient des conditions de Dirichlet faibles.

Maillage	Le schéma (US)	Le schéma (BPS) $\lambda = 10^{-3}$	Le schéma (PS) $\mu = 10^{-3}$
Premier maillage (N=17)	1.009185	1.009185	1
Second maillage (N=65)	1.001075	1.001075	1

TAB. V.2 – La valeur de $\mathbf{u}_1(0.5, 1)$.

V.4.4 Quelques remarques sur l'implémentation

Pour assembler la matrice correspondant au schéma S-DDFV (V.2), on travaille encore diamant par diamant comme dans la Section II.10.2. On adopte la même structure `mesh` décrite dans la Section II.10.2. On commence par réécrire le schéma (V.2) en mettant en évidence les flux numériques :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } \mathbf{u}^\tau \in (\mathbb{R}^2)^\tau \text{ et } p^\mathfrak{D} \in \mathbb{R}^\mathfrak{D} \text{ tels que,} \\ \forall \kappa \in \mathfrak{M}, \quad \sum_{\mathfrak{D}_{\sigma,\sigma^*} \in \mathfrak{D}_\kappa} \mathbf{F}_{\kappa,\mathfrak{D}_{\sigma,\sigma^*}}(\mathbf{u}^\tau, p^\mathfrak{D}) = m_\kappa \mathbf{f}_\kappa, \\ \forall \kappa^* \in \mathfrak{M}^* \cup \partial\mathfrak{M}^*, \quad \sum_{\mathfrak{D}_{\sigma,\sigma^*} \in \mathfrak{D}_{\kappa^*}} \mathbf{F}_{\kappa^*,\mathfrak{D}_{\sigma,\sigma^*}}(\mathbf{u}^\tau, p^\mathfrak{D}) = m_{\kappa^*} \mathbf{f}_{\kappa^*}, \\ \quad \text{avec } \mathbf{F}_{\kappa,\mathfrak{D}_{\sigma,\sigma^*}}(\mathbf{u}^\tau, p^\mathfrak{D}) = m_\sigma (-\nabla^\mathfrak{D} \mathbf{u}^\tau + p^\mathfrak{D} \text{Id}) \cdot \vec{\mathbf{n}}_{\sigma\kappa}, \text{ si } \mathfrak{D}_{\sigma,\sigma^*} \in \mathfrak{D}_\kappa, \\ \quad \text{avec } \mathbf{F}_{\kappa^*,\mathfrak{D}_{\sigma,\sigma^*}}(\mathbf{u}^\tau, p^\mathfrak{D}) = m_{\sigma^*} (-\nabla^\mathfrak{D} \mathbf{u}^\tau + p^\mathfrak{D} \text{Id}) \cdot \vec{\mathbf{n}}_{\sigma^*\kappa^*}, \text{ si } \mathfrak{D}_{\sigma,\sigma^*} \in \mathfrak{D}_{\kappa^*}, \\ \forall \mathfrak{D} \in \mathfrak{D}, \quad \text{div}^\mathfrak{D}(\mathbf{u}^\tau) + \mu \text{size}(\mathcal{T}) p^\mathfrak{D} - \lambda d_\mathfrak{D}^2 \Delta^\mathfrak{D} p^\mathfrak{D} = 0, \\ \forall \sigma \in \partial\mathfrak{M}, \quad \gamma_\sigma(\mathbf{u}^\tau) = \mathbf{g}_\sigma, \\ \sum_{\kappa \in \mathfrak{M}} m_\kappa \mathbf{u}_\kappa - \sum_{\kappa^* \in \mathfrak{M}^* \cup \partial\mathfrak{M}^*} m_{\kappa^*} \mathbf{u}_{\kappa^*} = 0, \\ \sum_{\mathfrak{D} \in \mathfrak{D}} m_\mathfrak{D} p^\mathfrak{D} = 0. \end{array} \right.$$

Grâce à la Définition IV.1 du gradient discret, pour chaque diamant, on peut écrire les flux intervenant dans les équations du bilan de quantité de mouvement de la manière suivante

$$\mathbf{F}_{\kappa,\mathfrak{D}_{\sigma,\sigma^*}}(\mathbf{u}^\tau, p^\mathfrak{D}) = \text{flux_NN}^*(\mathbf{u}_\kappa - \mathbf{u}_\mathfrak{L}) + \text{flux_NSN}^*(\mathbf{u}_{\kappa^*} - \mathbf{u}_\mathfrak{L}^*) + \text{flux_N}^* p^\mathfrak{D},$$

$$\mathbf{F}_{\kappa^*,\mathfrak{D}_{\sigma,\sigma^*}}(\mathbf{u}^\tau, p^\mathfrak{D}) = \text{flux_NNS}^*(\mathbf{u}_\kappa - \mathbf{u}_\mathfrak{L}) + \text{flux_NSNS}^*(\mathbf{u}_{\kappa^*} - \mathbf{u}_\mathfrak{L}^*) + \text{flux_NS}^* p^\mathfrak{D},$$

avec

$$\text{flux_NN} = \frac{m_\sigma^2}{2m_\mathfrak{D}}, \quad \text{flux_NNS} = \text{flux_NSN} = \frac{m_\sigma m_{\sigma^*}}{2m_\mathfrak{D}} \vec{\mathbf{n}}_{\sigma\kappa} \cdot \vec{\mathbf{n}}_{\sigma^*\kappa^*}, \quad \text{flux_NSNS} = \frac{m_{\sigma^*}^2}{2m_\mathfrak{D}},$$

$$\text{flux_N} = m_\sigma \vec{\mathbf{n}}_{\sigma\kappa}, \quad \text{flux_NS} = m_{\sigma^*} \vec{\mathbf{n}}_{\sigma^*\kappa^*}.$$

Pour l'équation de conservation de la masse sur les diamants, on a tout d'abord

$$\text{div}^\mathfrak{D} \mathbf{u}^\tau + \mu \text{size}(\mathcal{T}) p^\mathfrak{D} = \frac{1}{2m_\mathfrak{D}} \text{flux_N} \cdot (\mathbf{u}_\kappa - \mathbf{u}_\mathfrak{L}) + \frac{1}{2m_\mathfrak{D}} \text{flux_NS} \cdot (\mathbf{u}_{\kappa^*} - \mathbf{u}_\mathfrak{L}^*) + \mu \text{size}(\mathcal{T}) p^\mathfrak{D},$$

ensuite on doit connaître les diamants voisins pour la seconde stabilisation

$$-\lambda d_\mathfrak{D}^2 \Delta^\mathfrak{D} p^\mathfrak{D} = \frac{2\lambda \text{size}(\mathcal{T})^2}{m_\mathfrak{D}} \sum_{\substack{\mathfrak{D}' \in \mathfrak{D} \\ \mathfrak{D} \cap \mathfrak{D}' \neq \emptyset}} (p^\mathfrak{D} - p^{\mathfrak{D}'}).$$

En fait, dans la structure `mesh`, on rajoute l'information des voisins d'un diamant. Pour le diamant numéro \mathbf{k} , on a une liste d'au plus 4 éléments contenant les numéros de ces voisins `mesh.diamants(k, _Num_Vois)`. Il faut quand même faire attention aux deux dernières équations, sur l'intégrale de pression et celle sur la vitesse. En effet, il faut remplacer une équation sur l'une des mailles duales (resp. sur un diamant) par l'équation d'égalité des intégrales de vitesse (resp. de pression).

V.5 Conclusions

Dans ce chapitre, on a présenté un schéma DDFV stabilisé (V.2), bien posé pour des maillages généraux, pour le problème de Stokes avec des conditions aux bords de type Dirichlet. On a obtenu une estimation d'erreur en norme L^2 d'ordre 1 pour le gradient de vitesse et pour la pression grâce à la stabilisation de type Brezzi-Pitkäranta. Notez que l'on n'a pas de résultat sur la norme L^2 de la vitesse, ceci à cause des conditions au bord imposées faiblement. Cette restriction sera levée au chapitre suivant dans un cadre plus général en modifiant cette façon de prendre en compte les conditions au bord dans le schéma.

Numériquement, on a comparé les trois schémas, le schéma (US) non stabilisé, le schéma (PS) stabilisé avec un terme d'ordre 0 en pression et le schéma (BPS) stabilisé avec un terme d'ordre 2 en pression de type Brezzi-Pitkäranta. Le schéma (US), pour lequel on n'a aucun résultat théorique, se comporte de la même manière que le schéma (BPS). Au niveau de l'implémentation, le schéma (PS) est d'une extrême simplicité comparé à l'implémentation du schéma (BPS). Néanmoins, on observe que les résultats en pression pour le schéma (BPS) sont bien meilleurs que pour le schéma (PS). C'est pourquoi dans les chapitres suivants, on s'intéresse uniquement à la stabilisation de type Brezzi-Pitkäranta qui apporte énormément au niveau théorique grâce aux résultats de stabilité du schéma (voir Théorème V.12).

Chapitre VI

Le problème de Stokes avec une viscosité variable régulière

L'objectif de ce chapitre¹ est d'approcher par une méthode DDFV la solution du problème suivant :

$$\begin{aligned} \text{Trouver } \mathbf{u} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2 \text{ une vitesse et } p : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ une pression telles que} \\ \operatorname{div}(-2\eta(x)\mathbf{D}\mathbf{u} + p\operatorname{Id}) = \mathbf{f}, \quad \text{dans } \Omega, \\ \operatorname{div}(\mathbf{u}) = 0, \quad \text{dans } \Omega, \\ \mathbf{u} = \mathbf{g}, \quad \text{sur } \partial\Omega, \quad \int_{\Omega} p(x)dx = 0. \end{aligned} \quad (\text{VI.1})$$

où $\mathbf{D}\mathbf{u} = \frac{1}{2}(\nabla\mathbf{u} + {}^t\nabla\mathbf{u})$ est la partie symétrique du gradient de vitesse, la viscosité η appartient à $L^\infty(\Omega)$ et elle est supposée lipschitzienne sur tout le domaine $\overline{\Omega}$: il existe trois constantes $C_\eta, \underline{C}_\eta, \overline{C}_\eta > 0$ telles que

$$\underline{C}_\eta \leq \eta(x) \leq \overline{C}_\eta, \quad \text{pour presque tout } x \in \Omega, \quad (\text{VI.2})$$

et

$$|\eta(x) - \eta(x')| \leq C_\eta |x - x'|, \quad \forall x, x' \in \overline{\Omega}. \quad (\text{VI.3})$$

On travaille maintenant avec une viscosité variable mais régulière, ceci généralise le chapitre précédent. Dans ce chapitre, on s'intéresse au terme de stabilisation de type Brezzi-Pitkäranta uniquement et à des conditions aux bords de Dirichlet fortes. On commence par présenter le schéma DDFV stabilisé (VI.4) correspondant au problème (VI.1). La présence de la partie symétrique du gradient de vitesse $\mathbf{D}\mathbf{u}$ impose l'obtention d'une inégalité de Korn discrète (voir Théorème VI.4). Comme dans le chapitre précédent, grâce à la stabilisation de type Brezzi-Pitkäranta, on peut montrer la stabilité du schéma (VI.4) (voir Section VI.6) et en particulier le caractère bien posé du schéma (VI.4) pour des maillages généraux (voir Théorème VI.9). Les résultats importants de ce chapitre sont les estimations d'erreurs (voir Théorème VI.10) d'ordre 1 en norme L^2 pour le gradient de vitesse, pour la pression et pour la vitesse. Ces estimations sont illustrées par les tests numériques (voir Section VI.6). Dans les deux derniers tests, on considère une viscosité discontinue, afin de mettre en évidence la détérioration de l'ordre de convergence du schéma (VI.4) dans ces cas là. En effet, le schéma est encore convergent mais plus d'ordre 1. Dans le chapitre suivant, on présente un schéma modifié pour regagner l'ordre 1. Le présent chapitre a donné lieu à une publication dans *Num. Methods for PDEs* [Kre10b].

VI.1 Principe du schéma DDFV pour le problème de Stokes

Le principe de la méthode est le suivant : on intègre le bilan de quantité de mouvement du problème (VI.1) sur les mailles primales intérieures \mathfrak{M} et sur les mailles duales intérieures \mathfrak{M}^* uniquement. L'équation du bilan

¹Un aide mémoire rassemblant les notations de ce chapitre est disponible page 243.

de masse est directement approchée sur les diamants \mathfrak{D} en utilisant un terme de stabilisation de type Brezzi-Pitkäranta. Contrairement au chapitre précédent, on impose la condition de Dirichlet sur les mailles primales et duales du bord $\partial\mathfrak{M} \cup \partial\mathfrak{M}^*$. Finalement l'intégrale de la pression doit être nulle. Le schéma DDFV du problème (VI.1) s'écrit alors

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } \mathbf{u}^\tau \in \mathbb{E}_{\mathbf{g}} \text{ et } p^\mathfrak{D} \in \mathbb{R}^\mathfrak{D} \text{ tels que,} \\ \mathbf{div}^\mathfrak{M}(-2\eta^\mathfrak{D} \mathbf{D}^\mathfrak{D} \mathbf{u}^\tau + p^\mathfrak{D} \text{Id}) = \mathbf{f}^\mathfrak{M}, \\ \mathbf{div}^{\mathfrak{M}^*}(-2\eta^\mathfrak{D} \mathbf{D}^\mathfrak{D} \mathbf{u}^\tau + p^\mathfrak{D} \text{Id}) = \mathbf{f}^{\mathfrak{M}^*}, \\ \mathbf{div}^\mathfrak{D}(\mathbf{u}^\tau) - \lambda d_\mathfrak{D}^2 \Delta^\mathfrak{D} p^\mathfrak{D} = 0, \\ \sum_{\mathfrak{D} \in \mathfrak{D}} m_\mathfrak{D} p^\mathfrak{D} = 0, \end{array} \right. \quad (\text{VI.4})$$

avec $\eta^\mathfrak{D} = (\eta_\mathfrak{D})_{\mathfrak{D} \in \mathfrak{D}}$, avec $\eta_\mathfrak{D} = \int_{\bar{\mathfrak{D}}} \eta(s) d\mu_\mathfrak{D}(s)$, pour tout $\mathfrak{D} \in \mathfrak{D}$, où $\mu_\mathfrak{D}$ est une mesure de probabilité sur $\bar{\mathfrak{D}}$, $\mathbf{f}^\mathfrak{M} = \mathbb{P}_{\mathbf{m}}^\mathfrak{M} \mathbf{f}$ et $\mathbf{f}^{\mathfrak{M}^*} = \mathbb{P}_{\mathbf{m}}^{\mathfrak{M}^*} \mathbf{f}$, où les projections sont définies par (IV.3), le paramètre de stabilisation λ est choisi strictement positif. Le choix de $\eta^\mathfrak{D}$ inclut les cas :

$$\eta_\mathfrak{D} = \eta(x_\mathfrak{D}) \text{ ou } \eta_\mathfrak{D} = \frac{1}{m_\mathfrak{D}} \int_{\mathfrak{D}} \eta(x) dx. \quad (\text{VI.5})$$

Comme pour le schéma précédent, on a l'équivalent discret de la condition de compatibilité (9). En effet, on a

$$(\mathbf{div}^\mathfrak{D}(\mathbf{u}^\tau) - \lambda d_\mathfrak{D}^2 \Delta^\mathfrak{D} p^\mathfrak{D}, 1)_\mathfrak{D} = (\mathbf{div}^\mathfrak{D} \mathbf{u}^\tau, 1)_\mathfrak{D} = (\nabla^\mathfrak{D} \mathbf{u}^\tau : \text{Id})_\mathfrak{D}.$$

La formule de Green (Théorème IV.9) implique

$$(\mathbf{div}^\mathfrak{D}(\mathbf{u}^\tau) - \lambda d_\mathfrak{D}^2 \Delta^\mathfrak{D} p^\mathfrak{D}, 1)_\mathfrak{D} = (\gamma^\mathfrak{D}(\text{Id}) \cdot \bar{\mathbf{n}}, \gamma^\tau(\mathbf{u}^\tau))_{\partial\Omega}.$$

Grâce à la condition de Dirichlet, on obtient la condition suivante

$$0 = (\mathbf{div}^\mathfrak{D}(\mathbf{u}^\tau) - \lambda d_\mathfrak{D}^2 \Delta^\mathfrak{D} p^\mathfrak{D}, 1)_\mathfrak{D} = \sum_{\mathfrak{D}_{\sigma, \sigma^*} \in \mathfrak{D}_{ext}} m_\sigma \gamma^\tau(\mathbf{u}^\tau) \cdot \bar{\mathbf{n}}_{\sigma\kappa}.$$

On déduit une relation entre l'équation de la conservation de la masse et la condition aux bords de Dirichlet. On rajoute la version discrète de $\int_\Omega p(x) dx = 0$, c'est-à-dire $\sum_{\mathfrak{D} \in \mathfrak{D}} m_\mathfrak{D} p^\mathfrak{D} = 0$ afin d'avoir unicité de la pression.

VI.2 Résultats sur le tenseur des taux de déformation

Dans cette section, on présente plusieurs résultats sur l'opérateur du tenseur des taux de déformation. Le résultat important est l'inégalité de Korn. On commence par majorer le tenseur des taux de déformation discret par le gradient discret.

Proposition VI.1

Pour tout $\mathbf{u}^\tau \in (\mathbb{R}^2)^\tau$, on a

$$\|\mathbf{D}^\mathfrak{D} \mathbf{u}^\tau\|_2 \leq \|\nabla^\mathfrak{D} \mathbf{u}^\tau\|_2.$$

Démonstration : Grâce à la Remarque IV.8, on obtient

$$\|\mathbf{D}^\mathfrak{D} \mathbf{u}^\tau\|_2^2 = \sum_{\mathfrak{D} \in \mathfrak{D}} m_\mathfrak{D} \|\mathbf{D}^\mathfrak{D} \mathbf{u}^\tau\|_\mathcal{F}^2 \leq \sum_{\mathfrak{D} \in \mathfrak{D}} m_\mathfrak{D} \|\nabla^\mathfrak{D} \mathbf{u}^\tau\|_\mathcal{F}^2 = \|\nabla^\mathfrak{D} \mathbf{u}^\tau\|_2^2.$$

■

On introduit la notation suivante

$$\forall \mathbf{u} = \begin{pmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{u}_2 \end{pmatrix}, \mathbf{v} = \begin{pmatrix} \mathbf{v}_1 \\ \mathbf{v}_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2, \quad \mathbf{u} \wedge \mathbf{v} = \mathbf{u}_1 \mathbf{v}_2 - \mathbf{u}_2 \mathbf{v}_1.$$

Après des calculs différentiels classiques, on sait que pour toute fonction régulière $\mathbf{u} : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^2$, on a

$$\mathbf{div} \left({}^t(\nabla \mathbf{u}) \right) = \mathbf{div} (\mathbf{div}(\mathbf{u}) \text{Id}) = \nabla(\mathbf{div}(\mathbf{u})).$$

La propriété correspondante au niveau discret est montrée dans la proposition suivante.

Proposition VI.2

Pour tout $\mathbf{u}^\tau \in \mathbb{E}_0$, on a

$$\mathbf{div}^\tau \left({}^t(\nabla^\mathcal{D} \mathbf{u}^\tau) \right) = \mathbf{div}^\tau \left(\mathbf{div}^\mathcal{D}(\mathbf{u}^\tau) \text{Id} \right).$$

Démonstration : Soit $\mathbf{u}^\tau = \begin{pmatrix} \mathbf{u}_1^\tau \\ \mathbf{u}_2^\tau \end{pmatrix} \in \mathbb{E}_0$. Pour tout diamant $\mathcal{D} \in \mathcal{D}$, la matrice $\left({}^t(\nabla^\mathcal{D} \mathbf{u}^\tau) - \mathbf{div}^\mathcal{D} \mathbf{u}^\tau \text{Id} \right)$ est donnée par

$$\left({}^t(\nabla^\mathcal{D} \mathbf{u}^\tau) - \mathbf{div}^\mathcal{D} \mathbf{u}^\tau \text{Id} \right) = \begin{pmatrix} -(\nabla^\mathcal{D} \mathbf{u}_2^\tau)_2 & (\nabla^\mathcal{D} \mathbf{u}_2^\tau)_1 \\ (\nabla^\mathcal{D} \mathbf{u}_1^\tau)_2 & -(\nabla^\mathcal{D} \mathbf{u}_1^\tau)_1 \end{pmatrix}.$$

Soit $\kappa \in \mathfrak{M}$, on obtient

$$m_\kappa \mathbf{div}^\kappa \left({}^t(\nabla^\mathcal{D} \mathbf{u}^\tau) - \mathbf{div}^\mathcal{D}(\mathbf{u}^\tau) \text{Id} \right) = \sum_{\mathcal{D} \in \mathcal{D}_\kappa} m_\sigma \begin{pmatrix} \nabla^\mathcal{D} \mathbf{u}_2^\tau \wedge \vec{\mathbf{n}}_{\sigma\kappa} \\ -\nabla^\mathcal{D} \mathbf{u}_1^\tau \wedge \vec{\mathbf{n}}_{\sigma\kappa} \end{pmatrix}.$$

En utilisant la Définition I.7 du gradient discret d'un champ scalaire et le fait que $\vec{\mathbf{n}}_{\sigma\kappa} \wedge \vec{\mathbf{n}}_{\sigma^*\kappa^*} = \sin(\alpha_\mathcal{D})$, on en déduit

$$\nabla^\mathcal{D} \mathbf{u}_i^\tau \wedge \vec{\mathbf{n}}_{\sigma\kappa} = \frac{\mathbf{u}_{i,\mathcal{L}^*} - \mathbf{u}_{i,\kappa^*}}{\sin(\alpha_\mathcal{D}) m_\sigma} \vec{\mathbf{n}}_{\sigma^*\kappa^*} \wedge \vec{\mathbf{n}}_{\sigma\kappa} = \frac{\mathbf{u}_{i,\kappa^*} - \mathbf{u}_{i,\mathcal{L}^*}}{m_\sigma}.$$

Il vient que

$$m_\kappa \mathbf{div}^\kappa \left({}^t(\nabla^\mathcal{D} \mathbf{u}^\tau) - \mathbf{div}^\mathcal{D}(\mathbf{u}^\tau) \text{Id} \right) = \sum_{\mathcal{D} \in \mathcal{D}_\kappa} \begin{pmatrix} \mathbf{u}_{2,\kappa^*} - \mathbf{u}_{2,\mathcal{L}^*} \\ \mathbf{u}_{1,\mathcal{L}^*} - \mathbf{u}_{1,\kappa^*} \end{pmatrix}. \quad (\text{VI.6})$$

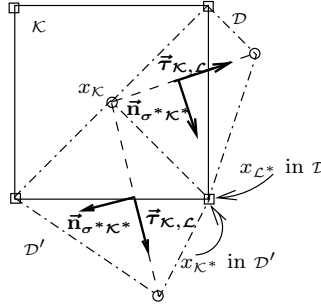


FIG. VI.1 – Sens trigonométrique.

On rappelle que pour chaque diamant $\mathcal{D} \in \mathcal{D}_\kappa$, la base $(\vec{\tau}_{\kappa,\mathcal{L}}, \vec{\mathbf{n}}_{\sigma^*\kappa^*})$ est supposée directe. Cela implique que pour chaque diamant $\mathcal{D} \in \mathcal{D}_\kappa$ les points x_{κ^*} et $x_{\mathcal{L}^*}$ sont définis par ce choix d'orientation et pour deux diamants voisins \mathcal{D} et \mathcal{D}' , tels que $\mathcal{D} \cap \mathcal{D}' \neq \emptyset$, le point $x_{\mathcal{L}^*}$ de \mathcal{D} coïncide avec le point x_{κ^*} de \mathcal{D}' , (voir la Figure VI.1). Ainsi le membre de droite de (VI.6) est une somme télescopique, il est donc nul. D'où pour tout $\kappa \in \mathfrak{M}$, on conclut

$$\mathbf{div}^\kappa \left({}^t(\nabla^\mathcal{D} \mathbf{u}^\tau) \right) = \mathbf{div}^\kappa \left(\mathbf{div}^\mathcal{D}(\mathbf{u}^\tau) \text{Id} \right).$$

Le même résultat est vérifié pour tout $\kappa^* \in \mathfrak{M}^*$. Premièrement, on obtient

$$m_{\kappa^*} \mathbf{div}^{\kappa^*} \left({}^t(\nabla^\mathcal{D} \mathbf{u}^\tau) - \mathbf{div}^\mathcal{D}(\mathbf{u}^\tau) \text{Id} \right) = \sum_{\mathcal{D} \in \mathcal{D}_{\kappa^*}} m_{\sigma^*} \begin{pmatrix} \nabla^\mathcal{D} \mathbf{u}_2^\tau \wedge \vec{\mathbf{n}}_{\sigma^*\kappa^*} \\ -\nabla^\mathcal{D} \mathbf{u}_1^\tau \wedge \vec{\mathbf{n}}_{\sigma^*\kappa^*} \end{pmatrix},$$

puis

$$m_{\kappa^*} \mathbf{div}^{\kappa^*} \left({}^t(\nabla^\mathcal{D} \mathbf{u}^\tau) - \mathbf{div}^\mathcal{D}(\mathbf{u}^\tau) \text{Id} \right) = \sum_{\mathcal{D} \in \mathcal{D}_{\kappa^*}} \begin{pmatrix} \mathbf{u}_{2,\mathcal{L}} - \mathbf{u}_{2,\kappa} \\ \mathbf{u}_{1,\kappa} - \mathbf{u}_{1,\mathcal{L}} \end{pmatrix}. \quad (\text{VI.7})$$

Grâce à l'orientation choisie, le membre de droite de (VI.7) est une somme télescopique, il est donc nul, il vient que

$$\mathbf{div}^{\kappa^*} \left({}^t(\nabla^\mathcal{D} \mathbf{u}^\tau) \right) = \mathbf{div}^{\kappa^*} \left(\mathbf{div}^\mathcal{D}(\mathbf{u}^\tau) \text{Id} \right), \quad \forall \kappa^* \in \mathfrak{M}^*.$$

Le cas où $\kappa^* \in \partial\mathfrak{M}^*$ est un peu différent, la Définition IV.4 de la divergence discrète donne

$$\begin{aligned} m_{\kappa^*} \mathbf{div}^{\kappa^*} \left({}^t(\nabla^{\mathcal{D}} \mathbf{u}^{\tau}) - \operatorname{div}^{\mathcal{D}}(\mathbf{u}^{\tau}) \operatorname{Id} \right) &= \sum_{\mathcal{D} \in \mathcal{D}_{\kappa^*}} m_{\sigma^*} \left({}^t(\nabla^{\mathcal{D}} \mathbf{u}^{\tau}) - \operatorname{div}^{\mathcal{D}} \mathbf{u}^{\tau} \operatorname{Id} \right) \vec{\mathbf{n}}_{\sigma^* \kappa^*} \\ &+ \sum_{\mathcal{D} \in \mathcal{D}_{\kappa^*} \cap \mathcal{D}_{ext}} d_{\kappa^*, \mathcal{L}} \left({}^t(\nabla^{\mathcal{D}} \mathbf{u}^{\tau}) - \operatorname{div}^{\mathcal{D}} \mathbf{u}^{\tau} \operatorname{Id} \right) \vec{\mathbf{n}}_{\sigma \kappa}. \end{aligned} \quad (\text{VI.8})$$

Pour la première somme sur $\mathcal{D} \in \mathcal{D}_{\kappa^*}$ du membre de droite de (VI.8), on peut faire la même chose que pour $\kappa^* \in \mathfrak{M}^*$: (VI.7) donne

$$\sum_{\mathcal{D} \in \mathcal{D}_{\kappa^*}} m_{\sigma^*} \left({}^t(\nabla^{\mathcal{D}} \mathbf{u}^{\tau}) - \operatorname{div}^{\mathcal{D}} \mathbf{u}^{\tau} \operatorname{Id} \right) \vec{\mathbf{n}}_{\sigma^* \kappa^*} = \sum_{\mathcal{D} \in \mathcal{D}_{\kappa^*}} \begin{pmatrix} \mathbf{u}_{2, \mathcal{L}} - \mathbf{u}_{2, \kappa} \\ \mathbf{u}_{1, \kappa} - \mathbf{u}_{1, \mathcal{L}} \end{pmatrix}. \quad (\text{VI.9})$$

Pour la seconde somme du membre de droite de (VI.8), on peut faire la même chose que pour $\kappa \in \mathfrak{M}$: (VI.6) implique

$$\sum_{\mathcal{D} \in \mathcal{D}_{\kappa^*} \cap \mathcal{D}_{ext}} d_{\kappa^*, \mathcal{L}} \left({}^t(\nabla^{\mathcal{D}} \mathbf{u}^{\tau}) - \operatorname{div}^{\mathcal{D}} \mathbf{u}^{\tau} \operatorname{Id} \right) \vec{\mathbf{n}}_{\sigma \kappa} = \sum_{\mathcal{D} \in \mathcal{D}_{\kappa^*} \cap \mathcal{D}_{ext}} \frac{d_{\kappa^*, \mathcal{L}}}{m_{\sigma}} \begin{pmatrix} \mathbf{u}_{2, \kappa^*} - \mathbf{u}_{2, \mathcal{L}^*} \\ \mathbf{u}_{1, \mathcal{L}^*} - \mathbf{u}_{1, \kappa^*} \end{pmatrix}. \quad (\text{VI.10})$$

En combinant (VI.9) et (VI.10) dans (VI.8), on obtient

$$m_{\kappa^*} \mathbf{div}^{\kappa^*} \left({}^t(\nabla^{\mathcal{D}} \mathbf{u}^{\tau}) - \operatorname{div}^{\mathcal{D}}(\mathbf{u}^{\tau}) \operatorname{Id} \right) = \sum_{\mathcal{D} \in \mathcal{D}_{\kappa^*}} \begin{pmatrix} \mathbf{u}_{2, \mathcal{L}} - \mathbf{u}_{2, \kappa} \\ \mathbf{u}_{1, \kappa} - \mathbf{u}_{1, \mathcal{L}} \end{pmatrix} + \sum_{\mathcal{D} \in \mathcal{D}_{\kappa^*} \cap \mathcal{D}_{ext}} \frac{d_{\kappa^*, \mathcal{L}}}{m_{\sigma}} \begin{pmatrix} \mathbf{u}_{2, \kappa^*} - \mathbf{u}_{2, \mathcal{L}^*} \\ \mathbf{u}_{1, \mathcal{L}^*} - \mathbf{u}_{1, \kappa^*} \end{pmatrix}.$$

La condition aux bords $\mathbf{u}^{\tau} \in \mathbb{E}_0$ implique que $\mathbf{u}_{2, \kappa^*} = \mathbf{u}_{2, \mathcal{L}^*} = \mathbf{u}_{1, \mathcal{L}^*} = \mathbf{u}_{1, \kappa^*} = 0$. Il vient que

$$\sum_{\mathcal{D} \in \mathcal{D}_{\kappa^*} \cap \mathcal{D}_{ext}} \frac{d_{\kappa^*, \mathcal{L}}}{m_{\sigma}} \begin{pmatrix} \mathbf{u}_{2, \kappa^*} - \mathbf{u}_{2, \mathcal{L}^*} \\ \mathbf{u}_{1, \mathcal{L}^*} - \mathbf{u}_{1, \kappa^*} \end{pmatrix} = 0.$$

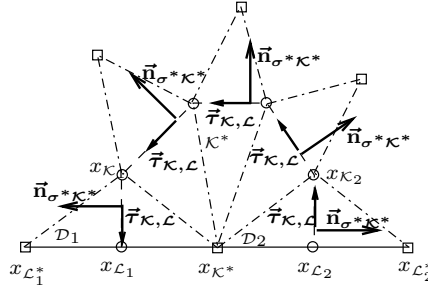


FIG. VI.2 – Sens trigonométrique.

En utilisant les notations de la Figure VI.2, la somme sur les diamants $\mathcal{D} \in \mathcal{D}_{\kappa^*}$ de κ^* vaut

$$\sum_{\mathcal{D} \in \mathcal{D}_{\kappa^*}} \begin{pmatrix} \mathbf{u}_{2, \mathcal{L}} - \mathbf{u}_{2, \kappa} \\ \mathbf{u}_{1, \kappa} - \mathbf{u}_{1, \mathcal{L}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{u}_{2, \mathcal{L}_1} - \mathbf{u}_{2, \mathcal{L}_2} \\ \mathbf{u}_{1, \mathcal{L}_2} - \mathbf{u}_{1, \mathcal{L}_1} \end{pmatrix}.$$

Comme $\mathbf{u}^{\tau} \in \mathbb{E}_0$, on a $\mathbf{u}_{2, \mathcal{L}_1} = \mathbf{u}_{2, \mathcal{L}_2} = \mathbf{u}_{1, \mathcal{L}_2} = \mathbf{u}_{1, \mathcal{L}_1} = 0$. On en déduit

$$\sum_{\mathcal{D} \in \mathcal{D}_{\kappa^*}} \begin{pmatrix} \mathbf{u}_{2, \mathcal{L}} - \mathbf{u}_{2, \kappa} \\ \mathbf{u}_{1, \kappa} - \mathbf{u}_{1, \mathcal{L}} \end{pmatrix} + \sum_{\mathcal{D} \in \mathcal{D}_{\kappa^*} \cap \mathcal{D}_{ext}} \frac{d_{\kappa^*, \mathcal{L}}}{m_{\sigma}} \begin{pmatrix} \mathbf{u}_{2, \kappa^*} - \mathbf{u}_{2, \mathcal{L}^*} \\ \mathbf{u}_{1, \mathcal{L}^*} - \mathbf{u}_{1, \kappa^*} \end{pmatrix} = 0.$$

Ceci conclut la démonstration. ■

Remarque VI.3

On a besoin de $\mathbf{u}^{\tau} \in \mathbb{E}_0$ pour montrer $\mathbf{div}^{\kappa^*} \left({}^t(\nabla^{\mathcal{D}} \mathbf{u}^{\tau}) \right) = \mathbf{div}^{\kappa^*} \left(-\operatorname{div}^{\mathcal{D}}(\mathbf{u}^{\tau}) \operatorname{Id} \right)$, pour tout $\kappa^* \in \partial\mathfrak{M}^*$, sinon on a des termes de bords à rajouter.

On est maintenant en mesure de montrer l'inégalité de Korn.

Théorème VI.4 (Inégalité de Korn discrète)

Pour tout $\mathbf{u}^\tau \in \mathbb{E}_0$, on a

$$\|\nabla^\mathfrak{D} \mathbf{u}^\tau\|_2 \leq \sqrt{2} \|\mathbf{D}^\mathfrak{D} \mathbf{u}^\tau\|_2.$$

Démonstration : Tout d'abord, on a

$$\|\mathbf{D}^\mathfrak{D} \mathbf{u}^\tau\|_2^2 = \frac{1}{2} \|\nabla^\mathfrak{D} \mathbf{u}^\tau\|_2^2 + \frac{1}{2} \left({}^t(\nabla^\mathfrak{D} \mathbf{u}^\tau) : \nabla^\mathfrak{D} \mathbf{u}^\tau \right)_\mathfrak{D}.$$

On va montrer que le dernier terme du membre de droite est positif. En appliquant la formule de Green (Théorème IV.9), le fait que $\mathbf{u}^\tau \in \mathbb{E}_0$, on a

$$\left({}^t(\nabla^\mathfrak{D} \mathbf{u}^\tau) : \nabla^\mathfrak{D} \mathbf{u}^\tau \right)_\mathfrak{D} = -\llbracket \mathbf{div}^\tau \left({}^t(\nabla^\mathfrak{D} \mathbf{u}^\tau) \right), \mathbf{u}^\tau \rrbracket_\mathcal{T}.$$

La Proposition VI.2 implique

$$\left({}^t(\nabla^\mathfrak{D} \mathbf{u}^\tau) : \nabla^\mathfrak{D} \mathbf{u}^\tau \right)_\mathfrak{D} = -\llbracket \mathbf{div}^\tau (\mathbf{div}^\mathfrak{D}(\mathbf{u}^\tau) \text{Id}), \mathbf{u}^\tau \rrbracket_\mathcal{T}.$$

En utilisant encore une fois la formule de Green (Théorème IV.9) pour $\mathbf{u}^\tau \in \mathbb{E}_0$ et en remplaçant $\mathbf{div}^\mathfrak{D} \mathbf{u}^\tau = \text{Tr} \nabla^\mathfrak{D} \mathbf{u}^\tau = (\text{Id} : \nabla^\mathfrak{D} \mathbf{u}^\tau)$, on obtient

$$\left({}^t(\nabla^\mathfrak{D} \mathbf{u}^\tau) : \nabla^\mathfrak{D} \mathbf{u}^\tau \right)_\mathfrak{D} = \left(\mathbf{div}^\mathfrak{D}(\mathbf{u}^\tau) \text{Id} : \nabla^\mathfrak{D} \mathbf{u}^\tau \right)_\mathfrak{D} = \|\mathbf{div}^\mathfrak{D}(\mathbf{u}^\tau)\|_2^2 \geq 0.$$

Ceci conclut la démonstration. ■

VI.3 Stabilité du schéma DDFV

Dans cette section, on montre la stabilité du schéma DDFV (VI.4) grâce à la stabilisation puis en conséquence le caractère bien posé du schéma (voir Théorème VI.9). Dans le Théorème VI.6, le choix de la stabilisation de type Brezzi-Pitkäranta est crucial, comme on l'a vu dans le chapitre précédent. La nouveauté repose ici sur la présence du tenseur visqueux variable $2\eta(x)\text{Du}$. On commence par donner la forme bilinéaire associée au schéma (VI.4).

Définition VI.5

On définit la forme bilinéaire associée au schéma (VI.4) par :

$$\forall (\mathbf{u}^\tau, p^\mathfrak{D}), (\tilde{\mathbf{u}}^\tau, \tilde{p}^\mathfrak{D}) \in (\mathbb{R}^2)^\tau \times \mathbb{R}^\mathfrak{D},$$

$$B(\mathbf{u}^\tau, p^\mathfrak{D}; \tilde{\mathbf{u}}^\tau, \tilde{p}^\mathfrak{D}) = \llbracket \mathbf{div}^\tau (-2\eta^\mathfrak{D} \mathbf{D}^\mathfrak{D} \mathbf{u}^\tau + p^\mathfrak{D} \text{Id}), \tilde{\mathbf{u}}^\tau \rrbracket_\mathcal{T} + (\mathbf{div}^\mathfrak{D}(\mathbf{u}^\tau) - \lambda d_\mathfrak{D}^2 \Delta^\mathfrak{D} p^\mathfrak{D}, \tilde{p}^\mathfrak{D})_\mathfrak{D},$$

où le paramètre de stabilisation λ est strictement positif.

Théorème VI.6 (Stabilité du schéma)

On suppose que η vérifie (VI.2). Il existe deux constantes $C_1 > 0$ et $C_2 > 0$, dépendant uniquement de Ω , λ , \underline{C}_η , \overline{C}_η , et $\text{reg}(\mathcal{T})$, telles que pour chaque couple $(\mathbf{u}^\tau, p^\mathfrak{D}) \in \mathbb{E}_0 \times \mathbb{R}^\mathfrak{D}$ avec $\sum_{\mathfrak{D} \in \mathfrak{D}} m_\mathfrak{D} p^\mathfrak{D} = 0$, il existe

$\tilde{\mathbf{u}}^\tau \in \mathbb{E}_0$ et $\tilde{p}^\mathfrak{D} \in \mathbb{R}^\mathfrak{D}$ vérifiant :

$$\|\nabla^\mathfrak{D} \tilde{\mathbf{u}}^\tau\|_2 + \|\tilde{p}^\mathfrak{D}\|_2 \leq C_1 (\|\nabla^\mathfrak{D} \mathbf{u}^\tau\|_2 + \|p^\mathfrak{D}\|_2), \quad (\text{VI.11})$$

et

$$\|\nabla^\mathfrak{D} \mathbf{u}^\tau\|_2^2 + \|p^\mathfrak{D}\|_2^2 \leq C_2 B(\mathbf{u}^\tau, p^\mathfrak{D}; \tilde{\mathbf{u}}^\tau, \tilde{p}^\mathfrak{D}). \quad (\text{VI.12})$$

Démonstration : Soit $(\mathbf{u}^\tau, p^\mathfrak{D}) \in \mathbb{E}_0 \times \mathbb{R}^\mathfrak{D}$ tel que $\sum_{\mathfrak{D} \in \mathfrak{D}} m_\mathfrak{D} p^\mathfrak{D} = 0$.

Etape 1 : On applique la formule de Green discrète (Théorème IV.9) à B donnée par la Définition VI.5, en remarquant que $\gamma^\tau(\mathbf{u}^\tau) = 0$ et que $D^\mathfrak{D}\mathbf{u}^\tau$ est une matrice symétrique, on obtient

$$B(\mathbf{u}^\tau, p^\mathfrak{D}; \mathbf{u}^\tau, p^\mathfrak{D}) = (2\eta^\mathfrak{D} D^\mathfrak{D}\mathbf{u}^\tau : D^\mathfrak{D}\mathbf{u}^\tau)_\mathfrak{D} - \lambda(d_\mathfrak{D}^2 \Delta^\mathfrak{D} p^\mathfrak{D}, p^\mathfrak{D})_\mathfrak{D}.$$

Grâce à l'inégalité sur la viscosité (VI.2) et à la Remarque IV.12, on obtient

$$B(\mathbf{u}^\tau, p^\mathfrak{D}; \mathbf{u}^\tau, p^\mathfrak{D}) \geq 2\underline{C}_\eta \|D^\mathfrak{D}\mathbf{u}^\tau\|_2^2 + \lambda |p^\mathfrak{D}|_h^2.$$

Finalement on applique l'inégalité de Korn (Théorème VI.4) afin d'obtenir

$$B(\mathbf{u}^\tau, p^\mathfrak{D}; \mathbf{u}^\tau, p^\mathfrak{D}) \geq \underline{C}_\eta \|\nabla^\mathfrak{D}\mathbf{u}^\tau\|_2^2 + \lambda |p^\mathfrak{D}|_h^2. \quad (\text{VI.13})$$

On remarque que l'estimation sur la pression ci-dessus dépend du maillage. En effet, on rappelle que la semi-norme $|\cdot|_h$ dépend elle-même du maillage. C'est pourquoi on ne peut pas borner uniformément la norme L^2 de la pression par la semi-norme $|\cdot|_h$.

Etape 2 : On fait comme dans l'Etape 2 de la démonstration du Théorème V.12. On utilise le Lemme de Nečas (voir [GR86, Corollaire 2.4] ou [BF06, Lemme III.1.17]) : comme $p^\mathfrak{D} = \sum_{\mathfrak{D} \in \mathfrak{D}} p^\mathfrak{D} \mathbf{1}_\mathfrak{D} \in L^2(\Omega)$ est d'intégrale nulle sur Ω , il existe une constante $C > 0$, dépendant uniquement de Ω , et $\mathbf{v} \in (H_0^1(\Omega))^2$ telle que $\text{div}(\mathbf{v}) = -p^\mathfrak{D}$ et

$$\|\mathbf{v}\|_{H^1} \leq C \|p^\mathfrak{D}\|_2. \quad (\text{VI.14})$$

On pose $\mathbf{v}^\tau = \mathbb{P}_\mathfrak{m}^\tau \mathbf{v}$, définie par (IV.4). En particulier, on a $\mathbf{v}^\tau \in \mathbb{E}_0$. En utilisant le Lemme IV.19, on obtient

$$\|\nabla^\mathfrak{D}\mathbf{v}^\tau\|_2 \leq C \|\mathbf{v}\|_{H^1} \leq C \|p^\mathfrak{D}\|_2. \quad (\text{VI.15})$$

La formule de Green (Théorème IV.9) implique que

$$B(\mathbf{u}^\tau, p^\mathfrak{D}; \mathbf{v}^\tau, 0) = 2(\eta^\mathfrak{D} D^\mathfrak{D}\mathbf{u}^\tau : \nabla^\mathfrak{D}\mathbf{v}^\tau)_\mathfrak{D} - (p^\mathfrak{D}, \text{div}^\mathfrak{D}(\mathbf{v}^\tau))_\mathfrak{D}.$$

On applique l'inégalité de Cauchy-Schwarz, ensuite on ajoute et soustrait $\sum_{\mathfrak{D} \in \mathfrak{D}} \int_\mathfrak{D} p^\mathfrak{D} \text{div}(\mathbf{v}(z)) dz$ afin obtenir

$$B(\mathbf{u}^\tau, p^\mathfrak{D}; \mathbf{v}^\tau, 0) \geq -\overline{C}_\eta \|D^\mathfrak{D}\mathbf{u}^\tau\|_2 \|\nabla^\mathfrak{D}\mathbf{v}^\tau\|_2 - \sum_{\mathfrak{D} \in \mathfrak{D}} \int_\mathfrak{D} p^\mathfrak{D} \text{div}(\mathbf{v}(z)) dz - \sum_{\mathfrak{D} \in \mathfrak{D}} \int_\mathfrak{D} p^\mathfrak{D} (\text{div}^\mathfrak{D}(\mathbf{v}^\tau) - \text{div}(\mathbf{v}(z))) dz.$$

Puisqu'on a $\text{div}(\mathbf{v}) = -p^\mathfrak{D}$, l'inégalité (VI.15) et la Proposition VI.1 donnent

$$B(\mathbf{u}^\tau, p^\mathfrak{D}; \mathbf{v}^\tau, 0) \geq -C \|\nabla^\mathfrak{D}\mathbf{u}^\tau\|_2 \|p^\mathfrak{D}\|_2 + \|p^\mathfrak{D}\|_2^2 - \sum_{\mathfrak{D} \in \mathfrak{D}} \int_\mathfrak{D} p^\mathfrak{D} (\text{div}^\mathfrak{D}(\mathbf{v}^\tau) - \text{div}(\mathbf{v}(z))) dz.$$

La Proposition IV.25 et l'estimation (VI.14) impliquent

$$\sum_{\mathfrak{D} \in \mathfrak{D}} \int_\mathfrak{D} p^\mathfrak{D} (\text{div}^\mathfrak{D}(\mathbf{v}^\tau) - \text{div}(\mathbf{v}(z))) dz \leq C |p^\mathfrak{D}|_h \|\mathbf{v}\|_{H^1} \leq C |p^\mathfrak{D}|_h \|p^\mathfrak{D}\|_2.$$

On en déduit que

$$B(\mathbf{u}^\tau, p^\mathfrak{D}; \mathbf{v}^\tau, 0) \geq \|p^\mathfrak{D}\|_2^2 - C \|p^\mathfrak{D}\|_2 \|\nabla^\mathfrak{D}\mathbf{u}^\tau\|_2 - C |p^\mathfrak{D}|_h \|p^\mathfrak{D}\|_2.$$

En utilisant l'inégalité de Young, on obtient l'existence de trois constantes $C_1, C_2, C_3 > 0$, dépendant uniquement de $\Omega, \overline{C}_\eta$ et $\text{reg}(\mathcal{T})$, telles que

$$B(\mathbf{u}^\tau, p^\mathfrak{D}; \mathbf{v}^\tau, 0) \geq C_1 \|p^\mathfrak{D}\|_2^2 - C_2 \|\nabla^\mathfrak{D}\mathbf{u}^\tau\|_2^2 - C_3 |p^\mathfrak{D}|_h^2. \quad (\text{VI.16})$$

Etape 3 : La bilinéarité de B , les estimations (VI.13) et (VI.16) donnent pour tout nombre strictement positif $\xi > 0$:

$$B(\mathbf{u}^\tau, p^\mathfrak{D}; \mathbf{u}^\tau + \xi \mathbf{v}^\tau, p^\mathfrak{D}) \geq (\underline{C}_\eta - \xi C_2) \|\nabla^\mathfrak{D}\mathbf{u}^\tau\|_2^2 + \xi C_1 \|p^\mathfrak{D}\|_2^2 + (\lambda - \xi C_3) |p^\mathfrak{D}|_h^2. \quad (\text{VI.17})$$

On choisit la valeur de $\xi > 0$ suffisamment petite (dépendant uniquement de $\underline{C}_\eta, C_2, \lambda$ et C_3) telle que toutes les constantes devant les normes soient strictement positives, cette inégalité (VI.17) conduit à l'estimation (VI.12). La relation (VI.11) est vérifiée pour le couple $\tilde{\mathbf{u}}^\tau = \mathbf{u}^\tau + \xi \mathbf{v}^\tau$ et $\tilde{p}^\mathfrak{D} = p^\mathfrak{D}$, grâce à (VI.15), ceci conclut la démonstration. ■

Remarque VI.7

Il est clair que la démonstration n'est plus valable si on ne considère pas de termes de stabilisation, c'est-à-dire si $\lambda = 0$.

Une conséquence immédiate des inégalités de stabilité est la dépendance des solutions DDFV de manière continue aux données du problème.

Corollaire VI.8

On suppose que η vérifie (VI.2) et $\lambda > 0$. Il existe une constante $C > 0$, dépendant uniquement du diamètre de Ω , λ , \underline{C}_η , \overline{C}_η et $\text{reg}(\mathcal{T})$, telle que le couple $(\mathbf{u}^\tau, p^\mathfrak{D}) \in \mathbb{E}_0 \times \mathbb{R}^\mathfrak{D}$, solution du schéma (VI.4) avec $\mathbf{g}^\tau = 0$ vérifie :

$$\|\nabla^\mathfrak{D} \mathbf{u}^\tau\|_2^2 + \|p^\mathfrak{D}\|_2^2 \leq C \|\mathbf{f}^\tau\|_2^2.$$

Démonstration : Soit $(\mathbf{u}^\tau, p^\mathfrak{D}) \in \mathbb{E}_0 \times \mathbb{R}^\mathfrak{D}$ solution du schéma (VI.4). Grâce au Théorème VI.6, il existe $\tilde{\mathbf{u}}^\tau \in \mathbb{E}_0$, $\tilde{p}^\mathfrak{D} \in \mathbb{R}^\mathfrak{D}$, tels que

$$\|\nabla^\mathfrak{D} \tilde{\mathbf{u}}^\tau\|_2 + \|\tilde{p}^\mathfrak{D}\|_2 \leq C_1 (\|\nabla^\mathfrak{D} \mathbf{u}^\tau\|_2 + \|p^\mathfrak{D}\|_2), \quad (\text{VI.18})$$

et

$$\|\nabla^\mathfrak{D} \mathbf{u}^\tau\|_2^2 + \|p^\mathfrak{D}\|_2^2 \leq C_2 B(\mathbf{u}^\tau, p^\mathfrak{D}; \tilde{\mathbf{u}}^\tau, \tilde{p}^\mathfrak{D}).$$

La Définition VI.5 de B implique que $B(\mathbf{u}^\tau, p^\mathfrak{D}; \tilde{\mathbf{u}}^\tau, \tilde{p}^\mathfrak{D}) = \llbracket \mathbf{f}^\tau, \tilde{\mathbf{u}}^\tau \rrbracket_\mathcal{T}$. On applique l'inégalité de Cauchy-Schwarz et le Théorème IV.15 de Poincaré pour obtenir

$$\|\nabla^\mathfrak{D} \mathbf{u}^\tau\|_2^2 + \|p^\mathfrak{D}\|_2^2 \leq C_2 \|\mathbf{f}^\tau\|_2 \|\tilde{\mathbf{u}}^\tau\|_2 \leq C \|\mathbf{f}^\tau\|_2 \|\nabla^\mathfrak{D} \tilde{\mathbf{u}}^\tau\|_2.$$

En utilisant (VI.18) et l'inégalité de Young, le résultat est montré. \blacksquare

Théorème VI.9

On suppose que η vérifie (VI.2) et $\lambda > 0$. Soit \mathcal{T} un maillage DDFV associé à Ω . Le schéma (VI.4) admet une unique solution $(\mathbf{u}^\tau, p^\mathfrak{D}) \in (\mathbb{R}^2)^\tau \times \mathbb{R}^\mathfrak{D}$.

Démonstration : On note N la dimension de $(\mathbb{R}^2)^\tau \times \mathbb{R}^\mathfrak{D}$. Le schéma (VI.4) peut s'écrire avec $q^\mathfrak{D} = 0$ et $\alpha = 0$ comme suit

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } \mathbf{u}^\tau \in (\mathbb{R}^2)^\tau \text{ et } p^\mathfrak{D} \in \mathbb{R}^\mathfrak{D} \text{ tels que,} \\ \text{div}^\mathfrak{M}(-2\eta^\mathfrak{D} \mathbf{D}^\mathfrak{D} \mathbf{u}^\tau + p^\mathfrak{D} \text{Id}) = \mathbf{f}^\mathfrak{M}, \\ \text{div}^{\mathfrak{M}*}(-2\eta^\mathfrak{D} \mathbf{D}^\mathfrak{D} \mathbf{u}^\tau + p^\mathfrak{D} \text{Id}) = \mathbf{f}^{\mathfrak{M}*}, \\ \text{div}^\mathfrak{D}(\mathbf{u}^\tau) - \lambda d_\mathfrak{D}^2 \Delta^\mathfrak{D} p^\mathfrak{D} = q^\mathfrak{D}, \\ \mathbf{u}_\kappa = \mathbf{g}_\kappa, \quad \forall \kappa \in \partial\mathfrak{M}, \\ \mathbf{u}_{\kappa^*} = \mathbf{g}_{\kappa^*}, \quad \forall \kappa^* \in \partial\mathfrak{M}^* \\ \sum_{\mathfrak{D} \in \mathfrak{D}} m_\mathfrak{D} p^\mathfrak{D} = \alpha. \end{array} \right.$$

C'est un système linéaire : $Av = b$ avec une matrice rectangle $A \in \mathcal{M}_{N+1, N}(\mathbb{R})$, $v \in \mathbb{R}^N$ et le second membre $b = {}^t(\mathbf{f}^\mathfrak{M}, \mathbf{f}^{\mathfrak{M}*}, q^\mathfrak{D}, \mathbf{g}^{\partial\mathfrak{M}}, \mathbf{g}^{\partial\mathfrak{M}*}, \alpha) \in \mathbb{R}^{N+1}$. Soit X l'ensemble suivant

$$X = \left\{ (\mathbf{f}^\mathfrak{M}, \mathbf{f}^{\mathfrak{M}*}, q^\mathfrak{D}, \mathbf{g}^{\partial\mathfrak{M}}, \mathbf{g}^{\partial\mathfrak{M}*}, \alpha)' \in \mathbb{R}^{N+1}, \sum_{\mathfrak{D}, \sigma^* \in \mathfrak{D}_{ext}} m_\sigma \gamma^\tau(\mathbf{g}^\tau) \cdot \vec{\mathbf{n}}_{\sigma\kappa} = \sum_{\mathfrak{D} \in \mathfrak{D}} m_\mathfrak{D} q^\mathfrak{D} \right\},$$

la dimension de X vaut N . On a que ${}^t(\mathbf{f}^\mathfrak{M}, \mathbf{f}^{\mathfrak{M}*}, 0, \mathbf{g}^{\partial\mathfrak{M}}, \mathbf{g}^{\partial\mathfrak{M}*}, 0)$ appartient à X et que $\text{Im} A \subset X$ car on a une relation entre l'équation de la conservation de la masse et la condition aux bords de Dirichlet grâce à la formule de Green (Théorème IV.9). Si on montre que la matrice A est injective, on conclut que $\dim \text{Im} A = N$ et ainsi $\text{Im} A = X$. Etudions donc le noyau de la matrice A . Grâce au Corollaire VI.8, il vient que $\nabla^\mathfrak{D} \mathbf{u}^\tau = 0$ et $p^\mathfrak{D} = 0$. Comme $\mathbf{u}^\tau \in \mathbb{E}_0$, la Remarque IV.3 implique $\mathbf{u}^\tau = 0$. \blacksquare

VI.4 Estimations d'erreurs du schéma DDFV

On donne maintenant une estimation de l'erreur dans le cas où la solution exacte du problème (VI.1) appartient à $(H^2(\Omega))^2 \times H^1(\Omega)$ et la viscosité est assez régulière. Notre résultat principal est le suivant.

Théorème VI.10

On suppose que η vérifie (VI.2) et (VI.3) et que $\lambda > 0$. On suppose que la solution (\mathbf{u}, p) du problème (VI.1) appartient à $(H^2(\Omega))^2 \times H^1(\Omega)$. Soit $(\mathbf{u}^\tau, p^\mathfrak{D}) \in (\mathbb{R}^2)^\tau \times \mathbb{R}^\mathfrak{D}$ la solution du schéma (VI.4). Il existe une constante $C > 0$ dépendant uniquement de Ω , $\text{reg}(T)$, λ , C_η , \underline{C}_η , \overline{C}_η , $\|\mathbf{u}\|_{H^2}$ et $\|p\|_{H^1}$, telle que :

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}^\tau\|_2 + \|\nabla \mathbf{u} - \nabla^\mathfrak{D} \mathbf{u}^\tau\|_2 \leq C \text{size}(T),$$

et

$$\|p - p^\mathfrak{D}\|_2 \leq C \text{size}(T).$$

Début de la Démonstration du Théorème VI.10 : Soit $\mathbf{e}^\tau = \mathfrak{P}_{\mathbf{m}, \mathbf{g}} \mathbb{P}_\mathbf{c}^\tau \mathbf{u} - \mathbf{u}^\tau \in \mathbb{E}_0$ l'erreur pour la vitesse et $e^\mathfrak{D} = \mathbb{P}_m^\mathfrak{D} p - p^\mathfrak{D} \in \mathbb{R}^\mathfrak{D}$ l'erreur pour la pression. On rappelle que $\mathbf{g} = \gamma(\mathbf{u})$. Grâce à (VI.4) et (VI.1), on a $\forall \kappa \in \mathfrak{M}$

$$\begin{cases} \text{div}^\kappa(-2\eta^\mathfrak{D} \mathbb{D}^\mathfrak{D} \mathbf{u}^\tau + p^\mathfrak{D} \text{Id}) = \mathbf{f}_\kappa, \\ -\frac{1}{m_\kappa} \int_\kappa \text{div}(2\eta(x) \mathbf{D}\mathbf{u}(x)) dx + \frac{1}{m_\kappa} \int_\kappa \nabla p(x) dx = \mathbf{f}_\kappa. \end{cases}$$

Par conséquent, on en déduit

$$m_\kappa \text{div}^\kappa(-2\eta^\mathfrak{D} \mathbb{D}^\mathfrak{D} \mathbf{e}^\tau + e^\mathfrak{D} \text{Id}) = m_\kappa \text{div}^\kappa(-2\eta^\mathfrak{D} \mathbb{D}^\mathfrak{D} \mathfrak{P}_{\mathbf{m}, \mathbf{g}} \mathbb{P}_\mathbf{c}^\tau \mathbf{u} + \mathbb{P}_m^\mathfrak{D} p \text{Id}) + \int_\kappa \text{div}(2\eta(x) \mathbf{D}\mathbf{u}(x)) dx - \int_\kappa \nabla p(x) dx.$$

La Définition IV.4 de la divergence discrète et la formule de Green impliquent

$$\begin{aligned} m_\kappa \text{div}^\kappa(-2\eta^\mathfrak{D} \mathbb{D}^\mathfrak{D} \mathbf{e}^\tau + e^\mathfrak{D} \text{Id}) &= 2 \sum_{\mathfrak{D} \in \mathfrak{D}_\kappa} \int_\sigma (\eta(z) \mathbf{D}\mathbf{u}(z) - \eta_\mathfrak{D} \mathbb{D}^\mathfrak{D} \mathfrak{P}_{\mathbf{m}, \mathbf{g}} \mathbb{P}_\mathbf{c}^\tau \mathbf{u}) \cdot \tilde{\mathbf{n}}_{\sigma\kappa} dz \\ &\quad + \sum_{\mathfrak{D} \in \mathfrak{D}_\kappa} \int_\sigma (\mathbb{P}_m^\mathfrak{D} p - p(z)) \cdot \tilde{\mathbf{n}}_{\sigma\kappa} dz. \end{aligned} \quad (\text{VI.19})$$

De la même manière, on montre que pour tout $\kappa^* \in \mathfrak{M}^*$ on a

$$\begin{aligned} m_{\kappa^*} (\text{div}^{\kappa^*}(-2\eta^\mathfrak{D} \mathbb{D}^\mathfrak{D} \mathbf{e}^\tau + e^\mathfrak{D} \text{Id})) &= 2 \sum_{\mathfrak{D} \in \mathfrak{D}_{\kappa^*}} \int_{\sigma^*} (\eta(z) \mathbf{D}\mathbf{u}(z) - \eta_\mathfrak{D} \mathbb{D}^\mathfrak{D} \mathfrak{P}_{\mathbf{m}, \mathbf{g}} \mathbb{P}_\mathbf{c}^\tau \mathbf{u}) \cdot \tilde{\mathbf{n}}_{\sigma^*\kappa^*} dz \\ &\quad + \sum_{\mathfrak{D} \in \mathfrak{D}_{\kappa^*}} \int_{\sigma^*} (\mathbb{P}_m^\mathfrak{D} p - p(z)) \cdot \tilde{\mathbf{n}}_{\sigma^*\kappa^*} dz. \end{aligned} \quad (\text{VI.20})$$

On définit l'erreur de consistance de la manière suivante

$$\begin{aligned} R_\mathfrak{D}^\mathbf{u}(z) &= \eta(z) \mathbf{D}\mathbf{u}(z) - \eta_\mathfrak{D} \mathbb{D}^\mathfrak{D} \mathfrak{P}_{\mathbf{m}, \mathbf{g}} \mathbb{P}_\mathbf{c}^\tau \mathbf{u}, \quad \text{pour } z \in \mathfrak{D}, \mathfrak{D} \in \mathfrak{D}, \\ R_\mathfrak{D}^p(z) &= \mathbb{P}_m^\mathfrak{D} p - p(z), \quad \text{pour } z \in \mathfrak{D}, \mathfrak{D} \in \mathfrak{D}, \end{aligned}$$

on note pour $i \in \{\mathbf{u}, p\}$:

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{\sigma, \kappa}^i &= -\mathbf{R}_{\sigma, \mathcal{L}}^i = \frac{1}{m_\sigma} \int_\sigma R_\mathfrak{D}^i(s) \tilde{\mathbf{n}}_{\sigma\kappa} ds, \\ \mathbf{R}_{\sigma^*, \kappa^*}^i &= -\mathbf{R}_{\sigma^*, \mathcal{L}^*}^i = \frac{1}{m_{\sigma^*}} \int_{\sigma^*} R_\mathfrak{D}^i(s) \tilde{\mathbf{n}}_{\sigma^*\kappa^*} ds, \\ \mathbf{R}_\sigma^i &= |\mathbf{R}_{\sigma, \kappa}^i| = |\mathbf{R}_{\sigma, \mathcal{L}}^i|, \\ \mathbf{R}_{\sigma^*}^i &= |\mathbf{R}_{\sigma^*, \kappa^*}^i| = |\mathbf{R}_{\sigma^*, \mathcal{L}^*}^i|, \end{aligned}$$

et les normes L^2 correspondante pour $i = \mathbf{u}, p$:

$$\|\mathbf{R}_\sigma^i\|_2^2 = \sum_{\mathfrak{D}_{\sigma, \sigma^*} \in \mathfrak{D}} m_\mathfrak{D} |\mathbf{R}_\sigma^i|^2, \quad \|\mathbf{R}_{\sigma^*}^i\|_2^2 = \sum_{\mathfrak{D}_{\sigma, \sigma^*} \in \mathfrak{D}} m_\mathfrak{D} |\mathbf{R}_{\sigma^*}^i|^2.$$

Grâce à (VI.19) et (VI.20), le couple $(\mathbf{e}^\tau, e^\mathfrak{D}) \in \mathbb{E}_0 \times \mathbb{R}^\mathfrak{D}$ est solution de

$$\begin{cases} \operatorname{div}^\mathfrak{M}(-2\eta^\mathfrak{D} \mathbf{D}^\mathfrak{D} \mathbf{e}^\tau + e^\mathfrak{D} \operatorname{Id}) &= \mathbf{R}_\mathfrak{M}, \\ \operatorname{div}^{\mathfrak{M}*}(-2\eta^\mathfrak{D} \mathbf{D}^\mathfrak{D} \mathbf{e}^\tau + e^\mathfrak{D} \operatorname{Id}) &= \mathbf{R}_{\mathfrak{M}*}, \\ \operatorname{div}^\mathfrak{D}(\mathbf{e}^\tau) - \lambda d_\mathfrak{D}^2 \Delta^\mathfrak{D} e^\mathfrak{D} &= R_\mathfrak{D}, \\ \sum_{\mathfrak{D} \in \mathfrak{D}} m_\mathfrak{D} e^\mathfrak{D} &= 0, \end{cases} \quad (\text{VI.21})$$

où $\mathbf{R}_\mathfrak{M} = (\mathbf{R}_\kappa)_{\kappa \in \mathfrak{M}}$, $\mathbf{R}_{\mathfrak{M}*} = (\mathbf{R}_{\kappa*})_{\kappa* \in \mathfrak{M}*}$ et $R_\mathfrak{D} = (R_\mathfrak{D})_{\mathfrak{D} \in \mathfrak{D}}$ avec :

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_\kappa &= \frac{2}{m_\kappa} \sum_{\mathfrak{D} \in \mathfrak{D}_\kappa} m_\sigma \mathbf{R}_{\sigma, \kappa}^\mathbf{u} + \frac{1}{m_\kappa} \sum_{\mathfrak{D} \in \mathfrak{D}_\kappa} m_\sigma \mathbf{R}_{\sigma, \kappa}^p, \quad \forall \kappa \in \mathfrak{M}, \\ \mathbf{R}_{\kappa*} &= \frac{2}{m_{\kappa*}} \sum_{\mathfrak{D} \in \mathfrak{D}_{\kappa*}} m_{\sigma*} \mathbf{R}_{\sigma*, \kappa*}^\mathbf{u} + \frac{1}{m_{\kappa*}} \sum_{\mathfrak{D} \in \mathfrak{D}_{\kappa*}} m_{\sigma*} \mathbf{R}_{\sigma*, \kappa*}^p, \quad \forall \kappa* \in \mathfrak{M}*, \\ R_\mathfrak{D} &= \operatorname{div}^\mathfrak{D}(\mathfrak{P}_{\mathbf{m}, \mathbf{g}} \mathbb{P}_\mathbf{c}^\tau \mathbf{u}) - \lambda d_\mathfrak{D}^2 \Delta^\mathfrak{D} \mathbb{P}_m^\mathfrak{D} p, \quad \forall \mathfrak{D} \in \mathfrak{D}. \end{aligned}$$

Le Théorème VI.6 implique l'existence de $\tilde{\mathbf{e}}^\tau \in \mathbb{E}_0$, $\tilde{e}^\mathfrak{D} \in \mathbb{R}^\mathfrak{D}$ et $C > 0$ tels que :

$$\|\nabla^\mathfrak{D} \tilde{\mathbf{e}}^\tau\|_2 + \|\tilde{e}^\mathfrak{D}\|_2 \leq C (\|\nabla^\mathfrak{D} \mathbf{e}^\tau\|_2 + \|e^\mathfrak{D}\|_2), \quad (\text{VI.22})$$

et

$$\|\nabla^\mathfrak{D} \mathbf{e}^\tau\|_2^2 + \|e^\mathfrak{D}\|_2^2 \leq CB(\mathbf{e}^\tau, e^\mathfrak{D}; \tilde{\mathbf{e}}^\tau, \tilde{e}^\mathfrak{D}). \quad (\text{VI.23})$$

Grâce à la Définition VI.5 de B et de (VI.21), on a $B(\mathbf{e}^\tau, e^\mathfrak{D}; \tilde{\mathbf{e}}^\tau, \tilde{e}^\mathfrak{D}) = \llbracket \operatorname{div}^\tau(-2\eta^\mathfrak{D} \mathbf{D}^\mathfrak{D} \mathbf{e}^\tau + e^\mathfrak{D} \operatorname{Id}), \tilde{\mathbf{e}}^\tau \rrbracket_\mathcal{T} + (R^\mathfrak{D}, \tilde{e}^\mathfrak{D})_\mathfrak{D}$. On note $I := \llbracket \operatorname{div}^\tau(-2\eta^\mathfrak{D} \mathbf{D}^\mathfrak{D} \mathbf{e}^\tau + e^\mathfrak{D} \operatorname{Id}), \tilde{\mathbf{e}}^\tau \rrbracket_\mathcal{T}$ et $T := (R^\mathfrak{D}, \tilde{e}^\mathfrak{D})_\mathfrak{D}$.

Estimation de I . En utilisant le fait que $\tilde{\mathbf{e}}^\tau \in \mathbb{E}_0$ et la définition de I , on a

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2} \sum_{\kappa \in \mathfrak{M}} \sum_{\mathfrak{D} \in \mathfrak{D}_\kappa} m_\sigma (\mathbf{R}_{\sigma, \kappa}^p + 2\mathbf{R}_{\sigma, \kappa}^\mathbf{u}) \cdot \tilde{\mathbf{e}}_\kappa \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{\kappa* \in \mathfrak{M}*} \sum_{\mathfrak{D} \in \mathfrak{D}_{\kappa*}} m_{\sigma*} (\mathbf{R}_{\sigma*, \kappa*}^p + 2\mathbf{R}_{\sigma*, \kappa*}^\mathbf{u}) \cdot \tilde{\mathbf{e}}_{\kappa*}. \end{aligned}$$

En réorganisant la somme sur les diamants $\mathfrak{D} \in \mathfrak{D}$ et en remarquant que $\mathbf{R}_{\sigma, \kappa}^i = -\mathbf{R}_{\sigma, \mathfrak{L}}^i$ et $\mathbf{R}_{\sigma*, \kappa*}^i = -\mathbf{R}_{\sigma*, \mathfrak{L}*}^i$ pour $i = \mathbf{u}, p$, il vient que

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2} \sum_{\mathfrak{D} \in \mathfrak{D}} m_\sigma (\mathbf{R}_{\sigma, \kappa}^p + 2\mathbf{R}_{\sigma, \kappa}^\mathbf{u}) \cdot (\tilde{\mathbf{e}}_\kappa - \tilde{\mathbf{e}}_\mathfrak{L}) \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{\mathfrak{D} \in \mathfrak{D}} m_{\sigma*} (\mathbf{R}_{\sigma*, \kappa*}^p + 2\mathbf{R}_{\sigma*, \kappa*}^\mathbf{u}) \cdot (\tilde{\mathbf{e}}_{\kappa*} - \tilde{\mathbf{e}}_{\mathfrak{L}*}). \end{aligned}$$

La Définition IV.1 du gradient discret et l'inégalité de Cauchy-Schwarz impliquent que

$$\begin{aligned} I &= - \sum_{\mathfrak{D} \in \mathfrak{D}} \frac{m_\mathfrak{D}}{\sin(\alpha_\mathfrak{D})} (\mathbf{R}_{\sigma, \kappa}^p + 2\mathbf{R}_{\sigma, \kappa}^\mathbf{u}) \cdot ((\nabla^\mathfrak{D} \tilde{\mathbf{e}}^\tau) \cdot \vec{\tau}_{\kappa, \mathfrak{L}}) \\ &\quad - \sum_{\mathfrak{D} \in \mathfrak{D}} \frac{m_\mathfrak{D}}{\sin(\alpha_\mathfrak{D})} (\mathbf{R}_{\sigma*, \kappa*}^p + 2\mathbf{R}_{\sigma*, \kappa*}^\mathbf{u}) \cdot ((\nabla^\mathfrak{D} \tilde{\mathbf{e}}^\tau) \cdot \vec{\tau}_{\kappa*, \mathfrak{L}*}) \\ &\leq \|\nabla^\mathfrak{D} \tilde{\mathbf{e}}^\tau\|_2 \frac{C}{\sin(\alpha_\mathcal{T})} [\|\mathbf{R}_\sigma^\mathbf{u}\|_2 + \|\mathbf{R}_{\sigma*}^\mathbf{u}\|_2 + \|\mathbf{R}_\sigma^p\|_2 + \|\mathbf{R}_{\sigma*}^p\|_2]. \end{aligned} \quad (\text{VI.24})$$

Estimation de T . Tout d'abord, le Corollaire IV.18 et le Lemme IV.20 donnent

$$\|\operatorname{div}^\mathfrak{D}(\mathfrak{P}_{\mathbf{m}, \mathbf{g}} \mathbb{P}_\mathbf{c}^\tau \mathbf{u})\|_2 \leq C \operatorname{size}(\mathcal{T}) \|\mathbf{u}\|_{H^2}.$$

On applique l'inégalité de Cauchy-Schwarz à $(\operatorname{div}^\mathfrak{D}(\mathfrak{P}_{\mathbf{m}, \mathbf{g}} \mathbb{P}_\mathbf{c}^\tau \mathbf{u}), \tilde{e}^\mathfrak{D})_\mathfrak{D}$ pour obtenir

$$(\operatorname{div}^\mathfrak{D}(\mathfrak{P}_{\mathbf{m}, \mathbf{g}} \mathbb{P}_\mathbf{c}^\tau \mathbf{u}), \tilde{e}^\mathfrak{D})_\mathfrak{D} \leq C \operatorname{size}(\mathcal{T}) \|\mathbf{u}\|_{H^2} \|\tilde{e}^\mathfrak{D}\|_2. \quad (\text{VI.25})$$

En réorganisant la somme sur les côtés des diamants $\mathfrak{s} \in \mathfrak{S}$ dans le terme $T_1 := -(\lambda d_\mathfrak{D}^2 \Delta^\mathfrak{D} \mathbb{P}_m^\mathfrak{D} p, \tilde{e}^\mathfrak{D})_\mathfrak{D}$, on a de la même manière que dans la Remarque IV.12

$$T_1 = -\lambda \sum_{\mathfrak{D} \in \mathfrak{D}} m_\mathfrak{D} \tilde{e}^\mathfrak{D} d_\mathfrak{D}^2 \Delta^\mathfrak{D} \mathbb{P}_m^\mathfrak{D} p = \lambda \sum_{\mathfrak{s} = \mathfrak{D} | \mathfrak{D}' \in \mathfrak{S}} (d_\mathfrak{D}^2 + d_{\mathfrak{D}'}^2) (\mathbb{P}_m^{\mathfrak{D}'} p - \mathbb{P}_m^\mathfrak{D} p) (\tilde{e}^{\mathfrak{D}'} - \tilde{e}^\mathfrak{D}).$$

L'inégalité de Cauchy-Schwarz et la semi-norme $|\cdot|_h$ (IV.15) conduisent à

$$\begin{aligned} |T_1| &\leq \lambda \left(\sum_{s=\mathcal{D}|\mathcal{D}' \in \mathcal{G}} (d_{\mathcal{D}}^2 + d_{\mathcal{D}'}^2) (\mathbb{P}_m^{\mathcal{D}'} p - \mathbb{P}_m^{\mathcal{D}} p)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{s=\mathcal{D}|\mathcal{D}' \in \mathcal{G}} (d_{\mathcal{D}}^2 + d_{\mathcal{D}'}^2) (\tilde{e}^{\mathcal{D}'} - \tilde{e}^{\mathcal{D}})^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq 2\text{size}(\mathcal{T}) \lambda |\tilde{e}^{\mathcal{D}}|_h \left(\sum_{s=\mathcal{D}|\mathcal{D}' \in \mathcal{G}} (\mathbb{P}_m^{\mathcal{D}'} p - \mathbb{P}_m^{\mathcal{D}} p)^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

En utilisant les Lemmes IV.13 et IV.23, on obtient

$$|T_1| \leq C\text{size}(\mathcal{T}) \|\tilde{e}^{\mathcal{D}}\|_2 \|\nabla p\|_2. \quad (\text{VI.26})$$

On remarque que $T = (\text{div}^{\mathcal{D}}(\mathfrak{P}_{m,g} \mathbb{P}_{\mathcal{C}}^{\mathcal{T}} \mathbf{u}), \tilde{e}^{\mathcal{D}})_{\mathcal{D}} + T_1$ et grâce à (VI.25) et (VI.26), on en déduit

$$|T| \leq C\text{size}(\mathcal{T}) \|\tilde{e}^{\mathcal{D}}\|_2 (\|\mathbf{u}\|_{H^2} + \|\nabla p\|_2). \quad (\text{VI.27})$$

Estimation de B . En combinant (VI.24) et (VI.27), (VI.23) devient

$$\begin{aligned} \|\nabla^{\mathcal{D}} \mathbf{e}^{\mathcal{T}}\|_2^2 + \|e^{\mathcal{D}}\|_2^2 &\leq \frac{C}{\sin(\alpha_{\mathcal{T}})} \|\nabla^{\mathcal{D}} \tilde{\mathbf{e}}^{\mathcal{T}}\|_2 [\|\mathbf{R}_{\sigma}^{\mathbf{u}}\|_2 + \|\mathbf{R}_{\sigma^*}^{\mathbf{u}}\|_2 + \|\mathbf{R}_{\sigma}^p\|_2 + \|\mathbf{R}_{\sigma^*}^p\|_2] \\ &\quad + C\text{size}(\mathcal{T}) \|\tilde{e}^{\mathcal{D}}\|_2 (\|\mathbf{u}\|_{H^2} + \|\nabla p\|_2). \end{aligned}$$

Finalement, (VI.22) donne

$$\begin{aligned} \|\nabla^{\mathcal{D}} \mathbf{e}^{\mathcal{T}}\|_2^2 + \|e^{\mathcal{D}}\|_2^2 &\leq C(\|\mathbf{R}_{\sigma}^{\mathbf{u}}\|_2 + \|\mathbf{R}_{\sigma^*}^{\mathbf{u}}\|_2 + \|\mathbf{R}_{\sigma}^p\|_2 + \|\mathbf{R}_{\sigma^*}^p\|_2) (\|\nabla^{\mathcal{D}} \mathbf{e}^{\mathcal{T}}\|_2 + \|e^{\mathcal{D}}\|_2) \\ &\quad + C\text{size}(\mathcal{T}) (\|\mathbf{u}\|_{H^2} + \|\nabla p\|_2) (\|\nabla^{\mathcal{D}} \mathbf{e}^{\mathcal{T}}\|_2 + \|e^{\mathcal{D}}\|_2). \end{aligned}$$

En utilisant le résultat du Lemme V.10, on obtient

$$\begin{aligned} \|\nabla^{\mathcal{D}} \mathbf{e}^{\mathcal{T}}\|_2^2 + \|e^{\mathcal{D}}\|_2^2 &\leq C(\|\mathbf{R}_{\sigma}^{\mathbf{u}}\|_2 + \|\mathbf{R}_{\sigma^*}^{\mathbf{u}}\|_2) (\|\nabla^{\mathcal{D}} \mathbf{e}^{\mathcal{T}}\|_2 + \|e^{\mathcal{D}}\|_2) \\ &\quad + C\text{size}(\mathcal{T}) (\|\mathbf{u}\|_{H^2} + \|\nabla p\|_2) (\|\nabla^{\mathcal{D}} \mathbf{e}^{\mathcal{T}}\|_2 + \|e^{\mathcal{D}}\|_2). \end{aligned} \quad (\text{VI.28})$$

Il reste à montrer les estimations des erreurs de consistance en vitesse.

VI.4.1 Erreur de consistance de $\mathbf{R}_{\sigma}^{\mathbf{u}}$

On s'intéresse maintenant à l'erreur de consistance $R_{\mathcal{D}}^{\mathbf{u}}$, on la décompose en quatre contributions $R_{\mathcal{D}}^{\mathbf{u},\eta}$, $R_{\mathcal{D}}^{\mathbf{u},\text{Du}}$, $R_{\mathcal{D}}^{\mathbf{u},z}$ et $R_{\mathcal{D}}^{\mathbf{u},bd}$, respectivement l'erreur de consistance due à l'approximation des flux, à l'approximation du tenseur des taux de déformation, à l'approximation de la viscosité et à l'approximation de la condition aux bords :

$$R_{\mathcal{D}}^{\mathbf{u}}(z) = R_{\mathcal{D}}^{\mathbf{u},\eta}(z) + R_{\mathcal{D}}^{\mathbf{u},\text{Du}} + R_{\mathcal{D}}^{\mathbf{u},z} + R_{\mathcal{D}}^{\mathbf{u},bd}, \quad (\text{VI.29})$$

où, pour $z \in \mathcal{D}$,

$$\begin{aligned} R_{\mathcal{D}}^{\mathbf{u},\eta}(z) &= \eta(z) \text{Du}(z) - \frac{1}{m_{\mathcal{D}}} \int_{\mathcal{D}} \eta(x) \text{Du}(x) dx, \\ R_{\mathcal{D}}^{\mathbf{u},\text{Du}} &= \frac{1}{m_{\mathcal{D}}} \int_{\mathcal{D}} \eta(x) (\text{Du}(x) - \text{D}^{\mathcal{D}} \mathbb{P}_{\mathcal{C}}^{\mathcal{T}} \mathbf{u}) dx, \\ R_{\mathcal{D}}^{\mathbf{u},z} &= \left(\frac{1}{m_{\mathcal{D}}} \int_{\mathcal{D}} \eta(x) dx - \eta_{\mathcal{D}} \right) \text{D}^{\mathcal{D}} \mathbb{P}_{\mathcal{C}}^{\mathcal{T}} \mathbf{u}, \\ R_{\mathcal{D}}^{\mathbf{u},bd} &= \eta_{\mathcal{D}} (\text{D}^{\mathcal{D}} \mathbb{P}_{\mathcal{C}}^{\mathcal{T}} \mathbf{u} - \text{D}^{\mathcal{D}} \mathfrak{P}_{m,g} \mathbb{P}_{\mathcal{C}}^{\mathcal{T}} \mathbf{u}). \end{aligned}$$

Afin de contrôler $\mathbf{R}_{\sigma}^{\mathbf{u}}$ et $\mathbf{R}_{\sigma^*}^{\mathbf{u}}$, on va estimer séparément les quatre termes de (VI.29).

Proposition VI.11 (Erreur due aux gradients)

On suppose que η vérifie (VI.2). Soit \mathcal{T} un maillage DDFV associé à Ω . Il existe une constante $C > 0$, dépendant uniquement de $\text{reg}(\mathcal{T})$ et \overline{C}_{η} , telle que pour toute fonction \mathbf{u} de $(H^2(\Omega))^2$, on a

$$\|R_{\mathcal{D}}^{\mathbf{u},\text{Du}}\|_2 \leq C\text{size}(\mathcal{T}) \|\nabla \mathbf{u}\|_{H^1}.$$

Démonstration : L'inégalité de Jensen et (VI.2) donnent

$$\|R_{\mathcal{D}}^{\mathbf{u}, \mathbf{Du}}\|_2^2 \leq \sum_{\mathcal{D} \in \mathcal{D}} \int_{\mathcal{D}} |\eta(x)(\mathbf{Du}(x) - \mathbf{D}^{\mathcal{D}} \mathbb{P}_{\mathcal{C}}^{\tau} \mathbf{u})|^2 dx \leq \overline{C}_{\eta}^2 \|\mathbf{Du} - \mathbf{D}^{\mathcal{D}} \mathbb{P}_{\mathcal{C}}^{\tau} \mathbf{u}\|_2^2.$$

La remarque IV.8 implique que

$$\|\mathbf{Du} - \mathbf{D}^{\mathcal{D}} \mathbb{P}_{\mathcal{C}}^{\tau} \mathbf{u}\|_2 \leq \|\nabla \mathbf{u} - \nabla^{\mathcal{D}} \mathbb{P}_{\mathcal{C}}^{\tau} \mathbf{u}\|_2,$$

puis, appliquant le Lemme IV.16, on conclut le résultat. \blacksquare

Proposition VI.12 (Erreur due à la viscosité)

On suppose que η vérifie (VI.3). Soit \mathcal{T} un maillage DDFV associé à Ω . Il existe une constante $C > 0$, dépendant uniquement de $\text{reg}(\mathcal{T})$ et C_{η} , telle que pour toute fonction \mathbf{u} de $(H^2(\Omega))^2$, on a

$$\|R_{\mathcal{D}}^{\mathbf{u}, z}\|_2 \leq C \text{size}(\mathcal{T}) \|\nabla \mathbf{u}\|_{H^1}.$$

Démonstration : L'inégalité de Jensen implique

$$\|R_{\mathcal{D}}^{\mathbf{u}, z}\|_2^2 \leq \sum_{\mathcal{D} \in \mathcal{D}} m_{\mathcal{D}} \frac{1}{m_{\mathcal{D}}} \left(\int_{\mathcal{D}} \int_{\overline{\mathcal{D}}} |\eta(x) - \eta(z)|^2 d\mu_{\mathcal{D}}(z) dx \right) \|\mathbf{D}^{\mathcal{D}} \mathbb{P}_{\mathcal{C}}^{\tau} \mathbf{u}\|_{\mathcal{F}}^2.$$

Grâce à (VI.3) et la Proposition VI.1, on obtient

$$\|R_{\mathcal{D}}^{\mathbf{u}, z}\|_2^2 \leq C_{\eta}^2 \sum_{\mathcal{D} \in \mathcal{D}} \left(\int_{\mathcal{D}} \int_{\overline{\mathcal{D}}} |x - z|^2 d\mu_{\mathcal{D}}(z) dx \right) \|\mathbf{D}^{\mathcal{D}} \mathbb{P}_{\mathcal{C}}^{\tau} \mathbf{u}\|_{\mathcal{F}}^2 \leq C \text{size}(\mathcal{T})^2 \|\nabla^{\mathcal{D}} \mathbb{P}_{\mathcal{C}}^{\tau} \mathbf{u}\|_2^2.$$

Finalement, le Corollaire IV.17 donne le résultat. \blacksquare

Proposition VI.13 (Erreur due aux conditions aux bords)

On suppose que η vérifie (VI.2). Soit \mathcal{T} un maillage DDFV associé à Ω . Il existe une constante $C > 0$, dépendant uniquement de $\text{reg}(\mathcal{T})$ et \overline{C}_{η} , telle que pour toute fonction \mathbf{u} de $(H^2(\Omega))^2$, dont la trace est notée $\mathbf{g} = \gamma(\mathbf{u})$, on a

$$\|R_{\mathcal{D}}^{\mathbf{u}, bd}\|_2 \leq C \text{size}(\mathcal{T}) \|\mathbf{u}\|_{H^2}.$$

Démonstration : L'inégalité (VI.2) et la Proposition VI.1 impliquent

$$\|R_{\mathcal{D}}^{\mathbf{u}, bd}\|_2^2 \leq \overline{C}_{\eta}^2 \|\mathbf{D}^{\mathcal{D}} (\mathbb{P}_{\mathcal{C}}^{\tau} \mathbf{u} - \mathfrak{P}_{\mathbf{m}, \mathbf{g}} \mathbb{P}_{\mathcal{C}}^{\tau} \mathbf{u})\|_2^2 \leq C \|\nabla^{\mathcal{D}} (\mathbb{P}_{\mathcal{C}}^{\tau} \mathbf{u} - \mathfrak{P}_{\mathbf{m}, \mathbf{g}} \mathbb{P}_{\mathcal{C}}^{\tau} \mathbf{u})\|_2^2,$$

et finalement, le Lemme IV.20 conclut le résultat. \blacksquare

Proposition VI.14 (Erreur due aux flux)

On suppose que η vérifie (VI.2) et (VI.3). Soit \mathcal{T} un maillage DDFV associé à Ω . Il existe une constante $C > 0$, dépendant uniquement de $\text{reg}(\mathcal{T})$, C_{η} et \overline{C}_{η} , telle que pour toute fonction \mathbf{u} de $(H^2(\Omega))^2$, on a

$$\sum_{\mathcal{D}, \sigma^* \in \mathcal{D}} m_{\mathcal{D}} \left[\frac{1}{m_{\sigma}} \int_{\sigma} \|R_{\mathcal{D}}^{\mathbf{u}, \eta}(s)\|_{\mathcal{F}}^2 ds + \frac{1}{m_{\sigma^*}} \int_{\sigma^*} \|R_{\mathcal{D}}^{\mathbf{u}, \eta}(s)\|_{\mathcal{F}}^2 ds \right] \leq C \text{size}(\mathcal{T})^2 \|\nabla \mathbf{u}\|_{H^1}^2.$$

Démonstration : On applique l'inégalité de Jensen pour obtenir

$$\|R_{\mathcal{D}}^{\mathbf{u}, \eta}(s)\|_{\mathcal{F}}^2 \leq \frac{1}{m_{\mathcal{D}}} \int_{\mathcal{D}} \|\eta(s) \mathbf{Du}(s) - \eta(x) \mathbf{Du}(x)\|_{\mathcal{F}}^2 dx.$$

Puis, en ajoutant $0 = \eta(s) \mathbf{Du}(x) - \eta(s) \mathbf{Du}(x)$, l'inégalité de Cauchy-Schwarz implique

$$\|R_{\mathcal{D}}^{\mathbf{u}, \eta}(s)\|_{\mathcal{F}}^2 \leq \frac{2}{m_{\mathcal{D}}} \int_{\mathcal{D}} |\eta(s) - \eta(x)|^2 \|\mathbf{Du}(x)\|_{\mathcal{F}}^2 dx + \frac{2}{m_{\mathcal{D}}} \int_{\mathcal{D}} |\eta(s)|^2 \|\mathbf{Du}(s) - \mathbf{Du}(x)\|_{\mathcal{F}}^2 dx.$$

Les inégalités (VI.2) et (VI.3) donnent

$$\|R_{\mathcal{D}}^{\mathbf{u},\eta}(s)\|_{\mathcal{F}}^2 \leq \text{size}(\mathcal{T})^2 \frac{2C_{\eta}^2}{m_{\mathcal{D}}} \int_{\mathcal{D}} \|\mathbf{Du}(x)\|_{\mathcal{F}}^2 dx + \frac{2\overline{C}_{\eta}^2}{m_{\mathcal{D}}} \int_{\mathcal{D}} \|\mathbf{Du}(s) - \mathbf{Du}(x)\|_{\mathcal{F}}^2 dx. \quad (\text{VI.30})$$

On fait la moyenne de la seconde intégrale du membre de droite de (VI.30) sur σ et on applique une extension matricielle du Lemme I.12

$$\frac{1}{m_{\mathcal{D}}m_{\sigma}} \int_{\sigma} \int_{\mathcal{D}} \|\mathbf{Du}(s) - \mathbf{Du}(x)\|_{\mathcal{F}}^2 dx ds \leq C \frac{d_{\mathcal{D}}^3}{m_{\sigma}m_{\mathcal{D}}} \int_{\mathcal{D}} |\nabla(\mathbf{Du}(y))|^2 dy.$$

Grâce à la relation (I.1), il vient que

$$\sum_{\mathcal{D}_{\sigma}, \sigma^* \in \mathcal{D}} m_{\mathcal{D}} \frac{1}{m_{\mathcal{D}}m_{\sigma}} \int_{\sigma} \int_{\mathcal{D}} \|\mathbf{Du}(s) - \mathbf{Du}(x)\|_{\mathcal{F}}^2 dx ds \leq C \text{size}(\mathcal{T})^2 \|\nabla \mathbf{u}\|_{H^1}^2.$$

Donc on obtient

$$\sum_{\mathcal{D}_{\sigma}, \sigma^* \in \mathcal{D}} m_{\mathcal{D}} \frac{1}{m_{\sigma}} \int_{\sigma} \|R_{\mathcal{D}}^{\mathbf{u},\eta}(s)\|_{\mathcal{F}}^2 ds \leq C \text{size}(\mathcal{T})^2 \|\nabla \mathbf{u}\|_{H^1}^2.$$

On procède de la même manière pour le terme sur les arêtes duales σ^* . ■

Maintenant on peut contrôler $\mathbf{R}_{\sigma}^{\mathbf{u}}$ et $\mathbf{R}_{\sigma^*}^{\mathbf{u}}$, comme suit.

Lemme VI.15

On suppose que η vérifie (VI.2) et (VI.3). Soit \mathcal{T} un maillage DDFV associé à Ω . Il existe une constante $C > 0$, dépendant uniquement de $\text{reg}(\mathcal{T})$, C_{η} et \overline{C}_{η} , telle que pour toute fonction \mathbf{u} de $(H^2(\Omega))^2$, on a

$$\|\mathbf{R}_{\sigma}^{\mathbf{u}}\|_2 + \|\mathbf{R}_{\sigma^*}^{\mathbf{u}}\|_2 \leq C \text{size}(\mathcal{T}) \|\nabla \mathbf{u}\|_{H^1}.$$

Démonstration : Grâce à (VI.29) et à l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on obtient

$$\sum_{\mathcal{D}_{\sigma}, \sigma^* \in \mathcal{D}} m_{\mathcal{D}} |\mathbf{R}_{\sigma}^{\mathbf{u}}|^2 \leq 4 \sum_{\mathcal{D}_{\sigma}, \sigma^* \in \mathcal{D}} m_{\mathcal{D}} \frac{1}{m_{\sigma}} \int_{\sigma} \|R_{\mathcal{D}}^{\mathbf{u},\eta}(s)\|_{\mathcal{F}}^2 ds + 4 \|\mathbf{R}_{\mathcal{D}}^{\mathbf{u},\text{Du}}\|_2^2 + 4 \|R_{\mathcal{D}}^{\mathbf{u},z}\|_2^2 + 4 \|R_{\mathcal{D}}^{\mathbf{u},bd}\|_2^2.$$

On conclut en utilisant les Propositions VI.11, VI.12, VI.13 et VI.14. On procède de la même manière pour l'estimation de $\mathbf{R}_{\sigma^*}^{\mathbf{u}}$. ■

VI.4.2 Fin de la démonstration du Théorème VI.10

Nous pouvons maintenant rassembler tous les résultats précédents en vue de conclure la démonstration du Théorème VI.10, commencé au début de la section.

Démonstration : On a noté $\mathbf{e}^{\mathcal{T}} = \mathfrak{P}_{\mathbf{m},\mathbf{g}} \mathbb{P}_{\mathbf{c}}^{\mathcal{T}} \mathbf{u} - \mathbf{u}^{\mathcal{T}}$ et $e^{\mathcal{D}} = \mathbb{P}_{\mathbf{m}}^{\mathcal{D}} p - p^{\mathcal{D}}$, et obtenu l'estimation suivante (VI.28)

$$\begin{aligned} \|\nabla^{\mathcal{D}} \mathbf{e}^{\mathcal{T}}\|_2^2 + \|e^{\mathcal{D}}\|_2^2 &\leq C (\|\mathbf{R}_{\sigma}^{\mathbf{u}}\|_2 + \|\mathbf{R}_{\sigma^*}^{\mathbf{u}}\|_2) (\|\nabla^{\mathcal{D}} \mathbf{e}^{\mathcal{T}}\|_2 + \|e^{\mathcal{D}}\|_2) \\ &\quad + C \text{size}(\mathcal{T}) (\|\mathbf{u}\|_{H^2} + \|\nabla p\|_2) (\|\nabla^{\mathcal{D}} \mathbf{e}^{\mathcal{T}}\|_2 + \|e^{\mathcal{D}}\|_2). \end{aligned}$$

Le Lemme VI.15 implique que

$$\|\nabla^{\mathcal{D}} \mathbf{e}^{\mathcal{T}}\|_2 \leq C \text{size}(\mathcal{T}) \quad \text{et} \quad \|e^{\mathcal{D}}\|_2 \leq C \text{size}(\mathcal{T}). \quad (\text{VI.31})$$

Estimation de $\|\mathbf{u} - \mathbf{u}^{\mathcal{T}}\|_2$: On a

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}^{\mathcal{T}}\|_2 \leq \|\mathbf{u} - \mathfrak{P}_{\mathbf{m},\mathbf{g}} \mathbb{P}_{\mathbf{c}}^{\mathcal{T}} \mathbf{u}\|_2 + \|\mathfrak{P}_{\mathbf{m},\mathbf{g}} \mathbb{P}_{\mathbf{c}}^{\mathcal{T}} \mathbf{u} - \mathbf{u}^{\mathcal{T}}\|_2.$$

Le Lemme IV.22 et l'inégalité de Poincaré (Théorème IV.15) donnent

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}^{\mathcal{T}}\|_2 \leq C \text{size}(\mathcal{T}) \|\nabla \mathbf{u}\|_{H^1} + C \|\nabla^{\mathcal{D}} \mathfrak{P}_{\mathbf{m},\mathbf{g}} \mathbb{P}_{\mathbf{c}}^{\mathcal{T}} \mathbf{u} - \nabla^{\mathcal{D}} \mathbf{u}^{\mathcal{T}}\|_2.$$

Finalement, (VI.31) conclut l'estimation de $\|\mathbf{u} - \mathbf{u}^{\mathcal{T}}\|_2$.

Estimation de $\|\nabla \mathbf{u} - \nabla^{\mathcal{D}} \mathbf{u}^{\tau}\|_2$: On a

$$\|\nabla \mathbf{u} - \nabla^{\mathcal{D}} \mathbf{u}^{\tau}\|_2 \leq \|\nabla \mathbf{u} - \nabla^{\mathcal{D}} \mathbb{P}_{\mathcal{C}}^{\tau} \mathbf{u}\|_2 + \|\nabla^{\mathcal{D}} \mathbb{P}_{\mathcal{C}}^{\tau} \mathbf{u} - \nabla^{\mathcal{D}} \mathfrak{P}_{m,g} \mathbb{P}_{\mathcal{C}}^{\tau} \mathbf{u}\|_2 + \|\nabla^{\mathcal{D}} \mathfrak{P}_{m,g} \mathbb{P}_{\mathcal{C}}^{\tau} \mathbf{u} - \nabla^{\mathcal{D}} \mathbf{u}^{\tau}\|_2.$$

Finalement, les Lemmes IV.16, IV.20 et (VI.31) impliquent l'estimation de $\|\nabla \mathbf{u} - \nabla^{\mathcal{D}} \mathbf{u}^{\tau}\|_2$.

Estimation de $\|p - p^{\mathcal{D}}\|_2$: On a

$$\|p - p^{\mathcal{D}}\|_2 \leq \|p - \mathbb{P}_m^{\mathcal{D}} p\|_2 + \|\mathbb{P}_m^{\mathcal{D}} p - p^{\mathcal{D}}\|_2.$$

On conclut grâce à la Proposition IV.24 et (VI.31). ■

VI.5 Lien avec le schéma MAC

Le schéma décalé le plus célèbre est le schéma MAC (Marker and Cell) [HW65, Nic92a] qui se limite à des maillages rectangulaires. On montre dans cette section que, sur des maillages rectangulaires avec une viscosité constante égale à 1, notre schéma DDFV (VI.4) est équivalent (excepté sur le bord) à des schémas MAC découplés écrits sur deux maillages différents et décalés. Pour cela, on note $\mathbf{f} = \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}$ et $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$. On va utiliser dans cette section les notations classiques des méthodes MAC de la Figure VI.3.

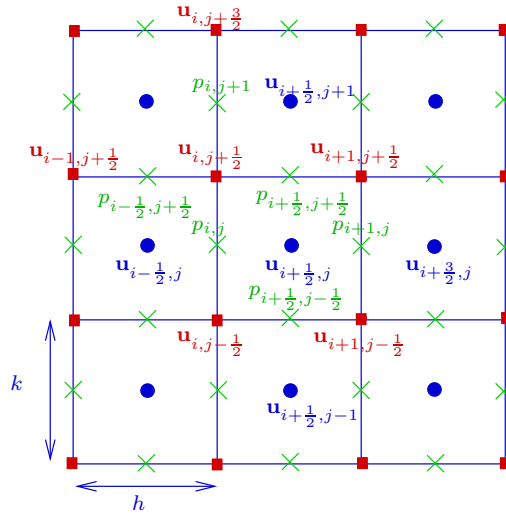


FIG. VI.3 – Inconnues DDFV sur le domaine $[0, 3h] \times [0, 3k]$

Réécrivons le schéma DDFV (VI.4) avec ces notations. L'équation correspondant au bilan de quantité de mouvement pour une maille primale $\kappa_{i+\frac{1}{2},j}$ ne touchant pas le bord, est donnée par :

$$f_{i+\frac{1}{2},j} = -\frac{u_{i+\frac{3}{2},j} - 2u_{i+\frac{1}{2},j} + u_{i-\frac{1}{2},j}}{h^2} - \frac{u_{i+\frac{1}{2},j+1} - 2u_{i+\frac{1}{2},j} + u_{i+\frac{1}{2},j-1}}{k^2} + \frac{p_{i+1,j} - p_{i,j}}{h}, \quad (\text{VI.32})$$

et

$$g_{i+\frac{1}{2},j} = -\frac{v_{i+\frac{3}{2},j} - 2v_{i+\frac{1}{2},j} + v_{i-\frac{1}{2},j}}{h^2} - \frac{v_{i+\frac{1}{2},j+1} - 2v_{i+\frac{1}{2},j} + v_{i+\frac{1}{2},j-1}}{k^2} + \frac{p_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} - p_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}}{k}, \quad (\text{VI.33})$$

et pour une maille duale $\kappa_{i,j+\frac{1}{2}}^* \in \mathfrak{M}^*$:

$$f_{i,j+\frac{1}{2}} = -\frac{u_{i+1,j+\frac{1}{2}} - 2u_{i,j+\frac{1}{2}} + u_{i-1,j+\frac{1}{2}}}{h^2} - \frac{u_{i,j+\frac{3}{2}} - 2u_{i,j+\frac{1}{2}} + u_{i,j-\frac{1}{2}}}{k^2} + \frac{p_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} - p_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}}{h}, \quad (\text{VI.34})$$

et

$$g_{i,j+\frac{1}{2}} = -\frac{v_{i+1,j+\frac{1}{2}} - 2v_{i,j+\frac{1}{2}} + v_{i-1,j+\frac{1}{2}}}{h^2} - \frac{v_{i,j+\frac{3}{2}} - 2v_{i,j+\frac{1}{2}} + v_{i,j-\frac{1}{2}}}{k^2} + \frac{p_{i,j+1} - p_{i,j}}{k}. \quad (\text{VI.35})$$

L'équation de bilan de masse s'écrit pour un diamant intérieur $\mathcal{D}_{i+1,j}$

$$\frac{u_{i+\frac{3}{2},j} - u_{i+\frac{1}{2},j}}{h} + \frac{v_{i+1,j+\frac{1}{2}} - v_{i+1,j-\frac{1}{2}}}{k} = 0, \quad (\text{VI.36})$$

et pour un diamant intérieur $\mathcal{D}_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}$

$$\frac{u_{i+1,j+\frac{1}{2}} - u_{i,j+\frac{1}{2}}}{h} + \frac{v_{i+\frac{1}{2},j+1} - v_{i+\frac{1}{2},j}}{k} = 0. \quad (\text{VI.37})$$

Pour les deux schémas MAC écrits sur deux maillages différents et décalés correspondant aux Figures VI.4 et VI.5, il faut remarquer que le domaine considéré est un peu plus grand que le domaine de la Figure VI.3.

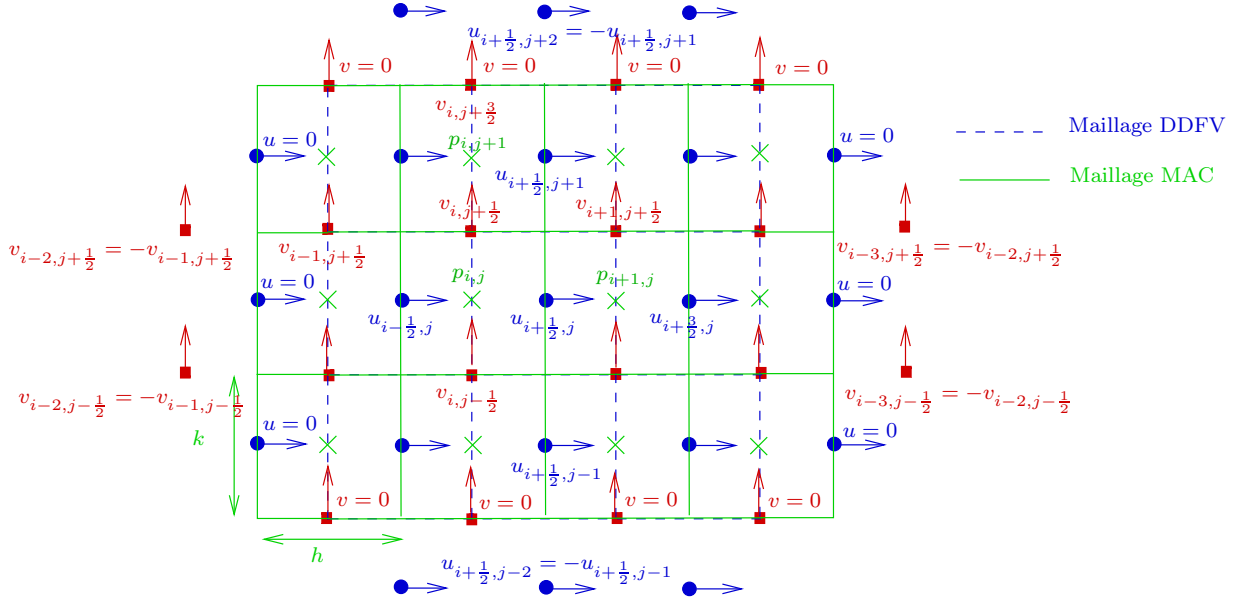


FIG. VI.4 – Inconnues MAC sur le domaine $[-\frac{h}{2}, 3h + \frac{h}{2}] \times [0, 3k]$

Le schéma MAC correspondant au maillage de la Figure VI.4 s'écrit alors

$$f_{i+\frac{1}{2},j} = -\frac{u_{i+\frac{3}{2},j} - 2u_{i+\frac{1}{2},j} + u_{i-\frac{1}{2},j}}{h^2} - \frac{u_{i+\frac{1}{2},j+1} - 2u_{i+\frac{1}{2},j} + u_{i+\frac{1}{2},j-1}}{k^2} + \frac{p_{i+1,j} - p_{i,j}}{h}, \quad (\text{VI.38})$$

et

$$g_{i,j+\frac{1}{2}} = -\frac{v_{i+1,j+\frac{1}{2}} - 2v_{i,j+\frac{1}{2}} + v_{i-1,j+\frac{1}{2}}}{h^2} - \frac{v_{i,j+\frac{3}{2}} - 2v_{i,j+\frac{1}{2}} + v_{i,j-\frac{1}{2}}}{k^2} + \frac{p_{i,j+1} - p_{i,j}}{k}. \quad (\text{VI.39})$$

L'équation de bilan de masse s'écrit alors

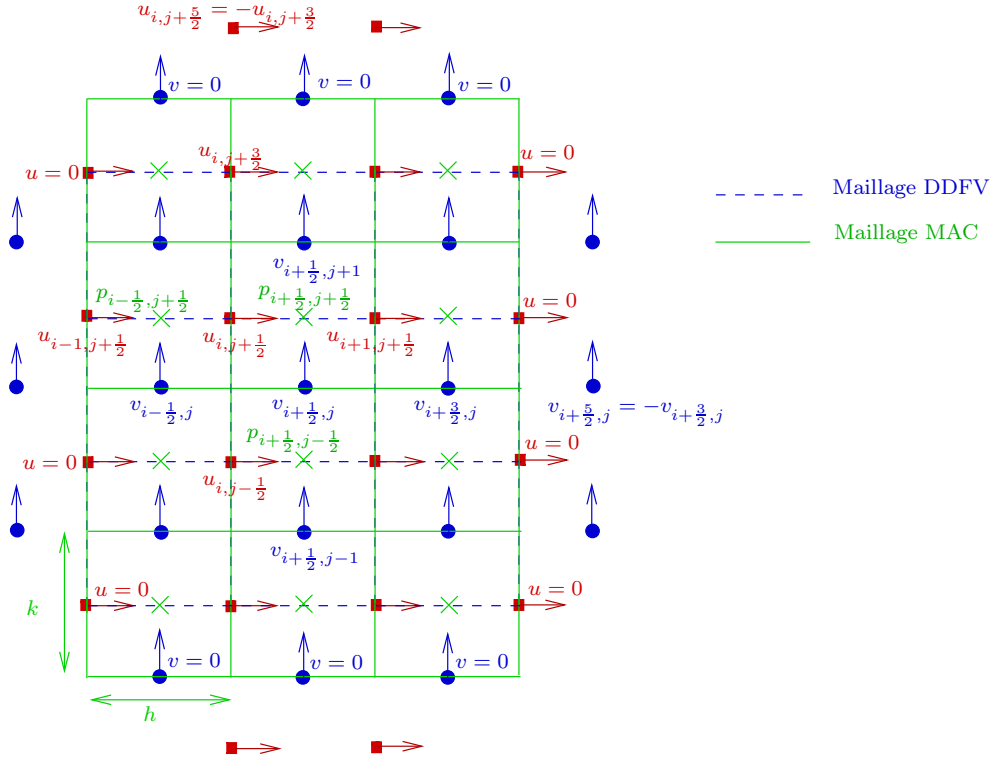
$$\frac{u_{i+\frac{3}{2},j} - u_{i+\frac{1}{2},j}}{h} + \frac{v_{i+1,j+\frac{1}{2}} - v_{i+1,j-\frac{1}{2}}}{k} = 0. \quad (\text{VI.40})$$

Et le schéma MAC correspondant au maillage de la Figure VI.5 s'écrit

$$f_{i,j+\frac{1}{2}} = -\frac{u_{i+1,j+\frac{1}{2}} - 2u_{i,j+\frac{1}{2}} + u_{i-1,j+\frac{1}{2}}}{h^2} - \frac{u_{i,j+\frac{3}{2}} - 2u_{i,j+\frac{1}{2}} + u_{i,j-\frac{1}{2}}}{k^2} + \frac{p_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} - p_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}}{h}, \quad (\text{VI.41})$$

et

$$g_{i+\frac{1}{2},j} = -\frac{v_{i+\frac{3}{2},j} - 2v_{i+\frac{1}{2},j} + v_{i-\frac{1}{2},j}}{h^2} - \frac{v_{i+\frac{1}{2},j+1} - 2v_{i+\frac{1}{2},j} + v_{i+\frac{1}{2},j-1}}{k^2} + \frac{p_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} - p_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}}}{k}. \quad (\text{VI.42})$$

FIG. VI.5 – Inconnues MAC sur le domaine $[0, 3h] \times [-\frac{k}{2}, 3k + \frac{k}{2}]$

L'équation de bilan de masse s'écrit alors

$$\frac{u_{i+1,j+\frac{1}{2}} - u_{i,j+\frac{1}{2}}}{h} + \frac{v_{i+\frac{1}{2},j+1} - v_{i+\frac{1}{2},j}}{k} = 0. \quad (\text{VI.43})$$

Ainsi on a que les équations coïncident entre le schéma DDFV (VI.4) et deux schémas MAC décalés, car (VI.38) \iff (VI.32), (VI.39) \iff (VI.35), (VI.41) \iff (VI.34), (VI.42) \iff (VI.33), (VI.40) \iff (VI.36) et (VI.43) \iff (VI.37).

Maintenant si on regarde plus précisément ceci se passe au bord du domaine, on obtient pour la maille primale $\kappa_{i+\frac{1}{2},j-1}$ qui touche le bord (hors un coin du domaine), les mêmes équations pour le schéma DDFV (VI.4) et le schéma MAC correspondant au maillage de la Figure VI.4. Par contre, pour la maille primale $\kappa_{i-\frac{1}{2},j-1}$ qui touche un coin du domaine, par exemple le coin en bas à gauche, la équation pour le schéma DDFV (VI.4) est la suivante :

$$f_{i-\frac{1}{2},j-1} = -\frac{u_{i+\frac{1}{2},j-1} - 3u_{i-\frac{1}{2},j-1}}{h^2} - \frac{u_{i-\frac{1}{2},j} - 3u_{i-\frac{1}{2},j-1}}{k^2} + \frac{p_{i,j-1} - p_{i-1,j-1}}{h}, \quad (\text{VI.44})$$

et celle pour le schéma MAC correspondant au maillage de la Figure VI.4 :

$$f_{i-\frac{1}{2},j-1} = -\frac{u_{i+\frac{1}{2},j-1} - 2u_{i-\frac{1}{2},j-1}}{h^2} - \frac{u_{i-\frac{1}{2},j} - 3u_{i-\frac{1}{2},j-1}}{k^2} + \frac{p_{i,j-1} - p_{i-1,j-1}}{h}. \quad (\text{VI.45})$$

Ainsi on n'a plus équivalence entre les équations sur les coins du bord pour le schéma DDFV et le schéma MAC décalé, car seul le coefficient de $u_{i-\frac{1}{2},j-1}$ (l'inconnue de maille primale considérée $\kappa_{i-\frac{1}{2},j-1}$) n'est pas le même pour les deux schémas, ainsi (VI.45) \nRightarrow (VI.44). On remarque également qu'on n'a pas équivalence entre les équations pour les sommets du bord. Par exemple, l'inconnue $u_{i-1,j+\frac{1}{2}}$ est nulle pour le schéma DDFV (VI.4) alors que pour le schéma MAC correspondant au maillage de la Figure VI.4, on obtient

$$g_{i-1,j+\frac{1}{2}} = -\frac{v_{i,j+\frac{1}{2}} - 3v_{i-1,j+\frac{1}{2}}}{h^2} - \frac{-2v_{i-1,j+\frac{1}{2}} + v_{i-1,j-\frac{1}{2}}}{k^2} + \frac{p_{i-1,j+1} - p_{i-1,j}}{k}.$$

On ne détaille pas les autres différences dues au bord. En conclusion, on a équivalence entre les équations uniquement à l'intérieur du domaine pour le schéma DDFV (VI.4) et les deux schémas MAC décalés.

VI.6 Tests numériques

On présente quelques résultats numériques obtenus sur le domaine $\Omega =]0, 1[^2$. Dans toutes les simulations numériques le paramètre de stabilisation est fixé à $\lambda = 10^{-3}$.

Pour chaque cas test, on donne l'expression de la solution exacte (\mathbf{u}, p) et la viscosité η desquelles on déduit le terme source \mathbf{f} et la condition aux bords \mathbf{g} pour que (\mathbf{u}, p) soit la solution du problème (VI.1).

On rappelle que pour illustrer les estimations d'erreurs, la famille de maillages est obtenue en raffinant successivement et uniformément le maillage original. Afin de mettre en évidence le processus de raffinement choisi, on présente sur les Figures VI.6(a), VI.8(a) et VI.9(a) le maillage primal original et sur les Figures VI.6(b), VI.8(b) et VI.9(b) le maillage primal obtenu après le processus de raffinement. Plus précisément, la famille de maillages, correspondant aux Figures VI.6 et VI.9, est obtenue en divisant chaque arête primale en deux, alors que la famille de maillages, correspondant à la Figure VI.8, est obtenue en dupliquant le maillage grossier en quatre afin de garder la forme des triangles. On précise que les centres $(x_\kappa)_\kappa$ sont les barycentres des mailles primales et que l'on a utilisé le maillage dual direct pour tous les tests numériques. On rappelle la définition de la projection centrée sur \mathfrak{D} :

$$\mathbb{P}_c^\mathfrak{D} p = (p(x_\mathfrak{D}))_{\mathfrak{D} \in \mathfrak{D}}.$$

Dans les Figures VI.6-VI.9, on représente la norme L^2 des erreurs obtenues avec le schéma DDFV (VI.4), pour la pression $\frac{\|\mathbb{P}_c^\mathfrak{D} p - p^\mathfrak{D}\|_2}{\|\mathbb{P}_c^\mathfrak{D} p\|_2}$, pour le gradient de vitesse $\frac{\|\nabla^\mathfrak{D} \mathbb{P}_c^\mathfrak{T} \mathbf{u} - \nabla^\mathfrak{D} \mathbf{u}^\mathfrak{T}\|_2}{\|\nabla^\mathfrak{D} \mathbb{P}_c^\mathfrak{T} \mathbf{u}\|_2}$ et pour la vitesse $\frac{\|\mathbb{P}_c^\mathfrak{T} \mathbf{u} - \mathbf{u}^\mathfrak{T}\|_2}{\|\mathbb{P}_c^\mathfrak{T} \mathbf{u}\|_2}$ respectivement, en fonction du pas du maillage $\text{size}(\mathcal{T})$ en échelle logarithmique. Les ordres de convergence donnés sont calculés à l'aide d'une approximation par les moindres carrés des données calculées.

VI.6.1 Test 1 - Solutions polynomiales - Viscosité non constante

La solution exacte est donnée par

$$\mathbf{u}(x, y) = \begin{pmatrix} 1000x^2(1-x)^2 2y(1-y)(1-2y) \\ -1000y^2(1-y)^2 2x(1-x)(1-2x) \end{pmatrix}, \quad p(x, y) = x^2 + y^2 - \frac{2}{3},$$

et la viscosité $\eta(x, y) = 2x + y + 1$. On utilise le maillage primal localement raffiné (voir la Figure VI.6(a)).

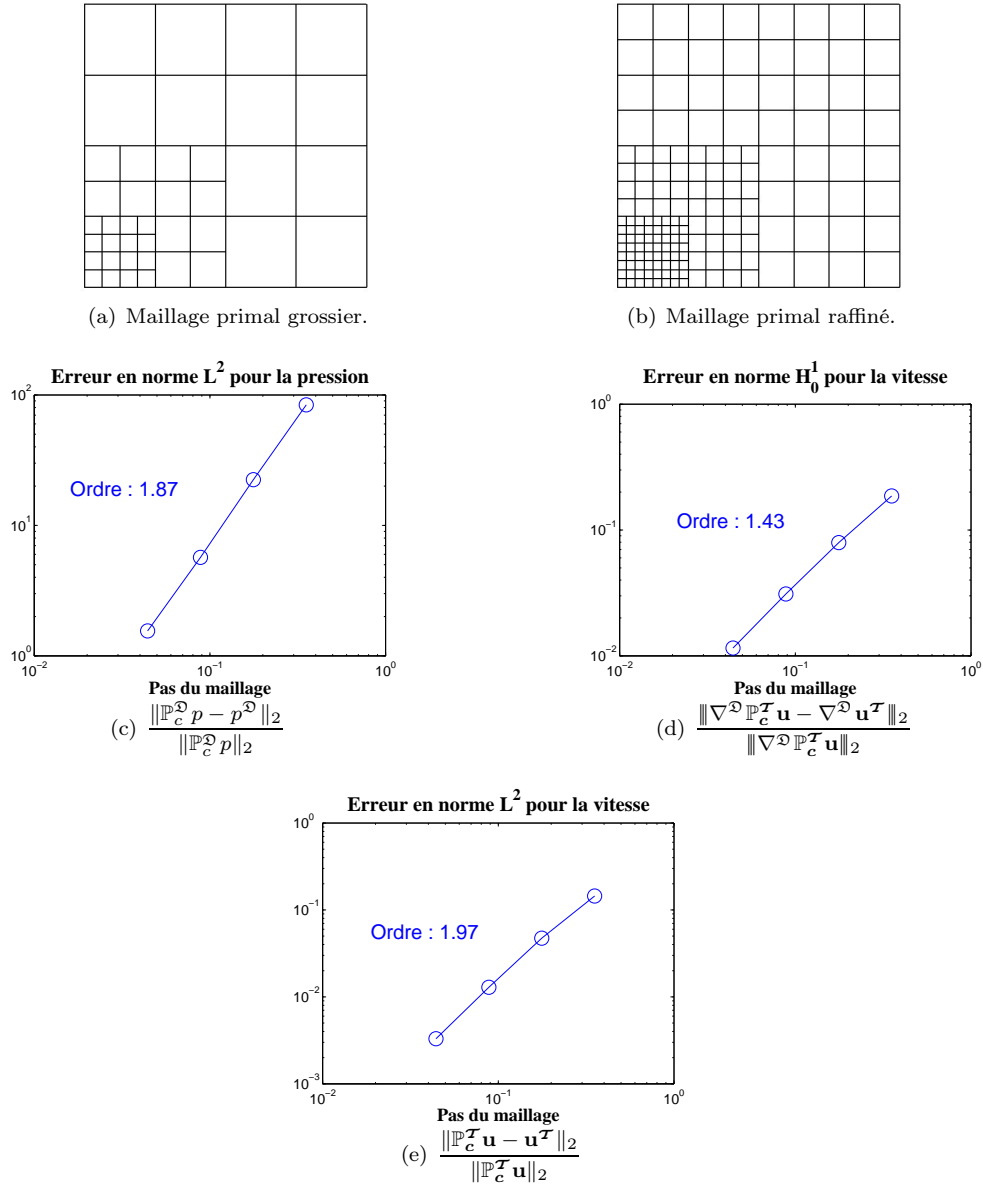


FIG. VI.6 – Test 1, fonctions polynomiales sur un maillage primal localement raffiné.

Pour la vitesse, son gradient et la pression, on obtient numériquement un ordre de convergence de 2, 1.4 et 1.9 respectivement pour le schéma (VI.4) (voir la Figure VI.6). On remarque que les ordres obtenus sont plus grands que ceux théoriques donnés par le Théorème VI.10. Ceci est lié à une certaine uniformité des mailles loin de la zone de raffinement. En outre, on souligne que le taux de convergence n'est pas sensible à la présence de volumes de contrôle non conformes. On a encore une super-convergence de la vitesse en norme L^2 .

On s'intéresse maintenant au paramètre de stabilisation λ . En effet, dans la Figure VI.6, le paramètre λ est fixé à 10^{-3} , dans la Figure VI.7, on compare quatre valeurs de λ : 0, 10^{-2} , 10^{-3} et 10^{-4} .

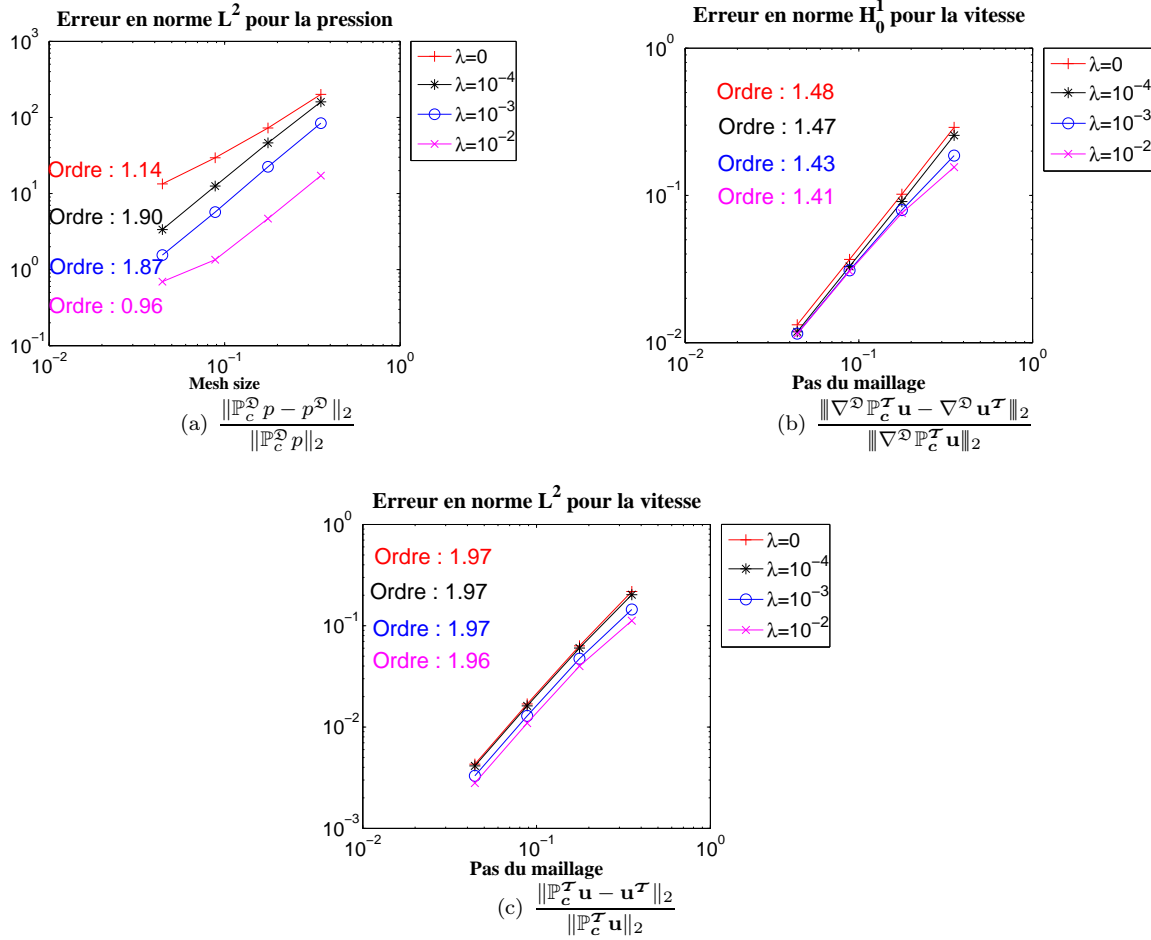


FIG. VI.7 – Test 1, fonctions polynomiales sur le maillage primal localement raffiné VI.6(a).

On rappelle que, pour le maillage de la Figure VI.6(a), le schéma (VI.4) est bien posé pour $\lambda = 0$. On constate que le paramètre λ n'influence pas énormément sur la vitesse et son gradient, car on trouve le même ordre pour les quatre valeurs, c'est-à-dire 2 pour la vitesse et 1.5 pour le gradient de vitesse en norme L^2 . Par contre, le paramètre λ a une grande influence sur la pression. On observe presque de l'ordre 2 pour les valeurs 10^{-3} et 10^{-4} , et de l'ordre 1 pour les valeurs 10^{-2} et 0. Le choix $\lambda = 10^{-3}$ semble être un bon choix pour la suite des tests numériques.

VI.6.2 Test 2 - Viscosité discontinue

La solution exacte est la suivante :

$$\mathbf{u}(x, y) = \begin{pmatrix} -\pi y \\ \sin(\pi(x - 0.5)) \end{pmatrix}, \quad p(x, y) = 2.5(x - y).$$

Ici, on considère une viscosité discontinue :

$$\eta(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0.5 \\ 10^{-4} & \text{sinon.} \end{cases}$$

On utilise le maillage triangle de la Figure VI.8(a).

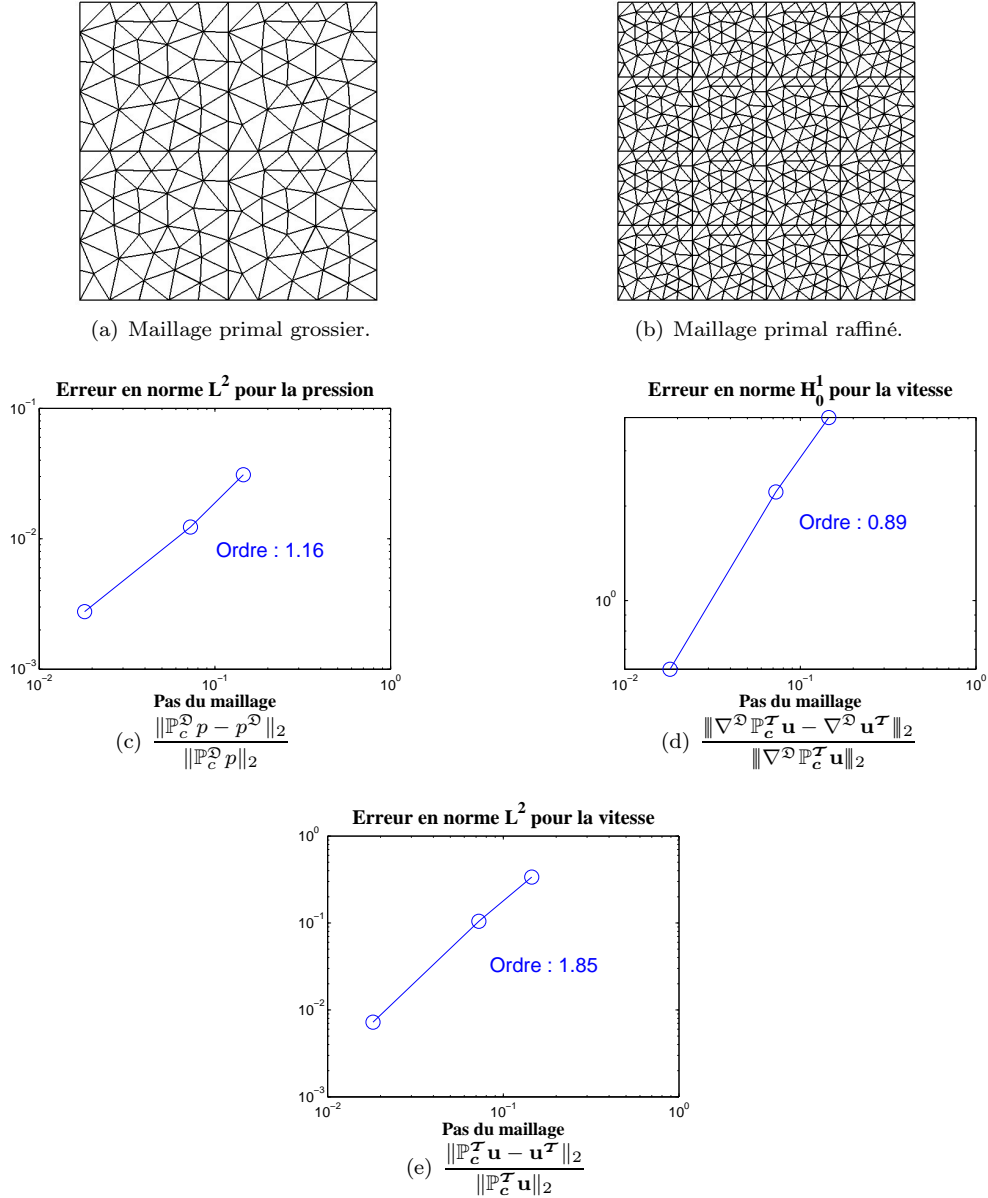


FIG. VI.8 – Test 2, Viscosité discontinue sur maillage triangle.

Avec cette viscosité, les hypothèses du Théorème VI.10 ne sont plus satisfaites. Pourtant, numériquement, on obtient de l'ordre 1 pour la pression et le gradient de vitesse en norme L^2 et de l'ordre 2 pour la vitesse en norme L^2 (voir la Figure VI.8). Ceci semble venir du fait que $D\mathbf{u}$ est nul le long des discontinuités de la viscosité $\{x = 0.5\}$ ainsi le saut de la viscosité n'affecte pas les propriétés de consistance des flux numériques à l'interface. On va voir dans le test suivant que ce n'est pas toujours le cas.

Si on fait varier les valeurs du paramètre λ avec les valeurs : 0 , 10^{-2} , 10^{-3} et 10^{-4} , on obtient pour les quatre valeurs les mêmes droites avec bien sûr les mêmes ordres pour la vitesse, la pression et le gradient de vitesse.

VI.6.3 Test 3 - Viscosité discontinue et tenseur des taux de déformation discontinu

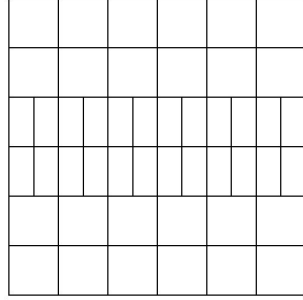
La solution exacte est donnée par :

$$\mathbf{u}(x, y) = \begin{pmatrix} \begin{cases} y^2 - 0.5y & \text{si } y > 0.5 \\ 10^4(y^2 - 0.5y) & \text{sinon.} \\ 0 \end{cases} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad p(x, y) = 2x - 1,$$

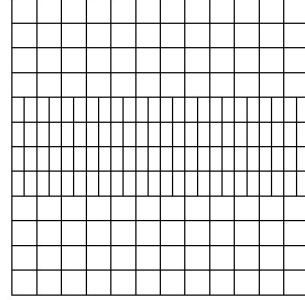
et la viscosité est discontinue :

$$\eta(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } y > 0.5 \\ 10^{-4} & \text{sinon.} \end{cases}$$

On utilise le maillage localement raffiné le long de la discontinuité de la viscosité de la Figure VI.9(a).



(a) Maillage primal grossier.



(b) Maillage primal raffiné.

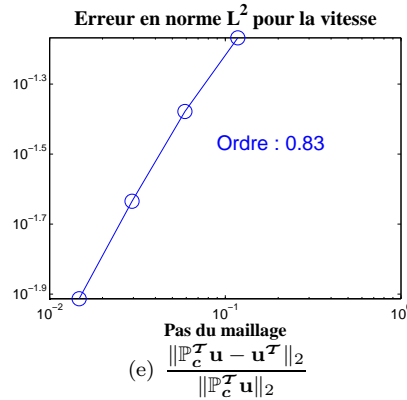
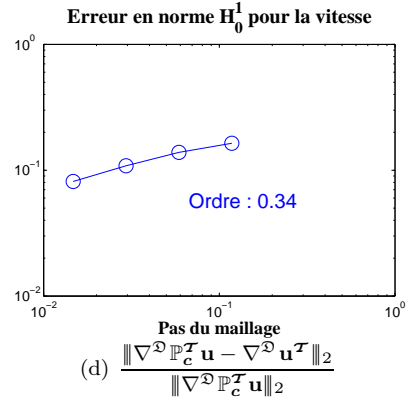
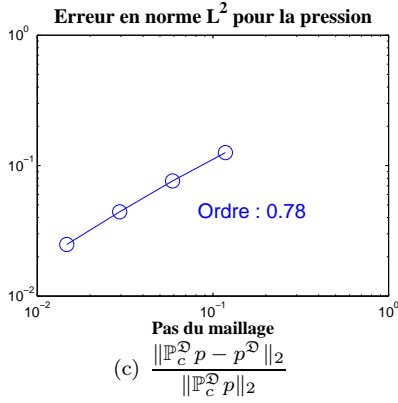


FIG. VI.9 – Test 3, Viscosité discontinue sur un maillage localement raffiné.

Encore une fois les hypothèses du Théorème VI.10 ne sont plus satisfaites mais cette fois \mathbf{Du} est lui aussi discontinu à travers l'interface $\{y = 0.5\}$. On observe que le schéma converge encore mais il n'est plus d'ordre 1, comme attendu (voir la Figure VI.9). En effet, numériquement, on obtient de l'ordre 0.8, 0.3 et 0.78 pour la vitesse, le gradient de vitesse et la pression en norme L^2 . Dans ce cas, la discontinuité de la viscosité doit être prise en compte par le schéma pour surmonter la perte de consistance. C'est ce que l'on propose de faire dans le chapitre suivant.

VI.6.4 Quelques remarques sur l'implémentation

Comme dans la Section V.4.4, on écrit le schéma (VI.4) de la manière suivante

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } \mathbf{u}^\tau \in \mathbb{E}_g \text{ et } p^\mathfrak{D} \in \mathbb{R}^\mathfrak{D} \text{ tels que,} \\ \forall \kappa \in \mathfrak{M}, \quad \sum_{\mathcal{D}_{\sigma,\sigma^*} \in \mathfrak{D}_\kappa} \mathbf{F}_{\kappa,\mathcal{D}_{\sigma,\sigma^*}}(\mathbf{u}^\tau, p^\mathfrak{D}) = m_\kappa \mathbf{f}_\kappa, \\ \forall \kappa^* \in \mathfrak{M}^*, \quad \sum_{\mathcal{D}_{\sigma,\sigma^*} \in \mathfrak{D}_{\kappa^*}} \mathbf{F}_{\kappa^*,\mathcal{D}_{\sigma,\sigma^*}}(\mathbf{u}^\tau, p^\mathfrak{D}) = m_{\kappa^*} \mathbf{f}_{\kappa^*}, \\ \quad \text{avec } \mathbf{F}_{\kappa,\mathcal{D}_{\sigma,\sigma^*}}(\mathbf{u}^\tau, p^\mathfrak{D}) = m_\sigma (-2\eta_\mathfrak{D} D^\mathfrak{D} \mathbf{u}^\tau + p^\mathfrak{D} \text{Id}) \cdot \vec{\mathbf{n}}_{\sigma\kappa}, \quad \text{si } \mathcal{D}_{\sigma,\sigma^*} \in \mathfrak{D}_\kappa, \\ \quad \text{avec } \mathbf{F}_{\kappa^*,\mathcal{D}_{\sigma,\sigma^*}}(\mathbf{u}^\tau, p^\mathfrak{D}) = m_{\sigma^*} (-2\eta_\mathfrak{D} D^\mathfrak{D} \mathbf{u}^\tau + p^\mathfrak{D} \text{Id}) \cdot \vec{\mathbf{n}}_{\sigma^*\kappa^*}, \quad \text{si } \mathcal{D}_{\sigma,\sigma^*} \in \mathfrak{D}_{\kappa^*}, \\ \forall \mathfrak{D} \in \mathfrak{D}, \quad \text{div}^\mathfrak{D}(\mathbf{u}^\tau) - \lambda d_\mathfrak{D}^2 \Delta^\mathfrak{D} p^\mathfrak{D} = 0, \\ \quad \sum_{\mathfrak{D} \in \mathfrak{D}} m_\mathfrak{D} p^\mathfrak{D} = 0. \end{array} \right.$$

La différence avec l'implémentation du schéma de la Section V.4.4 se situe dans les flux numériques. Grâce à la Définition IV.5 du tenseur des taux de déformation discret, pour chaque diamant, on peut écrire les flux de la manière suivante

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{\kappa,\mathcal{D}_{\sigma,\sigma^*}}(\mathbf{u}^\tau, p^\mathfrak{D}) &= \text{flux_N}.V, \\ \mathbf{F}_{\kappa^*,\mathcal{D}_{\sigma,\sigma^*}}(\mathbf{u}^\tau, p^\mathfrak{D}) &= \text{flux_NS}.V, \end{aligned}$$

avec le vecteur V dans \mathbb{R}^5 suivant

$$V = \begin{pmatrix} \mathbf{u}_\kappa - \mathbf{u}_\mathfrak{L} \\ \mathbf{u}_{\kappa^*} - \mathbf{u}_{\mathfrak{L}^*} \\ p^\mathfrak{D} \end{pmatrix},$$

et flux_N , flux_NS les matrices 2×5 suivantes

$$\begin{aligned} \text{flux_N} &= \begin{pmatrix} \eta(x_\mathfrak{D}) \frac{m_\sigma^2}{2m_\mathfrak{D}} (\text{Id} + \vec{\mathbf{n}}_{\sigma\kappa} \otimes \vec{\mathbf{n}}_{\sigma\kappa}) & \eta(x_\mathfrak{D}) \frac{m_\sigma m_{\sigma^*}}{2m_\mathfrak{D}} (\text{Id} + \vec{\mathbf{n}}_{\sigma^*\kappa^*} \otimes \vec{\mathbf{n}}_{\sigma\kappa}) & m_\sigma \vec{\mathbf{n}}_{\sigma\kappa} \end{pmatrix}, \\ \text{flux_NS} &= \begin{pmatrix} \eta(x_\mathfrak{D}) \frac{m_{\sigma^*} m_\sigma}{2m_\mathfrak{D}} (\text{Id} + \vec{\mathbf{n}}_{\sigma\kappa} \otimes \vec{\mathbf{n}}_{\sigma^*\kappa^*}) & \eta(x_\mathfrak{D}) \frac{m_{\sigma^*}^2}{2m_\mathfrak{D}} (\text{Id} + \vec{\mathbf{n}}_{\sigma^*\kappa^*} \otimes \vec{\mathbf{n}}_{\sigma^*\kappa^*}) & m_{\sigma^*} \vec{\mathbf{n}}_{\sigma^*\kappa^*} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Pour l'équation sur les diamants, on fait comme dans la Section V.4.4 en prenant $\mu = 0$.

VI.7 Conclusions

Dans ce chapitre, on s'est intéressé au problème de Stokes avec une viscosité régulière sur tout le domaine et des conditions aux bords de type Dirichlet. On a présenté un schéma DDFV stabilisé (VI.4) pour ce problème bien posé pour des maillages généraux. On a établi des estimations d'erreurs d'ordre 1 pour la vitesse, le gradient de vitesse et pour la pression en norme L^2 grâce à la stabilisation de type Brezzi-Pitkäranta. Notez que l'on a un résultat sur la norme L^2 de la vitesse, car les conditions au bord sont imposées de manière forte sur $\partial\mathfrak{M}$ et sur $\partial\mathfrak{M}^*$. Ceci nous a permis d'utiliser l'inégalité de Poincaré.

Numériquement, on a testé le comportement de notre schéma (VI.4) pour une viscosité régulière, mais on s'est intéressé également à son comportement lorsque la viscosité est discontinue. Dans ce cas, les hypothèses du Théorème VI.10 ne sont plus vérifiées. On observe que le schéma converge encore mais qu'il n'est plus d'ordre 1, comme attendu. Dans ce cas, la discontinuité de la viscosité doit être prise en compte par le schéma pour surmonter la perte de consistance des contraintes à l'interface. C'est ce que l'on propose de faire dans le chapitre suivant.

Les schémas de ce chapitre sont également généralisés au cas d'une géométrie tridimensionnelle dans le Chapitre X. L'extension au problème de Navier-Stokes de ces schémas est traitée dans le Chapitre VIII.

Chapitre VII

Le problème de Stokes avec une viscosité discontinue

L'objectif de ce chapitre¹ est d'approcher la solution du problème de Stokes avec une viscosité discontinue :

$$\begin{aligned} \text{Trouver } \mathbf{u} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2 \text{ une vitesse et } p : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ une pression telles que} \\ \operatorname{div}(-\varphi(\mathbf{u}, p)) = \mathbf{f}, \quad \text{dans } \Omega, \\ \operatorname{div}(\mathbf{u}) = 0, \quad \text{dans } \Omega, \\ \mathbf{u} = 0, \quad \text{sur } \partial\Omega, \quad \int_{\Omega} p(x) dx = 0. \end{aligned} \quad (\text{VII.1})$$

où $\varphi(\mathbf{u}, p) = 2\eta(x)\mathbf{Du} - p\mathbf{Id}$ représente le tenseur des contraintes, avec $\mathbf{Du} = \frac{1}{2}(\nabla\mathbf{u} + {}^t\nabla\mathbf{u})$ la partie symétrique du gradient de vitesse, la viscosité η appartient à $L^\infty(\Omega)$. Une hypothèse importante de notre analyse est que \mathcal{T} le maillage DDFV respecte les discontinuités de la viscosité. On suppose que la viscosité η est lipschitzienne par quart de diamant : il existe trois constantes $C_\eta, \underline{C}_\eta, \overline{C}_\eta > 0$ telles que

$$\underline{C}_\eta \leq \eta(x) \leq \overline{C}_\eta, \quad \text{pour presque tout } x \in \Omega, \quad (\text{VII.2})$$

et

$$|\eta(x) - \eta(x')| \leq C_\eta |x - x'|, \quad \forall x, x' \in \mathcal{Q}, \text{ pour tout } \mathcal{Q} \in \mathcal{Q}. \quad (\text{VII.3})$$

On travaille alors avec une viscosité qui peut présenter des discontinuités le long des arêtes primales et duales du maillage. Cette hypothèse suppose que l'on sache identifier les discontinuités et elle n'est pas restrictive même si bien sûr on ne peut pas encore prendre en compte des interfaces immergées.

On a vu que, même pour les problèmes de diffusion scalaire de la Partie 1, des discontinuités dans les coefficients impliquent un défaut de consistance des flux numériques du schéma. Le remède consiste à modifier le schéma afin de prendre en compte les sauts des coefficients du problème et ensuite de récupérer la convergence d'ordre 1 optimale. Le but de ce chapitre est d'explicitier la construction de ce schéma modifié et d'en faire son étude. Par souci de simplicité, on restreint notre étude à des conditions de Dirichlet homogène.

Remarque VII.1

Ici on note le tenseur des contraintes φ au lieu de la notation usuelle σ pour ne pas confondre avec les arêtes du maillage primal.

Dans ce chapitre, il faut faire attention si l'on souhaite travailler avec le maillage dual barycentrique. En fait, on va légèrement modifier certaines mailles duales. On rappelle qu'une maille duale barycentrique κ^* est construite en joignant les centres des mailles primales qui ont pour sommets x_{κ^*} et x_σ un point de l'arête

¹Un aide mémoire rassemblant les notations de ce chapitre est disponible page 244.

qui a pour sommet $x_{\mathcal{K}^*}$. En général, le point x_σ est choisi comme le milieu de l'arête σ . Ainsi, pour chaque diamant, on voit apparaître deux angles $\alpha_{\mathcal{K}}$ et $\alpha_{\mathcal{L}}$ comme le rappelle la Figure VII.1. Dans les démonstrations des Propositions VII.7 et VII.8, du Théorème VII.10, du Lemme VII.11 et du Corollaire VII.40, on a besoin de contrôler la différence $\alpha_{\mathcal{K}} - \alpha_{\mathcal{L}}$. On se donne donc un petit paramètre $\epsilon_0 > 0$. Si les angles sont trop proches $|\alpha_{\mathcal{K}} - \alpha_{\mathcal{L}}| < \epsilon_0$, alors on redéfinit x_σ comme l'intersection entre l'arête σ et le segment σ^* . On modifie ainsi quelques mailles duales afin d'avoir soit des angles $\alpha_{\mathcal{K}}$ et $\alpha_{\mathcal{L}}$ identiques comme pour le maillage dual direct, soit des angles éloignés au moins de ϵ_0 .

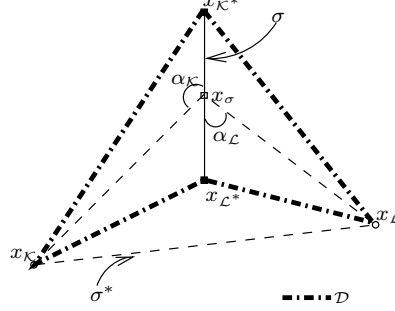


FIG. VII.1 – Les notations d'un diamant $\mathcal{D}_{\sigma, \sigma^*}$ avec un maillage dual *barycentrique*.

VII.1 Construction de nouveaux opérateurs discrets

On suppose que la viscosité η peut présenter des sauts à travers les arêtes primales et duales du maillage. On a ainsi une viscosité régulière par quart de diamant $\mathcal{Q} \in \mathfrak{Q}$ (voir (VII.3)) et on note $\eta^\mathfrak{Q} = (\eta_{\mathcal{Q}})_{\mathcal{Q} \in \mathfrak{Q}}$ avec $\eta_{\mathcal{Q}} = \frac{1}{m_{\mathcal{Q}}} \int_{\mathcal{Q}} \eta(s) ds$ la moyenne de η sur un quart de diamant \mathcal{Q} .

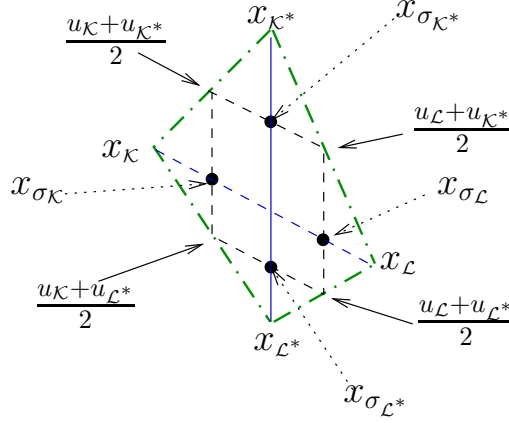
Au niveau continu, ce sont les composantes normales du tenseur des contraintes $\varphi(\mathbf{u}, p) = 2\eta \mathbf{D}\mathbf{u} - p\text{Id}$ qui sont continues à travers les arêtes primales et duales du maillage. Par exemple, on a

$$\int_{\sigma_{\mathcal{K}^*}} \varphi|_{\mathcal{Q}_{\mathcal{K}, \mathcal{K}^*}}(\mathbf{u}, p) \cdot \vec{\mathbf{n}}_{\sigma_{\mathcal{K}}} ds = \int_{\sigma_{\mathcal{L}^*}} \varphi|_{\mathcal{Q}_{\mathcal{L}, \mathcal{K}^*}}(\mathbf{u}, p) \cdot \vec{\mathbf{n}}_{\sigma_{\mathcal{K}}} ds. \quad (\text{VII.4})$$

On a besoin d'imposer l'équivalent de cette propriété dans le cadre discret. Ainsi on exprime un tenseur des contraintes discret $\varphi_{\mathcal{Q}}$ comme $\varphi_{\mathcal{Q}} = 2\eta_{\mathcal{Q}} \mathbf{D}_{\mathcal{Q}}^{\mathcal{N}} \mathbf{u}^T - p^{\mathcal{Q}} \text{Id}$ par quart de diamant, (voir Définition VII.6) grâce à des inconnues en pression en plus $p^{\mathfrak{Q}} = (p^{\mathcal{Q}})_{\mathcal{Q} \in \mathfrak{Q}_D}$ et un tenseur des taux de déformation $\mathbf{D}_{\mathcal{Q}}^{\mathcal{N}}$ (voir Définition VII.3). Les nouvelles inconnues seront éliminées algébriquement sur chaque diamant dans la Section VII.1.3.

VII.1.1 Rappel sur les problèmes de transmission scalaire

On redonne les principes de la méthode proposée dans [BH08] pour des problèmes de diffusion scalaire déjà présentés dans la Section II.2.3. On a vu que le gradient discret $\nabla^{\mathcal{D}} u^T$ (voir Définition I.7) peut être défini comme le gradient de la fonction $\Pi^{\mathcal{D}} u^T$ affine par diamant telle que ses valeurs aux milieux des côtés de \mathcal{D} soient imposées par la demi-somme des valeurs de u^T aux sommets correspondants (voir Figure VII.2). Le gradient discret modifié $\nabla_{\mathcal{Q}}^{\mathcal{N}} u^T$ est choisi comme le gradient d'une fonction $\tilde{\Pi}_{\mathcal{D}} u^T$ affine sur chaque quart de diamant $\mathcal{Q} \in \mathfrak{Q}_D$, qui coïncide avec $\Pi_{\mathcal{D}} u^T$ aux milieux des côtés du diamant \mathcal{D} et qui est continue à chaque point $x_{\sigma_{\mathcal{K}}}, x_{\sigma_{\mathcal{L}}}, x_{\sigma_{\mathcal{K}^*}}, x_{\sigma_{\mathcal{L}^*}}$ (voir Figure VII.2). On introduit alors quatre inconnues artificielles $\delta^{\mathcal{D}} = {}^t(\delta_{\mathcal{K}}, \delta_{\mathcal{L}}, \delta_{\mathcal{K}^*}, \delta_{\mathcal{L}^*}) \in \mathbb{R}^4$ définies comme la différence entre $\tilde{\Pi}_{\mathcal{D}} u^T(y)$ et $\Pi_{\mathcal{D}} u^T(y)$ pour chaque $y \in \{x_{\sigma_{\mathcal{K}}}, x_{\sigma_{\mathcal{L}}}, x_{\sigma_{\mathcal{K}^*}}, x_{\sigma_{\mathcal{L}^*}}\}$. Maintenant on peut écrire $\nabla_{\mathcal{Q}}^{\mathcal{N}} u^T = \nabla^{\mathcal{D}} u^T + B_{\mathcal{Q}} \delta^{\mathcal{D}}$, où $(B_{\mathcal{Q}})_{\mathcal{Q} \in \mathfrak{Q}_D}$ est une famille de matrices de $\mathcal{M}_{2,4}(\mathbb{R})$ qui peuvent être calculées explicitement en fonction de la géométrie des quarts de diamant (expression donnée par (VII.5)). Cette construction, valable pour un diamant intérieur, peut s'étendre au cas d'un diamant du bord $\mathcal{D} \in \mathfrak{D}_{ext}$ avec $\delta^{\mathcal{D}} = (\delta_{\mathcal{K}}) \in \mathbb{R}$. Si on note $n_{\mathcal{D}} = 4$ si $\mathcal{D} \in \mathfrak{D}_{int}$ et $n_{\mathcal{D}} = 1$ si $\mathcal{D} \in \mathfrak{D}_{ext}$, alors $\delta^{\mathcal{D}}$ est un vecteur de $\mathbb{R}^{n_{\mathcal{D}}}$.

FIG. VII.2 – La fonction $\tilde{\Pi}^{\mathcal{D}} u^T$ affine par quart de diamant.

VII.1.2 Opérateurs sur les quarts de diamant dans le cas vectoriel

On propose ici d'adapter la méthode décrite ci-dessus dans le cas vectoriel. On va maintenant travailler avec $\delta^{\mathcal{D}} = {}^t(\delta_K, \delta_L, \delta_{K^*}, \delta_{L^*})$ appartenant à $\mathcal{M}_{n_{\mathcal{D}}, 2}$ au lieu d'un vecteur de $\mathbb{R}^{n_{\mathcal{D}}}$ et la famille de matrices $B_{\mathcal{Q}}$ est la même. On définit les opérateurs discrets qui interviendront dans notre schéma modifié et dans son analyse.

Définition VII.2 (Gradient discret sur les quarts de diamant)

Le gradient discret sur les quarts de diamant d'un champ de vecteur de $(\mathbb{R}^2)^T$ est défini par $\nabla_{\mathcal{Q}}^{\mathcal{N}} : (\mathbb{R}^2)^T \rightarrow (\nabla_{\mathcal{Q}}^{\mathcal{N}} \mathbf{u}^T)_{\mathcal{Q} \in \mathcal{Q}} \in (\mathcal{M}_2(\mathbb{R}))^{\mathcal{Q}}$, où

$$\nabla_{\mathcal{Q}}^{\mathcal{N}} \mathbf{u}^T = \nabla^{\mathcal{D}} \mathbf{u}^T + {}^t \delta^{\mathcal{D}} B_{\mathcal{Q}}, \quad \forall \mathcal{Q} \in \mathcal{Q}_{\mathcal{D}}, \quad \forall \mathcal{D} \in \mathcal{D},$$

avec $\delta^{\mathcal{D}} \in (\mathcal{M}_{n_{\mathcal{D}}, 2}(\mathbb{R}))^{\mathcal{D}}$ un ensemble d'inconnues artificielles et $(B_{\mathcal{Q}})_{\mathcal{Q} \in \mathcal{Q}_{\mathcal{D}}}$ une famille de matrices de $\mathcal{M}_{2, n_{\mathcal{D}}}(\mathbb{R})$ définies de la manière suivante :

- $\forall \mathcal{D} \in \mathcal{D}_{int}$, on prend $\delta^{\mathcal{D}} = {}^t(\delta_K, \delta_L, \delta_{K^*}, \delta_{L^*}) \in \mathcal{M}_{n_{\mathcal{D}}, 2}(\mathbb{R})$ et pour les quatre matrices $B_{\mathcal{Q}}$:

$$\begin{aligned} B_{\mathcal{Q}_{K, K^*}} &= \left(\frac{m_{\sigma_K} \vec{n}_{\sigma_K K^*}}{m_{\mathcal{Q}_{K, K^*}}}, 0, \frac{m_{\sigma_{K^*}} \vec{n}_{\sigma_{K^*} K}}{m_{\mathcal{Q}_{K, K^*}}}, 0 \right), \quad B_{\mathcal{Q}_{K, L^*}} = \left(-\frac{m_{\sigma_K} \vec{n}_{\sigma_K K^*}}{m_{\mathcal{Q}_{K, L^*}}}, 0, 0, \frac{m_{\sigma_{L^*}} \vec{n}_{\sigma_{L^*} L}}{m_{\mathcal{Q}_{K, L^*}}} \right), \\ B_{\mathcal{Q}_{L, L^*}} &= \left(0, -\frac{m_{\sigma_L} \vec{n}_{\sigma_L L^*}}{m_{\mathcal{Q}_{L, L^*}}}, 0, -\frac{m_{\sigma_{L^*}} \vec{n}_{\sigma_{L^*} L}}{m_{\mathcal{Q}_{L, L^*}}} \right), \quad B_{\mathcal{Q}_{L, K^*}} = \left(0, \frac{m_{\sigma_L} \vec{n}_{\sigma_L L^*}}{m_{\mathcal{Q}_{L, K^*}}}, -\frac{m_{\sigma_{K^*}} \vec{n}_{\sigma_{K^*} K}}{m_{\mathcal{Q}_{L, K^*}}}, 0 \right). \end{aligned} \quad (\text{VII.5})$$

- $\forall \mathcal{D} \in \mathcal{D}_{ext}$, il y a seulement deux quarts de diamant dans $\mathcal{Q}_{\mathcal{D}}$, on prend $\delta^{\mathcal{D}} = (\delta_K) \in \mathcal{M}_{n_{\mathcal{D}}, 2}(\mathbb{R})$ et les deux matrices correspondantes $B_{\mathcal{Q}}$ sont données par :

$$B_{\mathcal{Q}_{K, K^*}} = \left(\frac{m_{\sigma_K} \vec{n}_{\sigma_K K^*}}{m_{\mathcal{Q}_{K, K^*}}} \right), \quad B_{\mathcal{Q}_{K, L^*}} = \left(-\frac{m_{\sigma_K} \vec{n}_{\sigma_K K^*}}{m_{\mathcal{Q}_{K, L^*}}} \right).$$

Grâce au gradient discret sur les quarts de diamant, appelé aussi gradient discret modifié, on peut définir un tenseur des taux de déformation sur les quarts de diamant d'un champ de vecteurs de $(\mathbb{R}^2)^T$, appelé aussi tenseur des taux de déformation modifié.

Définition VII.3 (Tenseur des taux de déformation sur les quarts de diamant)

Le tenseur des taux de déformation d'un champ de vecteurs de $(\mathbb{R}^2)^T$ sur les quarts de diamant est défini de la manière suivante : $D_{\mathcal{Q}}^{\mathcal{N}} : (\mathbb{R}^2)^T \rightarrow (D_{\mathcal{Q}}^{\mathcal{N}} \mathbf{u}^T)_{\mathcal{Q} \in \mathcal{Q}} \in (\mathcal{M}_2(\mathbb{R}))^{\mathcal{Q}}$, avec

$$D_{\mathcal{Q}}^{\mathcal{N}} \mathbf{u}^T = \frac{1}{2} \left(\nabla_{\mathcal{Q}}^{\mathcal{N}} \mathbf{u}^T + {}^t (\nabla_{\mathcal{Q}}^{\mathcal{N}} \mathbf{u}^T) \right), \quad \forall \mathcal{Q} \in \mathcal{Q}.$$

On remarque qu'il peut également s'écrire comme

$$D_{\mathcal{Q}}^{\mathcal{N}} \mathbf{u}^{\mathcal{T}} = D^{\mathcal{D}} \mathbf{u}^{\mathcal{T}} + \frac{1}{2} \left({}^t \delta^{\mathcal{D}^t} B_{\mathcal{Q}} + B_{\mathcal{Q}} \delta^{\mathcal{D}} \right), \quad \forall \mathcal{Q} \in \Omega_{\mathcal{D}}, \quad \forall \mathcal{D} \in \mathcal{D}.$$

De plus, d'après les expressions (VII.5) données des matrices $B_{\mathcal{Q}}$, on a la propriété suivante

$$\sum_{\mathcal{Q} \in \Omega_{\mathcal{D}}} m_{\mathcal{Q}} B_{\mathcal{Q}} = 0, \text{ pour tout } \mathcal{D} \in \mathcal{D}.$$

Une conséquence de cette propriété est le résultat suivant.

Lemme VII.4

Pour tout $\mathcal{D} \in \mathcal{D}$, tout $\xi \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et tout $\delta \in \mathcal{M}_{2,n_{\mathcal{D}}}(\mathbb{R})$, on a

$$\xi = \frac{1}{m_{\mathcal{D}}} \sum_{\mathcal{Q} \in \Omega_{\mathcal{D}}} m_{\mathcal{Q}} \left(\xi + \frac{1}{2} (B_{\mathcal{Q}} \delta + {}^t \delta^t B_{\mathcal{Q}}) \right).$$

Même si on n'a pas encore déterminé les valeurs des inconnues artificielles $\delta^{\mathcal{D}}$, ce lemme implique que les opérateurs $D^{\mathcal{D}}$, $D_{\mathcal{Q}}^{\mathcal{N}}$, $\nabla^{\mathcal{D}}$ et $\nabla_{\mathcal{Q}}^{\mathcal{N}}$ vérifient les relations suivantes :

$$D^{\mathcal{D}} \mathbf{u}^{\mathcal{T}} = \frac{1}{m_{\mathcal{D}}} \sum_{\mathcal{Q} \in \Omega_{\mathcal{D}}} m_{\mathcal{Q}} D_{\mathcal{Q}}^{\mathcal{N}} \mathbf{u}^{\mathcal{T}}, \quad \nabla^{\mathcal{D}} \mathbf{u}^{\mathcal{T}} = \frac{1}{m_{\mathcal{D}}} \sum_{\mathcal{Q} \in \Omega_{\mathcal{D}}} m_{\mathcal{Q}} \nabla_{\mathcal{Q}}^{\mathcal{N}} \mathbf{u}^{\mathcal{T}}, \quad \forall \mathcal{D} \in \mathcal{D}. \quad (\text{VII.6})$$

Grâce au tenseur des taux de déformation sur les quarts de diamant, on peut définir un tenseur des contraintes visqueuses et un tenseur des contraintes sur les quarts de diamant, comme suit.

Définition VII.5 (Tenseur des contraintes visqueuses sur les quarts de diamant)

Le tenseur des contraintes visqueuses d'un champ de vecteurs de $(\mathbb{R}^2)^{\mathcal{T}}$ sur les quarts de diamant est défini de la manière suivante : $D_{\mathcal{D}}^{\eta, \mathcal{N}} : \mathbf{u}^{\mathcal{T}} \in (\mathbb{R}^2)^{\mathcal{T}} \rightarrow (D_{\mathcal{D}}^{\eta, \mathcal{N}} \mathbf{u}^{\mathcal{T}})_{\mathcal{D} \in \mathcal{D}} \in (\mathcal{M}_2(\mathbb{R}))^{\mathcal{D}}$, avec

$$D_{\mathcal{D}}^{\eta, \mathcal{N}} \mathbf{u}^{\mathcal{T}} = \frac{1}{m_{\mathcal{D}}} \sum_{\mathcal{Q} \in \Omega_{\mathcal{D}}} m_{\mathcal{Q}} \eta_{\mathcal{Q}} D_{\mathcal{Q}}^{\mathcal{N}} \mathbf{u}^{\mathcal{T}}, \quad \forall \mathcal{D} \in \mathcal{D}.$$

Définition VII.6 (Tenseur des contraintes sur les quarts de diamant)

Le tenseur des contraintes φ^{Ω} d'un champ de vecteurs de $(\mathbb{R}^2)^{\mathcal{T}}$ sur les quarts de diamant est défini de la manière suivante : $\varphi^{\Omega} : (\xi^{\mathcal{D}}, \beta^{\mathcal{D}}, q^{\Omega}) \in (\mathcal{M}_2(\mathbb{R}))^{\mathcal{D}} \times (\mathcal{M}_{n_{\mathcal{D}}, 2}(\mathbb{R}))^{\mathcal{D}} \times \mathbb{R}^{\Omega} \rightarrow (\varphi_{\mathcal{Q}}(\xi^{\mathcal{D}}, \beta^{\mathcal{D}}, q^{\Omega_{\mathcal{D}}}))_{\mathcal{Q} \in \Omega} \in (\mathcal{M}_2(\mathbb{R}))^{\Omega}$, avec

$$\varphi_{\mathcal{Q}}(\xi^{\mathcal{D}}, \beta^{\mathcal{D}}, q^{\Omega_{\mathcal{D}}}) = 2\eta_{\mathcal{Q}} \xi^{\mathcal{D}} + \eta_{\mathcal{Q}} (B_{\mathcal{Q}} \beta^{\mathcal{D}} + {}^t \beta^{\mathcal{D}^t} B_{\mathcal{Q}}) - q^{\Omega} \text{Id}, \quad \forall \mathcal{Q} \in \Omega_{\mathcal{D}}, \quad \forall \mathcal{D} \in \mathcal{D}.$$

VII.1.3 Détermination des inconnues artificielles

Sur chaque diamant $\mathcal{D} \in \mathcal{D}$, on a $3 \times n_{\mathcal{D}}$ inconnues scalaires artificielles $(\delta^{\mathcal{D}}, p^{\Omega_{\mathcal{D}}})$ qui peuvent être éliminées en imposant la continuité de la composante normale des tenseurs des contraintes à travers les diagonales du diamant \mathcal{D} . La version discrète de la condition (VII.4) est pour tout $\mathcal{D} \in \mathcal{D}_{\text{int}}$, $\mathcal{D} = \mathcal{Q}_{\mathcal{K}, \mathcal{K}^*} \cup \mathcal{Q}_{\mathcal{L}, \mathcal{L}^*} \cup \mathcal{Q}_{\mathcal{L}, \mathcal{K}^*} \cup \mathcal{Q}_{\mathcal{L}, \mathcal{L}^*}$:

$$\begin{cases} \varphi_{\mathcal{Q}_{\mathcal{K}, \mathcal{K}^*}}(D^{\mathcal{D}} \mathbf{u}^{\mathcal{T}}, \delta^{\mathcal{D}}, p_{\mathcal{Q}_{\mathcal{K}, \mathcal{K}^*}}) \vec{\mathbf{n}}_{\sigma \mathcal{K}} = \varphi_{\mathcal{Q}_{\mathcal{L}, \mathcal{K}^*}}(D^{\mathcal{D}} \mathbf{u}^{\mathcal{T}}, \delta^{\mathcal{D}}, p_{\mathcal{Q}_{\mathcal{L}, \mathcal{K}^*}}) \vec{\mathbf{n}}_{\sigma \mathcal{K}}, \\ \varphi_{\mathcal{Q}_{\mathcal{K}, \mathcal{L}^*}}(D^{\mathcal{D}} \mathbf{u}^{\mathcal{T}}, \delta^{\mathcal{D}}, p_{\mathcal{Q}_{\mathcal{K}, \mathcal{L}^*}}) \vec{\mathbf{n}}_{\sigma \mathcal{K}} = \varphi_{\mathcal{Q}_{\mathcal{L}, \mathcal{L}^*}}(D^{\mathcal{D}} \mathbf{u}^{\mathcal{T}}, \delta^{\mathcal{D}}, p_{\mathcal{Q}_{\mathcal{L}, \mathcal{L}^*}}) \vec{\mathbf{n}}_{\sigma \mathcal{K}}, \\ \varphi_{\mathcal{Q}_{\mathcal{K}, \mathcal{K}^*}}(D^{\mathcal{D}} \mathbf{u}^{\mathcal{T}}, \delta^{\mathcal{D}}, p_{\mathcal{Q}_{\mathcal{K}, \mathcal{K}^*}}) \vec{\mathbf{n}}_{\sigma \mathcal{K}^*} = \varphi_{\mathcal{Q}_{\mathcal{L}, \mathcal{L}^*}}(D^{\mathcal{D}} \mathbf{u}^{\mathcal{T}}, \delta^{\mathcal{D}}, p_{\mathcal{Q}_{\mathcal{L}, \mathcal{L}^*}}) \vec{\mathbf{n}}_{\sigma \mathcal{K}^*}, \\ \varphi_{\mathcal{Q}_{\mathcal{L}, \mathcal{K}^*}}(D^{\mathcal{D}} \mathbf{u}^{\mathcal{T}}, \delta^{\mathcal{D}}, p_{\mathcal{Q}_{\mathcal{L}, \mathcal{K}^*}}) \vec{\mathbf{n}}_{\sigma \mathcal{L}^*} = \varphi_{\mathcal{Q}_{\mathcal{L}, \mathcal{L}^*}}(D^{\mathcal{D}} \mathbf{u}^{\mathcal{T}}, \delta^{\mathcal{D}}, p_{\mathcal{Q}_{\mathcal{L}, \mathcal{L}^*}}) \vec{\mathbf{n}}_{\sigma \mathcal{L}^*}, \end{cases} \quad (\text{VII.7})$$

et pour tout $\mathcal{D} \in \mathcal{D}_{\text{ext}}$, $\mathcal{D} = \mathcal{Q}_{\mathcal{K}, \mathcal{K}^*} \cup \mathcal{Q}_{\mathcal{K}, \mathcal{L}^*}$:

$$\{ \varphi_{\mathcal{Q}_{\mathcal{K}, \mathcal{K}^*}}(D^{\mathcal{D}} \mathbf{u}^{\mathcal{T}}, \delta^{\mathcal{D}}, p_{\mathcal{Q}_{\mathcal{K}, \mathcal{K}^*}}) \vec{\mathbf{n}}_{\sigma \mathcal{K}^*} = \varphi_{\mathcal{Q}_{\mathcal{K}, \mathcal{L}^*}}(D^{\mathcal{D}} \mathbf{u}^{\mathcal{T}}, \delta^{\mathcal{D}}, p_{\mathcal{Q}_{\mathcal{K}, \mathcal{L}^*}}) \vec{\mathbf{n}}_{\sigma \mathcal{K}^*}. \quad (\text{VII.8})$$

Cela nous donne $2n_{\mathcal{D}}$ équations, le système linéaire est sous-déterminé. On va ajouter d'autres conditions, pour cela, on se rappelle que l'on considère des fluides incompressibles, c'est-à-dire que la vitesse vérifie $\operatorname{div} \mathbf{u} = 0$. Au niveau discret, on a ajouté un terme de stabilisation ainsi on n'a pas $\operatorname{div}^{\mathcal{D}} \mathbf{u}^{\mathcal{T}}$ égal à zéro. Néanmoins, on souhaite avoir $\operatorname{Tr}(\nabla_{\mathcal{Q}}^{\mathcal{N}} \mathbf{u}^{\mathcal{T}}) = \operatorname{div}^{\mathcal{D}} \mathbf{u}^{\mathcal{T}}$ pour tout $\mathcal{Q} \in \mathcal{Q}_{\mathcal{D}}$ et pour tout $\mathcal{D} \in \mathcal{D}$. Pour cela on impose que

$$\operatorname{Tr}({}^t \delta^{\mathcal{D}} B_{\mathcal{Q}}) = 0, \quad \forall \mathcal{Q} \in \mathcal{Q}_{\mathcal{D}}. \quad (\text{VII.9})$$

Comme les matrices $B_{\mathcal{Q}}$ vérifient $\sum_{\mathcal{Q} \in \mathcal{Q}_{\mathcal{D}}} m_{\mathcal{Q}} B_{\mathcal{Q}} = 0$, ces équations ne sont pas indépendantes, on ajoute donc la condition

$$\sum_{\mathcal{Q} \in \mathcal{Q}_{\mathcal{D}}} m_{\mathcal{Q}} p^{\mathcal{Q}} = m_{\mathcal{D}} p^{\mathcal{D}}. \quad (\text{VII.10})$$

Il faut remarquer que l'étude de l'existence des inconnues $(\delta^{\mathcal{D}}, p^{\mathcal{D}})$ n'est pas une simple adaptation de la démonstration dans [BH08], car on utilise le tenseur des taux de déformation et non pas le gradient discret. On commence par étudier le système linéaire surdéterminé suivant : pour $F_{\mathcal{Q}} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ donné, peut-on trouver $\delta^{\mathcal{D}} \in \mathcal{M}_{n_{\mathcal{D}},2}(\mathbb{R})$ tel que

$${}^t \delta^{\mathcal{D}} B_{\mathcal{Q}} + B_{\mathcal{Q}} \delta^{\mathcal{D}} = F_{\mathcal{Q}}, \quad \forall \mathcal{Q} \in \mathcal{Q}_{\mathcal{D}}. \quad (\text{VII.11})$$

Proposition VII.7

Si $F_{\mathcal{Q}} = 0$, pour tout $\mathcal{Q} \in \mathcal{Q}_{\mathcal{D}}$, les solutions de (VII.11) sont engendrées par $\delta_0 \in \mathcal{M}_{n_{\mathcal{D}},2}(\mathbb{R})$:

- $\delta_0 = 0$, si $\alpha_{\mathcal{K}} \neq \alpha_{\mathcal{L}}$, (angles définies sur la Figure VII.1).
- $\delta_0 = \begin{pmatrix} -\frac{\vec{n}_{\sigma\mathcal{K}}}{m_{\sigma\mathcal{K}}}, \frac{\vec{n}_{\sigma\mathcal{K}}}{m_{\sigma\mathcal{L}}}, \frac{\vec{n}_{\sigma^*\mathcal{K}^*}}{m_{\sigma\mathcal{K}^*}}, -\frac{\vec{n}_{\sigma^*\mathcal{K}^*}}{m_{\sigma\mathcal{L}^*}} \end{pmatrix}$, si $\alpha_{\mathcal{K}} = \alpha_{\mathcal{L}}$.

Proposition VII.8

Sous les hypothèses suivantes

$$\begin{cases} F_{\mathcal{Q}} \text{ est symétrique pour tout } \mathcal{Q} \in \mathcal{Q}_{\mathcal{D}} \text{ et } \sum_{\mathcal{Q} \in \mathcal{Q}_{\mathcal{D}}} m_{\mathcal{Q}} F_{\mathcal{Q}} = 0, \\ m_{\mathcal{Q}_{\mathcal{K},\mathcal{K}^*}} {}^t \vec{\tau}_{\mathcal{K},\mathcal{L}} F_{\mathcal{Q}_{\mathcal{K},\mathcal{K}^*}} \vec{\tau}_{\mathcal{K},\mathcal{L}} + m_{\mathcal{Q}_{\mathcal{K},\mathcal{L}^*}} {}^t \vec{\tau}_{\mathcal{K},\mathcal{L}} F_{\mathcal{Q}_{\mathcal{K},\mathcal{L}^*}} \vec{\tau}_{\mathcal{K},\mathcal{L}} = 0, \end{cases} \quad (\text{VII.12})$$

- Si $\alpha_{\mathcal{K}} = \alpha_{\mathcal{L}}$, le système (VII.11) admet une solution (non unique) si on ajoute l'hypothèse suivante :

$$m_{\mathcal{Q}_{\mathcal{K},\mathcal{K}^*}} {}^t \vec{\tau}_{\mathcal{K}^*,\mathcal{L}^*} F_{\mathcal{Q}_{\mathcal{K},\mathcal{K}^*}} \vec{\tau}_{\mathcal{K}^*,\mathcal{L}^*} + m_{\mathcal{Q}_{\mathcal{L},\mathcal{K}^*}} {}^t \vec{\tau}_{\mathcal{K}^*,\mathcal{L}^*} F_{\mathcal{Q}_{\mathcal{L},\mathcal{K}^*}} \vec{\tau}_{\mathcal{K}^*,\mathcal{L}^*} = 0. \quad (\text{VII.13})$$

La solution est unique si on impose la condition dite "d'orthogonalité" : $(\delta^{\mathcal{D}} : \delta_0) = 0$.

- Si $\alpha_{\mathcal{K}} \neq \alpha_{\mathcal{L}}$, le système (VII.11) admet une unique solution. Il faut noter que dans ce cas on a toujours $(\delta^{\mathcal{D}} : \delta_0) = 0$, car on a posé $\delta_0 = 0$.

On rappelle que δ_0 est défini dans la Proposition VII.7.

Proposition VII.9

Pour tout $\mathcal{D} \in \mathcal{D}$, les conditions (VII.7) ou (VII.8), avec (VII.9)-(VII.10) et $(\delta^{\mathcal{D}} : \delta_0) = 0$ sont équivalentes à

$$\sum_{\mathcal{Q} \in \mathcal{Q}_{\mathcal{D}}} m_{\mathcal{Q}} \varphi_{\mathcal{Q}}(\mathbf{D}^{\mathcal{D}} \mathbf{u}^{\mathcal{T}}, \delta^{\mathcal{D}}, p^{\mathcal{Q}}) B_{\mathcal{Q}} = 0, \quad (\text{VII.14a})$$

$$\operatorname{Tr}({}^t \delta^{\mathcal{D}} B_{\mathcal{Q}}) = 0, \quad \forall \mathcal{Q} \in \mathcal{Q}_{\mathcal{D}}, \quad \sum_{\mathcal{Q} \in \mathcal{Q}_{\mathcal{D}}} m_{\mathcal{Q}} p^{\mathcal{Q}} = m_{\mathcal{D}} p^{\mathcal{D}}, \quad (\text{VII.14b})$$

$$(\delta^{\mathcal{D}} : \delta_0) = 0, \quad (\text{VII.14c})$$

où δ_0 est défini dans la Proposition VII.7.

On peut maintenant montrer l'existence et l'unicité des inconnues $(\delta^{\mathcal{D}}, p^{\mathcal{D}}) \in \mathcal{M}_{n_{\mathcal{D}},2}(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^{n_{\mathcal{D}}}$ entièrement déterminé par $(\mathbf{D}^{\mathcal{D}} \mathbf{u}^{\mathcal{T}}, p^{\mathcal{D}}) \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}$.

Théorème VII.10

Pour tout $\mathcal{D} \in \mathcal{D}$ et tout $(\mathbf{D}^{\mathcal{D}} \mathbf{u}^{\mathcal{T}}, p^{\mathcal{D}}) \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}$, il existe un unique couple $(\delta^{\mathcal{D}}, p^{\mathcal{D}}) \in \mathcal{M}_{n_{\mathcal{D}},2}(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^{n_{\mathcal{D}}}$ vérifiant (VII.14).

Démonstration : On travaille diamant par diamant. On fait la démonstration uniquement pour des diamants intérieurs $\mathcal{D} \in \mathfrak{D}_{int}$, ainsi on a $n_{\mathcal{D}} = 4$. Le cas des diamants du bord $\mathcal{D} \in \mathfrak{D}_{ext}$ peut se traiter de la même manière. Soit $\mathcal{D} \in \mathfrak{D}_{int}$. On écrit le système (VII.14) comme un système linéaire rectangle $AX = b$ avec $A \in \mathcal{M}_{14,12}(\mathbb{R})$ et $b \in \mathbb{R}^{14}$, donné par :

$$b = \begin{pmatrix} 2(\eta_{\mathcal{Q}_{\mathcal{K}},\mathcal{K}^*} - \eta_{\mathcal{Q}_{\mathcal{L}},\mathcal{K}^*})D^{\mathcal{D}}\mathbf{u}^{\mathcal{T}} \cdot \vec{\mathbf{n}}_{\sigma\mathcal{K}} \\ 2(\eta_{\mathcal{Q}_{\mathcal{K}},\mathcal{L}^*} - \eta_{\mathcal{Q}_{\mathcal{L}},\mathcal{L}^*})D^{\mathcal{D}}\mathbf{u}^{\mathcal{T}} \cdot \vec{\mathbf{n}}_{\sigma\mathcal{K}} \\ 2(\eta_{\mathcal{Q}_{\mathcal{K}},\mathcal{K}^*} - \eta_{\mathcal{Q}_{\mathcal{K}},\mathcal{L}^*})D^{\mathcal{D}}\mathbf{u}^{\mathcal{T}} \cdot \vec{\mathbf{n}}_{\sigma\mathcal{K}\mathcal{K}^*} \\ 2(\eta_{\mathcal{Q}_{\mathcal{L}},\mathcal{K}^*} - \eta_{\mathcal{Q}_{\mathcal{L}},\mathcal{L}^*})D^{\mathcal{D}}\mathbf{u}^{\mathcal{T}} \cdot \vec{\mathbf{n}}_{\sigma\mathcal{K}\mathcal{K}^*} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ m_{\mathcal{D}}p^{\mathcal{D}} \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{14}. \quad (\text{VII.15})$$

On commence par déterminer le noyau de A . On prend donc $D^{\mathcal{D}}\mathbf{u}^{\mathcal{T}}$ et $p^{\mathcal{D}}$ égaux à zéro, ainsi le second membre b est nul. En multipliant à droite la relation (VII.14a) par $\delta^{\mathcal{D}}$ et en prenant la trace, il vient que

$$\sum_{\mathcal{Q} \in \mathfrak{Q}_{\mathcal{D}}} m_{\mathcal{Q}}(\varphi_{\mathcal{Q}}(D^{\mathcal{D}}\mathbf{u}^{\mathcal{T}}, \delta^{\mathcal{D}}, p^{\mathcal{Q}}) : B_{\mathcal{Q}}\delta^{\mathcal{D}}) = 0.$$

La Définition VII.6 du tenseur des contraintes $\varphi_{\mathcal{Q}}$, qui est une matrice symétrique, donne alors

$$\sum_{\mathcal{Q} \in \mathfrak{Q}_{\mathcal{D}}} m_{\mathcal{Q}}(2\eta_{\mathcal{Q}}D^{\mathcal{D}}\mathbf{u}^{\mathcal{T}} + \eta_{\mathcal{Q}}(B_{\mathcal{Q}}\delta^{\mathcal{D}} + {}^t\delta^{\mathcal{D}t}B_{\mathcal{Q}}) - p^{\mathcal{Q}}\text{Id} : B_{\mathcal{Q}}\delta^{\mathcal{D}} + {}^t\delta^{\mathcal{D}t}B_{\mathcal{Q}}) = 0.$$

De plus, on a $(\text{Id} : B_{\mathcal{Q}}\delta^{\mathcal{D}} + {}^t\delta^{\mathcal{D}t}B_{\mathcal{Q}}) = \text{Tr}(B_{\mathcal{Q}}\delta^{\mathcal{D}})$. D'après (VII.14b) on a $\text{Tr}(B_{\mathcal{Q}}\delta^{\mathcal{D}}) = 0$, ceci conduit à

$$\sum_{\mathcal{Q} \in \mathfrak{Q}_{\mathcal{D}}} m_{\mathcal{Q}}(2\eta_{\mathcal{Q}}D^{\mathcal{D}}\mathbf{u}^{\mathcal{T}} + \eta_{\mathcal{Q}}(B_{\mathcal{Q}}\delta^{\mathcal{D}} + {}^t\delta^{\mathcal{D}t}B_{\mathcal{Q}}) : B_{\mathcal{Q}}\delta^{\mathcal{D}}) = 0. \quad (\text{VII.16})$$

Grâce à $D^{\mathcal{D}}\mathbf{u}^{\mathcal{T}} = 0$, on obtient

$$\sum_{\mathcal{Q} \in \mathfrak{Q}_{\mathcal{D}}} m_{\mathcal{Q}}\eta_{\mathcal{Q}}({}^t\delta^{\mathcal{D}t}B_{\mathcal{Q}} + B_{\mathcal{Q}}\delta^{\mathcal{D}} : B_{\mathcal{Q}}\delta^{\mathcal{D}}) = 0.$$

Comme la matrice ${}^t\delta^{\mathcal{D}t}B_{\mathcal{Q}} + B_{\mathcal{Q}}\delta^{\mathcal{D}}$ est symétrique, on en déduit

$$\sum_{\mathcal{Q} \in \mathfrak{Q}_{\mathcal{D}}} m_{\mathcal{Q}}\eta_{\mathcal{Q}}\|{}^t\delta^{\mathcal{D}t}B_{\mathcal{Q}} + B_{\mathcal{Q}}\delta^{\mathcal{D}}\|_{\mathcal{F}}^2 = 0.$$

Par conséquent, il vient que

$${}^t\delta^{\mathcal{D}t}B_{\mathcal{Q}} + B_{\mathcal{Q}}\delta^{\mathcal{D}} = 0, \quad \forall \mathcal{Q} \in \mathfrak{Q}_{\mathcal{D}}.$$

On en déduit, en utilisant le fait que $(\delta^{\mathcal{D}} : \delta_0) = 0$ et grâce à la Proposition VII.7, que $\delta^{\mathcal{D}} = 0$. De plus, la condition (VII.7) se réduit ainsi à

$$\begin{aligned} (p_{\mathcal{Q}_{\mathcal{K}},\mathcal{K}^*} - p_{\mathcal{Q}_{\mathcal{L}},\mathcal{K}^*})\vec{\mathbf{n}}_{\sigma\mathcal{K}} &= 0, & (p_{\mathcal{Q}_{\mathcal{K}},\mathcal{L}^*} - p_{\mathcal{Q}_{\mathcal{L}},\mathcal{L}^*})\vec{\mathbf{n}}_{\sigma\mathcal{K}} &= 0, \\ (p_{\mathcal{Q}_{\mathcal{K}},\mathcal{K}^*} - p_{\mathcal{Q}_{\mathcal{K}},\mathcal{L}^*})\vec{\mathbf{n}}_{\sigma\mathcal{K}\mathcal{K}^*} &= 0, & (p_{\mathcal{Q}_{\mathcal{L}},\mathcal{K}^*} - p_{\mathcal{Q}_{\mathcal{L}},\mathcal{L}^*})\vec{\mathbf{n}}_{\sigma\mathcal{L}\mathcal{K}^*} &= 0. \end{aligned}$$

On obtient alors que $p_{\mathcal{Q}_{\mathcal{K}},\mathcal{K}^*} = p_{\mathcal{Q}_{\mathcal{L}},\mathcal{K}^*} = p_{\mathcal{Q}_{\mathcal{K}},\mathcal{L}^*} = p_{\mathcal{Q}_{\mathcal{L}},\mathcal{L}^*}$ et grâce à (VII.10), finalement on en déduit $p^{\mathfrak{Q}_{\mathcal{D}}} = 0$.

Il reste à étudier le noyau de l'adjoint de la matrice A . Pour cela on a besoin de différencier deux cas en fonction des angles $\alpha_{\mathcal{K}}$ et $\alpha_{\mathcal{L}}$.

•**Cas $\alpha_{\mathcal{K}} \neq \alpha_{\mathcal{L}}$:** On montre que le noyau de l'adjoint vaut $\text{Ker}^t A = \text{Vect} X_1$ avec :

$$X_1 = {}^t(0, \dots, 0, m_{\mathcal{Q}_{\mathcal{K}},\mathcal{K}^*}, m_{\mathcal{Q}_{\mathcal{K}},\mathcal{L}^*}, m_{\mathcal{Q}_{\mathcal{L}},\mathcal{K}^*}, m_{\mathcal{Q}_{\mathcal{L}},\mathcal{L}^*}, 0, 0) \in \mathbb{R}^{14}.$$

On obtient immédiatement que $(X_1, b) = 0$ où b est donné par (VII.15). Ceci donne $b \in (\text{Ker}^t A)^{\perp} = \text{Im} A$ et ainsi on en déduit l'existence du couple $(\delta^{\mathcal{D}}, p^{\mathfrak{Q}_{\mathcal{D}}})$.

•**Cas** $\alpha_\kappa = \alpha_\mathcal{L}$: On détermine le noyau de l'adjoint $\text{Ker}^t A = \text{Vect}(X_1, X_2)$ avec X_1 donné ci-dessus et

$$X_2 = {}^t(-{}^t\vec{n}_{\sigma\kappa\kappa^*}, {}^t\vec{n}_{\sigma\kappa\kappa^*}, {}^t\vec{n}_{\sigma\kappa}, -{}^t\vec{n}_{\sigma\kappa}, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^{14}.$$

On doit encore une fois montrer que $b \in \text{Im} A = (\text{Ker}^t A)^\perp$. On a toujours $(X_1, b) = 0$. Il reste à montrer que $(X_2, b) = 0$, ainsi on calcule le produit scalaire :

$$\begin{aligned} (X_2, b) = & -2(\eta_{\mathcal{Q}\kappa, \kappa^*} - \eta_{\mathcal{Q}\mathcal{L}, \kappa^*})(D^\mathcal{D}\mathbf{u}^\mathcal{T} \cdot \vec{n}_{\sigma\kappa}) \cdot \vec{n}_{\sigma\kappa\kappa^*} + 2(\eta_{\mathcal{Q}\kappa, \mathcal{L}^*} - \eta_{\mathcal{Q}\mathcal{L}, \mathcal{L}^*})(D^\mathcal{D}\mathbf{u}^\mathcal{T} \cdot \vec{n}_{\sigma\kappa}) \cdot \vec{n}_{\sigma\kappa\kappa^*} \\ & + 2(\eta_{\mathcal{Q}\kappa, \kappa^*} - \eta_{\mathcal{Q}\kappa, \mathcal{L}^*})(D^\mathcal{D}\mathbf{u}^\mathcal{T} \cdot \vec{n}_{\sigma\kappa\kappa^*}) \cdot \vec{n}_{\sigma\kappa} - 2(\eta_{\mathcal{Q}\mathcal{L}, \kappa^*} - \eta_{\mathcal{Q}\mathcal{L}, \mathcal{L}^*})(D^\mathcal{D}\mathbf{u}^\mathcal{T} \cdot \vec{n}_{\sigma\kappa\kappa^*}) \cdot \vec{n}_{\sigma\kappa}. \end{aligned}$$

Comme $D^\mathcal{D}\mathbf{u}^\mathcal{T}$ est une matrice symétrique, on a que $(D^\mathcal{D}\mathbf{u}^\mathcal{T} \cdot \vec{n}_{\sigma\kappa}) \cdot \vec{n}_{\sigma\kappa\kappa^*} = (D^\mathcal{D}\mathbf{u}^\mathcal{T} \cdot \vec{n}_{\sigma\kappa\kappa^*}) \cdot \vec{n}_{\sigma\kappa}$, on obtient $(X_2, b) = 0$. Par conséquent $b \in \text{Im} A$, et on en déduit l'existence du couple $(\delta^\mathcal{D}, p^{\mathcal{Q}\mathcal{D}})$. ■

A partir de maintenant, les inconnues artificielles $(\delta^\mathcal{D}, p^{\mathcal{Q}\mathcal{D}})$ sont déterminées, elles dépendent linéairement du couple $(D^\mathcal{D}\mathbf{u}^\mathcal{T}, p^\mathcal{D})$. En fait, on montrera dans la suite que l'inconnue $\delta^\mathcal{D}$ est entièrement connu à partir de la valeur de $D^\mathcal{D}\mathbf{u}^\mathcal{T}$. Ainsi les opérateurs sur les quarts de diamants sont complètement fixé. En effet, on a pour tout $\mathcal{Q} \in \mathcal{Q}_\mathcal{D}$ et tout $\mathcal{D} \in \mathcal{D}$:

$$\begin{aligned} \nabla_\mathcal{Q}^\mathcal{N}\mathbf{u}^\mathcal{T} &= \nabla^\mathcal{D}\mathbf{u}^\mathcal{T} + {}^t\delta^\mathcal{D}(D^\mathcal{D}\mathbf{u}^\mathcal{T})^t B_\mathcal{Q}, \\ D_\mathcal{Q}^\mathcal{N}\mathbf{u}^\mathcal{T} &= D^\mathcal{D}\mathbf{u}^\mathcal{T} + B_\mathcal{Q}\delta^\mathcal{D}(D^\mathcal{D}\mathbf{u}^\mathcal{T}) + {}^t\delta^\mathcal{D}(D^\mathcal{D}\mathbf{u}^\mathcal{T})^t B_\mathcal{Q}. \end{aligned}$$

De plus, pour tout $\mathcal{D} \in \mathcal{D}$, au vu du choix de $\delta^\mathcal{D}$, on a pour tout $\mathcal{Q} \in \mathcal{Q}_\mathcal{D}$:

$$\text{Tr}(\nabla_\mathcal{Q}^\mathcal{N}\mathbf{u}^\mathcal{T}) = \text{div}^\mathcal{D}(\mathbf{u}^\mathcal{T}). \quad (\text{VII.17})$$

VII.1.4 Exemple de calcul des inconnues artificielles

On peut expliciter le calcul des inconnues artificielles $(\delta^\mathcal{D}, p^{\mathcal{Q}\mathcal{D}})$ dans le cas où la viscosité η est constante par maille primale, égale à η_1 sur κ et à η_2 sur \mathcal{L} .

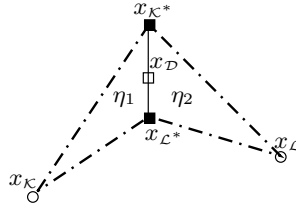


FIG. VII.3 – La viscosité constante par maille primale.

La solution $(\delta^\mathcal{D} = {}^t(\delta_\kappa, \delta_\mathcal{L}, \delta_{\kappa^*}, \delta_{\mathcal{L}^*}), p^{\mathcal{Q}\mathcal{D}} = {}^t(p_{\mathcal{Q}\kappa, \kappa^*}, p_{\mathcal{Q}\kappa, \mathcal{L}^*}, p_{\mathcal{Q}\mathcal{L}, \kappa^*}, p_{\mathcal{Q}\mathcal{L}, \mathcal{L}^*}))$, dans le cas de la Figure VII.3, vaut

$$\begin{aligned} \delta_\kappa &= \delta_\mathcal{L} = 0, & \delta_{\kappa^*} &= \delta_{\mathcal{L}^*} = -\frac{m_{\mathcal{Q}\kappa, \kappa^*} m_{\mathcal{Q}\mathcal{L}, \kappa^*} (\eta_1 - \eta_2) (D^\mathcal{D}\mathbf{u}^\mathcal{T} \cdot \vec{n}_{\sigma\kappa}) \cdot \vec{\tau}_{\kappa^*, \mathcal{L}^*}}{\eta_2 m_{\mathcal{Q}\kappa, \kappa^*} + \eta_1 m_{\mathcal{Q}\mathcal{L}, \kappa^*}} \vec{\tau}_{\kappa^*, \mathcal{L}^*}, \\ p_{\mathcal{Q}\kappa, \kappa^*} &= p^\mathcal{D} + 2(\eta_1 - \eta_2) (D^\mathcal{D}\mathbf{u}^\mathcal{T} \cdot \vec{n}_{\sigma\kappa}) \cdot \vec{n}_{\sigma\kappa} \frac{m_{\mathcal{Q}\mathcal{L}, \kappa^*}}{m_{\mathcal{Q}\kappa, \kappa^*} + m_{\mathcal{Q}\mathcal{L}, \kappa^*}}, & p_{\mathcal{Q}\kappa, \mathcal{L}^*} &= p_{\mathcal{Q}\kappa, \kappa^*}, \\ p_{\mathcal{Q}\mathcal{L}, \kappa^*} &= p^\mathcal{D} + 2(\eta_2 - \eta_1) (D^\mathcal{D}\mathbf{u}^\mathcal{T} \cdot \vec{n}_{\sigma\kappa}) \cdot \vec{n}_{\sigma\kappa} \frac{m_{\mathcal{Q}\kappa, \kappa^*}}{m_{\mathcal{Q}\kappa, \kappa^*} + m_{\mathcal{Q}\mathcal{L}, \kappa^*}}, & p_{\mathcal{Q}\mathcal{L}, \mathcal{L}^*} &= p_{\mathcal{Q}\mathcal{L}, \kappa^*}. \end{aligned}$$

Dans la Figure VII.3, le vecteur $\vec{n}_{\sigma\kappa}$ est colinéaire à l'axe des abscisses, ceci va simplifier l'expression du tenseur des contraintes visqueuses dans la base canonique donnée ci-dessous. On peut calculer les valeurs de $B_\mathcal{Q}\delta^\mathcal{D}$:

$$\begin{aligned} B_{\mathcal{Q}\kappa, \kappa^*} \delta^\mathcal{D} &= -\frac{m_{\mathcal{Q}\mathcal{L}, \kappa^*} (\eta_1 - \eta_2) (D^\mathcal{D}\mathbf{u}^\mathcal{T} \cdot \vec{n}_{\sigma\kappa}) \cdot \vec{\tau}_{\kappa^*, \mathcal{L}^*}}{\eta_2 m_{\mathcal{Q}\kappa, \kappa^*} + \eta_1 m_{\mathcal{Q}\mathcal{L}, \kappa^*}} m_{\sigma\kappa^*} {}^t(\vec{\tau}_{\kappa^*, \mathcal{L}^*} \otimes \vec{n}_{\sigma\kappa}), \\ B_{\mathcal{Q}\mathcal{L}, \kappa^*} \delta^\mathcal{D} &= \frac{m_{\mathcal{Q}\kappa, \kappa^*} (\eta_1 - \eta_2) (D^\mathcal{D}\mathbf{u}^\mathcal{T} \cdot \vec{n}_{\sigma\kappa}) \cdot \vec{\tau}_{\kappa^*, \mathcal{L}^*}}{\eta_2 m_{\mathcal{Q}\kappa, \kappa^*} + \eta_1 m_{\mathcal{Q}\mathcal{L}, \kappa^*}} m_{\sigma\kappa^*} {}^t(\vec{\tau}_{\kappa^*, \mathcal{L}^*} \otimes \vec{n}_{\sigma\kappa}), \\ B_{\mathcal{Q}\kappa, \mathcal{L}^*} \delta^\mathcal{D} &= -\frac{m_{\mathcal{Q}\kappa, \kappa^*} m_{\mathcal{Q}\mathcal{L}, \kappa^*} (\eta_1 - \eta_2) (D^\mathcal{D}\mathbf{u}^\mathcal{T} \cdot \vec{n}_{\sigma\kappa}) \cdot \vec{\tau}_{\kappa^*, \mathcal{L}^*}}{\eta_2 m_{\mathcal{Q}\kappa, \kappa^*} + \eta_1 m_{\mathcal{Q}\mathcal{L}, \kappa^*}} \frac{m_{\sigma\mathcal{L}^*}}{m_{\mathcal{Q}\mathcal{L}, \mathcal{L}^*}} {}^t(\vec{\tau}_{\kappa^*, \mathcal{L}^*} \otimes \vec{n}_{\sigma\kappa}), \\ B_{\mathcal{Q}\mathcal{L}, \mathcal{L}^*} \delta^\mathcal{D} &= \frac{m_{\mathcal{Q}\kappa, \kappa^*} m_{\mathcal{Q}\mathcal{L}, \kappa^*} (\eta_1 - \eta_2) (D^\mathcal{D}\mathbf{u}^\mathcal{T} \cdot \vec{n}_{\sigma\kappa}) \cdot \vec{\tau}_{\kappa^*, \mathcal{L}^*}}{\eta_2 m_{\mathcal{Q}\kappa, \kappa^*} + \eta_1 m_{\mathcal{Q}\mathcal{L}, \kappa^*}} \frac{m_{\sigma\mathcal{L}^*}}{m_{\mathcal{Q}\mathcal{L}, \mathcal{L}^*}} {}^t(\vec{\tau}_{\kappa^*, \mathcal{L}^*} \otimes \vec{n}_{\sigma\kappa}). \end{aligned}$$

On rappelle également quelques produits scalaires entre ses différents vecteurs

$$\begin{aligned}
\vec{n}_{\sigma\kappa} \cdot \vec{\tau}_{\sigma\kappa\kappa^*} &= \sin(\alpha_\kappa), & \vec{n}_{\sigma\kappa} \cdot \vec{\tau}_{\sigma\mathcal{L}\kappa^*} &= \sin(\alpha_\mathcal{L}), & \vec{n}_{\sigma\kappa} \cdot \vec{\tau}_{\kappa^*,\mathcal{L}^*} &= 0, \\
\vec{n}_{\sigma\kappa\kappa^*} \cdot \vec{\tau}_{\kappa^*,\mathcal{L}^*} &= \sin(\alpha_\kappa), & \vec{n}_{\sigma\mathcal{L}\kappa^*} \cdot \vec{\tau}_{\kappa^*,\mathcal{L}^*} &= \sin(\alpha_\mathcal{L}), & \vec{n}_{\sigma\kappa\kappa^*} \cdot \vec{\tau}_{\sigma\kappa\kappa^*} &= 0, \\
\vec{n}_{\sigma\kappa\kappa^*} \cdot \vec{\tau}_{\sigma\mathcal{L}\kappa^*} &= \sin(\alpha_\kappa - \alpha_\mathcal{L}), & \vec{n}_{\sigma\mathcal{L}\kappa^*} \cdot \vec{\tau}_{\sigma\kappa\kappa^*} &= \sin(\alpha_\mathcal{L} - \alpha_\kappa), \\
\vec{n}_{\sigma\kappa\kappa^*} \cdot \vec{n}_{\sigma\mathcal{L}\kappa^*} &= \cos(\alpha_\kappa - \alpha_\mathcal{L}), & \vec{n}_{\sigma\mathcal{L}\kappa^*} \cdot \vec{\tau}_{\sigma\mathcal{L}\kappa^*} &= 0.
\end{aligned}$$

Estimation entre $\delta^\mathcal{D}$ et $B_\mathcal{Q}\delta^\mathcal{D} + {}^t\delta^\mathcal{D}B_\mathcal{Q}$: On explicite les composantes de $\delta^\mathcal{D}$ dans les bases d'un diamant

$$\begin{aligned}
{}^t\delta_\kappa &= \mu_\kappa \vec{\tau}_{\kappa^*,\mathcal{L}^*} + \lambda_\kappa \vec{n}_{\sigma\kappa}, & {}^t\delta_\mathcal{L} &= \mu_\mathcal{L} \vec{\tau}_{\kappa^*,\mathcal{L}^*} + \lambda_\mathcal{L} \vec{n}_{\sigma\kappa}, \\
{}^t\delta_{\kappa^*} &= \mu_{\kappa^*} \vec{\tau}_{\sigma\kappa\kappa^*} + \lambda_{\kappa^*} \vec{n}_{\sigma\kappa\kappa^*}, & {}^t\delta_{\mathcal{L}^*} &= \mu_{\mathcal{L}^*} \vec{\tau}_{\sigma\kappa\kappa^*} + \lambda_{\mathcal{L}^*} \vec{n}_{\sigma\kappa\kappa^*},
\end{aligned} \tag{VII.18}$$

où μ, λ appartiennent à \mathbb{R} . On pose $S_\mathcal{Q} = B_\mathcal{Q}\delta^\mathcal{D} + {}^t\delta^\mathcal{D}B_\mathcal{Q}$, pour tout $\mathcal{Q} \in \Omega_\mathcal{D}$, on remarque que ${}^tXB_\mathcal{Q}\delta^\mathcal{D}X = {}^tX{}^t\delta^\mathcal{D}B_\mathcal{Q}X$ pour tout $X \in \mathbb{R}^2$, pour obtenir

$$m_\mathcal{Q} {}^tX{}^t\delta^\mathcal{D}B_\mathcal{Q}X = \frac{m_\mathcal{Q}}{2} {}^tXS_\mathcal{Q}X, \quad \forall X \in \mathbb{R}^2, \quad \forall \mathcal{Q} \in \Omega_\mathcal{D}.$$

Ainsi la définition de $B_\mathcal{Q}$ (VII.5) et la décomposition de $\delta^\mathcal{D}$ (VII.18) impliquent quatre équations correspondant à chaque $\mathcal{Q} \in \Omega_\mathcal{D}$ pour tout $X \in \mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned}
\mu_\kappa m_{\sigma\kappa}(X \cdot \vec{\tau}_{\kappa^*,\mathcal{L}^*})(X \cdot \vec{n}_{\sigma\kappa\kappa^*}) + \lambda_\kappa m_{\sigma\kappa}(X \cdot \vec{n}_{\sigma\kappa})(X \cdot \vec{n}_{\sigma\kappa\kappa^*}) \\
+ m_{\sigma\kappa^*} \mu_{\kappa^*}(X \cdot \vec{\tau}_{\sigma\kappa\kappa^*})(X \cdot \vec{n}_{\sigma\kappa}) + \lambda_{\kappa^*} m_{\sigma\kappa^*}(X \cdot \vec{n}_{\sigma\kappa\kappa^*})(X \cdot \vec{n}_{\sigma\kappa}) = \frac{m_{\mathcal{Q}_{\kappa,\kappa^*}}}{2} {}^tXS_{\mathcal{Q}_{\kappa,\kappa^*}}X,
\end{aligned} \tag{VII.19a}$$

$$\begin{aligned}
- m_{\sigma\kappa} \mu_\kappa(X \cdot \vec{\tau}_{\kappa^*,\mathcal{L}^*})(X \cdot \vec{n}_{\sigma\kappa\kappa^*}) - \lambda_\kappa m_{\sigma\kappa}(X \cdot \vec{n}_{\sigma\kappa})(X \cdot \vec{n}_{\sigma\kappa\kappa^*}) \\
+ m_{\sigma\mathcal{L}^*} \mu_{\mathcal{L}^*}(X \cdot \vec{\tau}_{\sigma\kappa\kappa^*})(X \cdot \vec{n}_{\sigma\kappa}) + \lambda_{\mathcal{L}^*} m_{\sigma\mathcal{L}^*}(X \cdot \vec{n}_{\sigma\kappa\kappa^*})(X \cdot \vec{n}_{\sigma\kappa}) = \frac{m_{\mathcal{Q}_{\mathcal{L},\mathcal{L}^*}}}{2} {}^tXS_{\mathcal{Q}_{\mathcal{L},\mathcal{L}^*}}X,
\end{aligned} \tag{VII.19b}$$

$$\begin{aligned}
m_{\sigma\mathcal{L}} \mu_\mathcal{L}(X \cdot \vec{\tau}_{\kappa^*,\mathcal{L}^*})(X \cdot \vec{n}_{\sigma\mathcal{L}\kappa^*}) + \lambda_\mathcal{L} m_{\sigma\mathcal{L}}(X \cdot \vec{n}_{\sigma\kappa})(X \cdot \vec{n}_{\sigma\mathcal{L}\kappa^*}) \\
- m_{\sigma\kappa^*} \mu_{\kappa^*}(X \cdot \vec{\tau}_{\sigma\kappa\kappa^*})(X \cdot \vec{n}_{\sigma\kappa}) - \lambda_{\kappa^*} m_{\sigma\kappa^*}(X \cdot \vec{n}_{\sigma\kappa\kappa^*})(X \cdot \vec{n}_{\sigma\kappa}) = \frac{m_{\mathcal{Q}_{\mathcal{L},\kappa^*}}}{2} {}^tXS_{\mathcal{Q}_{\mathcal{L},\kappa^*}}X,
\end{aligned} \tag{VII.19c}$$

$$\begin{aligned}
- m_{\sigma\mathcal{L}} \mu_\mathcal{L}(X \cdot \vec{\tau}_{\kappa^*,\mathcal{L}^*})(X \cdot \vec{n}_{\sigma\mathcal{L}\kappa^*}) - \lambda_\mathcal{L} m_{\sigma\mathcal{L}}(X \cdot \vec{n}_{\sigma\kappa})(X \cdot \vec{n}_{\sigma\mathcal{L}\kappa^*}) \\
- m_{\sigma\mathcal{L}^*} \mu_{\mathcal{L}^*}(X \cdot \vec{\tau}_{\sigma\kappa\kappa^*})(X \cdot \vec{n}_{\sigma\kappa}) - \lambda_{\mathcal{L}^*} m_{\sigma\mathcal{L}^*}(X \cdot \vec{n}_{\sigma\kappa\kappa^*})(X \cdot \vec{n}_{\sigma\kappa}) = \frac{m_{\mathcal{Q}_{\mathcal{L},\mathcal{L}^*}}}{2} {}^tXS_{\mathcal{Q}_{\mathcal{L},\mathcal{L}^*}}X.
\end{aligned} \tag{VII.19d}$$

On en déduit les quatre différentes valeurs de μ , en prenant $X = \vec{\tau}_{\sigma\kappa\kappa^*}$ dans (VII.19a)-(VII.19b) et en prenant $X = \vec{\tau}_{\kappa^*,\mathcal{L}^*}$ dans (VII.19c)-(VII.19d).

$$\begin{aligned}
\mu_\kappa &= \frac{m_{\sigma\kappa^*}}{4} {}^t\vec{\tau}_{\kappa^*,\mathcal{L}^*} S_{\mathcal{Q}_{\kappa,\kappa^*}} \vec{\tau}_{\kappa^*,\mathcal{L}^*}, \\
\mu_\mathcal{L} &= \frac{m_{\sigma\kappa^*}}{4} {}^t\vec{\tau}_{\kappa^*,\mathcal{L}^*} S_{\mathcal{Q}_{\mathcal{L},\kappa^*}} \vec{\tau}_{\kappa^*,\mathcal{L}^*}, \\
\mu_{\kappa^*} &= \frac{m_{\sigma\kappa}}{4} {}^t\vec{\tau}_{\kappa^*,\mathcal{L}^*} S_{\mathcal{Q}_{\kappa,\kappa^*}} \vec{\tau}_{\kappa^*,\mathcal{L}^*}, \\
\mu_{\mathcal{L}^*} &= \frac{m_{\sigma\kappa}}{4} {}^t\vec{\tau}_{\kappa^*,\mathcal{L}^*} S_{\mathcal{Q}_{\mathcal{L},\kappa^*}} \vec{\tau}_{\kappa^*,\mathcal{L}^*}.
\end{aligned}$$

Grâce à la relation (I.1), on a l'estimation suivante pour les quatre μ :

$$\mu^2 \leq C(\text{reg}(\mathcal{T})) \sum_{\mathcal{Q} \in \Omega_\mathcal{D}} m_\mathcal{Q} \|S_\mathcal{Q}\|_{\mathcal{F}}^2. \tag{VII.20}$$

Maintenant on s'intéresse aux quatre valeurs de λ . Les équations de (VII.19) peuvent se réécrire comme suit

$$\begin{aligned}
(\lambda_\kappa m_{\sigma\kappa} + \lambda_{\kappa^*} m_{\sigma\kappa^*})(X \cdot \vec{n}_{\sigma\kappa})(X \cdot \vec{n}_{\sigma\kappa\kappa^*}) \\
= \frac{m_{\mathcal{Q}_{\kappa,\kappa^*}}}{2} {}^tXS_{\mathcal{Q}_{\kappa,\kappa^*}}X - \mu_\kappa m_{\sigma\kappa}(X \cdot \vec{\tau}_{\kappa^*,\mathcal{L}^*})(X \cdot \vec{n}_{\sigma\kappa\kappa^*}) - m_{\sigma\kappa^*} \mu_{\kappa^*}(X \cdot \vec{\tau}_{\sigma\kappa\kappa^*})(X \cdot \vec{n}_{\sigma\kappa}),
\end{aligned} \tag{VII.21a}$$

$$\begin{aligned}
(-\lambda_\kappa m_{\sigma\kappa} + \lambda_{\mathcal{L}^*} m_{\sigma\mathcal{L}^*})(X \cdot \vec{n}_{\sigma\kappa})(X \cdot \vec{n}_{\sigma\kappa\kappa^*}) \\
= \frac{m_{\mathcal{Q}_{\mathcal{L},\mathcal{L}^*}}}{2} {}^tXS_{\mathcal{Q}_{\mathcal{L},\mathcal{L}^*}}X + m_{\sigma\kappa} \mu_\kappa(X \cdot \vec{\tau}_{\kappa^*,\mathcal{L}^*})(X \cdot \vec{n}_{\sigma\kappa\kappa^*}) - m_{\sigma\mathcal{L}^*} \mu_{\mathcal{L}^*}(X \cdot \vec{\tau}_{\sigma\kappa\kappa^*})(X \cdot \vec{n}_{\sigma\kappa}),
\end{aligned} \tag{VII.21b}$$

$$\begin{aligned}
& (\lambda_{\mathcal{L}} m_{\sigma_{\mathcal{L}}} (X \cdot \vec{\mathbf{n}}_{\sigma_{\mathcal{L}} \mathcal{K}^*}) - \lambda_{\mathcal{K}^*} m_{\sigma_{\mathcal{K}^*}} (X \cdot \vec{\mathbf{n}}_{\sigma_{\mathcal{K}} \mathcal{K}^*})) (X \cdot \vec{\mathbf{n}}_{\sigma_{\mathcal{K}}}) \\
&= \frac{m_{\mathcal{Q}_{\mathcal{L}, \mathcal{K}^*}}}{2} {}^t X S_{\mathcal{Q}_{\mathcal{L}, \mathcal{K}^*}} X - m_{\sigma_{\mathcal{L}}} \mu_{\mathcal{L}} (X \cdot \vec{\tau}_{\mathcal{K}^*, \mathcal{L}^*}) (X \cdot \vec{\mathbf{n}}_{\sigma_{\mathcal{L}} \mathcal{K}^*}) + m_{\sigma_{\mathcal{K}^*}} \mu_{\mathcal{K}^*} (X \cdot \vec{\tau}_{\sigma_{\mathcal{K}} \mathcal{K}^*}) (X \cdot \vec{\mathbf{n}}_{\sigma_{\mathcal{K}}}),
\end{aligned} \tag{VII.21c}$$

$$\begin{aligned}
& (-\lambda_{\mathcal{L}} m_{\sigma_{\mathcal{L}}} (X \cdot \vec{\mathbf{n}}_{\sigma_{\mathcal{L}} \mathcal{K}^*}) - \lambda_{\mathcal{L}^*} m_{\sigma_{\mathcal{L}^*}} (X \cdot \vec{\mathbf{n}}_{\sigma_{\mathcal{K}} \mathcal{K}^*})) (X \cdot \vec{\mathbf{n}}_{\sigma_{\mathcal{K}}}) \\
&= \frac{m_{\mathcal{Q}_{\mathcal{L}, \mathcal{L}^*}}}{2} {}^t X S_{\mathcal{Q}_{\mathcal{L}, \mathcal{L}^*}} X + m_{\sigma_{\mathcal{L}}} \mu_{\mathcal{L}} (X \cdot \vec{\tau}_{\mathcal{K}^*, \mathcal{L}^*}) (X \cdot \vec{\mathbf{n}}_{\sigma_{\mathcal{L}} \mathcal{K}^*}) + m_{\sigma_{\mathcal{L}^*}} \mu_{\mathcal{L}^*} (X \cdot \vec{\tau}_{\sigma_{\mathcal{K}} \mathcal{K}^*}) (X \cdot \vec{\mathbf{n}}_{\sigma_{\mathcal{K}}}).
\end{aligned} \tag{VII.21d}$$

Maintenant on différencie deux cas en fonction des angles.

• **Cas $\alpha_{\mathcal{K}} \neq \alpha_{\mathcal{L}}$:** On a dans ce cas $|\vec{\mathbf{n}}_{\sigma_{\mathcal{L}} \mathcal{K}^*} \cdot \vec{\tau}_{\sigma_{\mathcal{K}} \mathcal{K}^*}| = |\sin(\alpha_{\mathcal{L}} - \alpha_{\mathcal{K}})| > \sin(\epsilon_0) \neq 0$. On obtient les quatre différentes valeurs de λ , en prenant dans (VII.21c) respectivement $X = \vec{\tau}_{\sigma_{\mathcal{K}} \mathcal{K}^*}$ et $X = \vec{\tau}_{\sigma_{\mathcal{L}} \mathcal{K}^*}$, et dans (VII.21d) $X = \vec{\tau}_{\sigma_{\mathcal{L}} \mathcal{K}^*}$. La valeur $\lambda_{\mathcal{K}}$ se déduit à partir des autres et de (VII.21a).

$$\begin{aligned}
\lambda_{\mathcal{L}} &= \frac{m_{\sigma_{\mathcal{K}^*}} \sin(\alpha_{\mathcal{L}})}{4 \sin(\alpha_{\mathcal{L}} - \alpha_{\mathcal{K}}) \sin(\alpha_{\mathcal{K}})} {}^t \vec{\tau}_{\sigma_{\mathcal{K}} \mathcal{K}^*} S_{\mathcal{Q}_{\mathcal{L}, \mathcal{K}^*}} \vec{\tau}_{\sigma_{\mathcal{K}} \mathcal{K}^*} - \frac{1}{\sin(\alpha_{\mathcal{K}})} \mu_{\mathcal{L}} \vec{\tau}_{\sigma_{\mathcal{K}} \mathcal{K}^*} \cdot \vec{\tau}_{\mathcal{K}^*, \mathcal{L}^*} + \frac{m_{\sigma_{\mathcal{K}^*}}}{m_{\sigma_{\mathcal{L}}} \sin(\alpha_{\mathcal{L}} - \alpha_{\mathcal{K}})} \mu_{\mathcal{K}^*}, \\
\lambda_{\mathcal{K}^*} &= - \frac{1}{\vec{\tau}_{\sigma_{\mathcal{L}} \mathcal{K}^*} \cdot \vec{\mathbf{n}}_{\sigma_{\mathcal{K}} \mathcal{K}^*}} \left[\frac{m_{\sigma_{\mathcal{L}}}}{4} {}^t \vec{\tau}_{\sigma_{\mathcal{L}} \mathcal{K}^*} S_{\mathcal{Q}_{\mathcal{L}, \mathcal{K}^*}} \vec{\tau}_{\sigma_{\mathcal{L}} \mathcal{K}^*} + \mu_{\mathcal{K}^*} \vec{\tau}_{\sigma_{\mathcal{L}} \mathcal{K}^*} \cdot \vec{\tau}_{\sigma_{\mathcal{K}} \mathcal{K}^*} \right], \\
\lambda_{\mathcal{L}^*} &= - \frac{1}{\vec{\tau}_{\sigma_{\mathcal{L}} \mathcal{K}^*} \cdot \vec{\mathbf{n}}_{\sigma_{\mathcal{K}} \mathcal{K}^*}} \left[\frac{m_{\sigma_{\mathcal{L}}}}{4} {}^t \vec{\tau}_{\sigma_{\mathcal{L}} \mathcal{K}^*} S_{\mathcal{Q}_{\mathcal{L}, \mathcal{L}^*}} \vec{\tau}_{\sigma_{\mathcal{L}} \mathcal{K}^*} + \mu_{\mathcal{L}^*} \vec{\tau}_{\sigma_{\mathcal{L}} \mathcal{K}^*} \cdot \vec{\tau}_{\sigma_{\mathcal{K}} \mathcal{K}^*} \right], \\
\lambda_{\mathcal{K}} &= \frac{m_{\sigma_{\mathcal{K}^*}}}{4 \sin(\alpha_{\mathcal{K}})} ({}^t (\vec{\tau}_{\mathcal{K}^*, \mathcal{L}^*} + \vec{\tau}_{\sigma_{\mathcal{K}} \mathcal{K}^*}) S_{\mathcal{Q}_{\mathcal{K}, \mathcal{K}^*}} (\vec{\tau}_{\mathcal{K}^*, \mathcal{L}^*} + \vec{\tau}_{\sigma_{\mathcal{K}} \mathcal{K}^*}) \\
&\quad - \frac{1}{\sin(\alpha_{\mathcal{K}})} \left[(\vec{\tau}_{\mathcal{K}^*, \mathcal{L}^*} + \vec{\tau}_{\sigma_{\mathcal{K}} \mathcal{K}^*}) \cdot \left(\mu_{\mathcal{K}} \vec{\tau}_{\mathcal{K}^*, \mathcal{L}^*} + \frac{m_{\sigma_{\mathcal{K}^*}}}{m_{\sigma_{\mathcal{K}}}} \mu_{\mathcal{K}^*} \vec{\tau}_{\sigma_{\mathcal{K}} \mathcal{K}^*} \right) \right] \\
&\quad + \frac{m_{\sigma_{\mathcal{K}^*}}}{m_{\sigma_{\mathcal{K}}} \vec{\tau}_{\sigma_{\mathcal{L}} \mathcal{K}^*} \cdot \vec{\mathbf{n}}_{\sigma_{\mathcal{K}} \mathcal{K}^*}} \left[\frac{m_{\sigma_{\mathcal{L}}}}{4} {}^t \vec{\tau}_{\sigma_{\mathcal{L}} \mathcal{K}^*} S_{\mathcal{Q}_{\mathcal{L}, \mathcal{K}^*}} \vec{\tau}_{\sigma_{\mathcal{L}} \mathcal{K}^*} + \mu_{\mathcal{K}^*} \vec{\tau}_{\sigma_{\mathcal{L}} \mathcal{K}^*} \cdot \vec{\tau}_{\sigma_{\mathcal{K}} \mathcal{K}^*} \right].
\end{aligned}$$

En utilisant le critère ϵ_0 et l'estimation (VII.20), on obtient

$$\lambda^2 \leq C(\text{reg}(T), \sin(\epsilon_0)) \sum_{\mathcal{Q} \in \Omega_D} m_{\mathcal{Q}} \|S_{\mathcal{Q}}\|_{\mathcal{F}}^2. \tag{VII.22}$$

Finalement, on déduit grâce à (VII.20) et (VII.22) que

$$\|\delta^{\mathcal{D}}\|_{\mathcal{F}}^2 \leq C \sum_{\mathcal{Q} \in \Omega_D} m_{\mathcal{Q}} \|S_{\mathcal{Q}}\|_{\mathcal{F}}^2 = C(\text{reg}(T), \sin(\epsilon_0)) \sum_{\mathcal{Q} \in \Omega_D} m_{\mathcal{Q}} \|B_{\mathcal{Q}} \delta^{\mathcal{D}} + {}^t \delta^{\mathcal{D}} {}^t B_{\mathcal{Q}}\|_{\mathcal{F}}^2.$$

• **Cas $\alpha_{\mathcal{K}} = \alpha_{\mathcal{L}}$:** On rappelle que dans ce cas, on a choisi $\delta^{\mathcal{D}}$ tel que $(\delta^{\mathcal{D}} : \delta_0) = 0$. Le système linéaire vérifié par les quatre λ , est le suivant $B\lambda = F$, où B est la matrice de $\mathcal{M}_{5,4}(\mathbb{R})$ suivante

$$B = \begin{pmatrix} m_{\sigma_{\mathcal{K}}} & 0 & m_{\sigma_{\mathcal{K}^*}} & 0 \\ -m_{\sigma_{\mathcal{K}}} & 0 & 0 & m_{\sigma_{\mathcal{L}^*}} \\ 0 & m_{\sigma_{\mathcal{L}}} & -m_{\sigma_{\mathcal{K}^*}} & 0 \\ 0 & -m_{\sigma_{\mathcal{L}}} & 0 & -m_{\sigma_{\mathcal{L}^*}} \\ -\frac{1}{m_{\sigma_{\mathcal{K}}}} & \frac{1}{m_{\sigma_{\mathcal{L}}}} & \frac{1}{m_{\sigma_{\mathcal{K}^*}}} & -\frac{1}{m_{\sigma_{\mathcal{L}^*}}} \end{pmatrix},$$

$\Lambda = {}^t(\lambda_{\mathcal{K}}, \lambda_{\mathcal{L}}, \lambda_{\mathcal{K}^*}, \lambda_{\mathcal{L}^*})$ est un vecteur de \mathbb{R}^4 et $F = {}^t(F_{\mathcal{Q}_{\mathcal{K}, \mathcal{K}^*}}, F_{\mathcal{Q}_{\mathcal{K}, \mathcal{L}^*}}, F_{\mathcal{Q}_{\mathcal{L}, \mathcal{K}^*}}, F_{\mathcal{Q}_{\mathcal{L}, \mathcal{L}^*}}, 0)$ est un vecteur de \mathbb{R}^5 avec

$$\begin{aligned} F_{\mathcal{Q}_{\mathcal{K}, \mathcal{K}^*}} &= \frac{1}{\sin(\alpha_{\mathcal{D}})^2} \frac{m_{\mathcal{Q}_{\mathcal{K}, \mathcal{K}^*}}}{2} {}^t(\vec{\tau}_{\mathcal{K}^*, \mathcal{L}^*} + \vec{\tau}_{\mathcal{K}, \mathcal{L}}) S_{\mathcal{Q}_{\mathcal{K}, \mathcal{K}^*}}(\vec{\tau}_{\mathcal{K}^*, \mathcal{L}^*} + \vec{\tau}_{\mathcal{K}, \mathcal{L}}) \\ &\quad - \frac{m_{\sigma_{\mathcal{K}}}}{\sin(\alpha_{\mathcal{D}})} \mu_{\mathcal{K}}(\vec{\tau}_{\mathcal{K}^*, \mathcal{L}^*} + \vec{\tau}_{\mathcal{K}, \mathcal{L}}) \cdot \vec{\tau}_{\mathcal{K}^*, \mathcal{L}^*} \\ &\quad - \frac{m_{\sigma_{\mathcal{K}^*}}}{\sin(\alpha_{\mathcal{D}})^2} \mu_{\mathcal{K}^*}(\vec{\tau}_{\mathcal{K}^*, \mathcal{L}^*} + \vec{\tau}_{\mathcal{K}, \mathcal{L}}) \cdot \vec{\tau}_{\mathcal{K}, \mathcal{L}}(\vec{\tau}_{\mathcal{K}^*, \mathcal{L}^*} + \vec{\tau}_{\mathcal{K}, \mathcal{L}}) \cdot \vec{n}_{\sigma_{\mathcal{K}}}, \\ F_{\mathcal{Q}_{\mathcal{K}, \mathcal{L}^*}} &= \frac{1}{\sin(\alpha_{\mathcal{D}})^2} \frac{m_{\mathcal{Q}_{\mathcal{K}, \mathcal{L}^*}}}{2} {}^t(\vec{\tau}_{\mathcal{K}^*, \mathcal{L}^*} + \vec{\tau}_{\mathcal{K}, \mathcal{L}}) S_{\mathcal{Q}_{\mathcal{K}, \mathcal{L}^*}}(\vec{\tau}_{\mathcal{K}^*, \mathcal{L}^*} + \vec{\tau}_{\mathcal{K}, \mathcal{L}}) \\ &\quad + \frac{m_{\sigma_{\mathcal{K}}}}{\sin(\alpha_{\mathcal{D}})} \mu_{\mathcal{K}}(\vec{\tau}_{\mathcal{K}^*, \mathcal{L}^*} + \vec{\tau}_{\mathcal{K}, \mathcal{L}}) \cdot \vec{\tau}_{\mathcal{K}^*, \mathcal{L}^*} \\ &\quad - \frac{m_{\sigma_{\mathcal{L}^*}}}{\sin(\alpha_{\mathcal{D}})^2} \mu_{\mathcal{L}^*}(\vec{\tau}_{\mathcal{K}^*, \mathcal{L}^*} + \vec{\tau}_{\mathcal{K}, \mathcal{L}}) \cdot \vec{\tau}_{\mathcal{K}, \mathcal{L}}(\vec{\tau}_{\mathcal{K}^*, \mathcal{L}^*} + \vec{\tau}_{\mathcal{K}, \mathcal{L}}) \cdot \vec{n}_{\sigma_{\mathcal{K}}}, \\ F_{\mathcal{Q}_{\mathcal{L}, \mathcal{K}^*}} &= \frac{1}{\sin(\alpha_{\mathcal{D}})^2} \frac{m_{\mathcal{Q}_{\mathcal{L}, \mathcal{K}^*}}}{2} {}^t(\vec{\tau}_{\mathcal{K}^*, \mathcal{L}^*} + \vec{\tau}_{\mathcal{K}, \mathcal{L}}) S_{\mathcal{Q}_{\mathcal{L}, \mathcal{K}^*}}(\vec{\tau}_{\mathcal{K}^*, \mathcal{L}^*} + \vec{\tau}_{\mathcal{K}, \mathcal{L}}) \\ &\quad - \frac{m_{\sigma_{\mathcal{L}}}}{\sin(\alpha_{\mathcal{D}})} \mu_{\mathcal{L}}(\vec{\tau}_{\mathcal{K}^*, \mathcal{L}^*} + \vec{\tau}_{\mathcal{K}, \mathcal{L}}) \cdot \vec{\tau}_{\mathcal{K}^*, \mathcal{L}^*} \\ &\quad + \frac{m_{\sigma_{\mathcal{K}^*}}}{\sin(\alpha_{\mathcal{D}})} \mu_{\mathcal{K}^*}(\vec{\tau}_{\mathcal{K}^*, \mathcal{L}^*} + \vec{\tau}_{\mathcal{K}, \mathcal{L}}) \cdot \vec{\tau}_{\mathcal{K}, \mathcal{L}}, \\ F_{\mathcal{Q}_{\mathcal{L}, \mathcal{L}^*}} &= \frac{1}{\sin(\alpha_{\mathcal{D}})^2} \frac{m_{\mathcal{Q}_{\mathcal{L}, \mathcal{L}^*}}}{2} {}^t(\vec{\tau}_{\mathcal{K}^*, \mathcal{L}^*} + \vec{\tau}_{\mathcal{K}, \mathcal{L}}) S_{\mathcal{Q}_{\mathcal{L}, \mathcal{L}^*}}(\vec{\tau}_{\mathcal{K}^*, \mathcal{L}^*} + \vec{\tau}_{\mathcal{K}, \mathcal{L}}) \\ &\quad + \frac{m_{\sigma_{\mathcal{L}}}}{\sin(\alpha_{\mathcal{D}})} \mu_{\mathcal{L}}(\vec{\tau}_{\mathcal{K}^*, \mathcal{L}^*} + \vec{\tau}_{\mathcal{K}, \mathcal{L}}) \cdot \vec{\tau}_{\mathcal{K}^*, \mathcal{L}^*} \\ &\quad + \frac{m_{\sigma_{\mathcal{L}^*}}}{\sin(\alpha_{\mathcal{D}})} \mu_{\mathcal{L}^*}(\vec{\tau}_{\mathcal{K}^*, \mathcal{L}^*} + \vec{\tau}_{\mathcal{K}, \mathcal{L}}) \cdot \vec{\tau}_{\mathcal{K}, \mathcal{L}}. \end{aligned}$$

De plus, on a $\sum_{\mathcal{Q} \in \Omega_{\mathcal{D}}} F_{\mathcal{Q}} = 0$. Ainsi l'estimation (VII.20) donne, pour tout $\mathcal{Q} \in \Omega_{\mathcal{D}}$, que

$$|F_{\mathcal{Q}}|^2 \leq C(\text{reg}(\mathcal{T})) d_{\mathcal{D}}^2 \sum_{\mathcal{Q} \in \Omega_{\mathcal{D}}} m_{\mathcal{Q}} \|S_{\mathcal{Q}}\|_{\mathcal{F}}^2. \quad (\text{VII.23})$$

La solution de $B\Lambda = F$ est solution de

$$\begin{pmatrix} m_{\sigma_{\mathcal{K}}} & 0 & 0 & -m_{\sigma_{\mathcal{L}^*}} \\ 0 & m_{\sigma_{\mathcal{L}}} & 0 & m_{\sigma_{\mathcal{L}^*}} \\ 0 & 0 & m_{\sigma_{\mathcal{K}^*}} & m_{\sigma_{\mathcal{L}^*}} \\ 0 & 0 & 0 & b^* \end{pmatrix} \Lambda = \begin{pmatrix} -F_{\mathcal{Q}_{\mathcal{L}, \mathcal{K}^*}} \\ -F_{\mathcal{Q}_{\mathcal{L}, \mathcal{L}^*}} \\ F_{\mathcal{Q}_{\mathcal{K}, \mathcal{K}^*}} + F_{\mathcal{Q}_{\mathcal{K}, \mathcal{L}^*}} \\ b \end{pmatrix},$$

avec $b^* = -m_{\sigma_{\mathcal{L}^*}} \left(\frac{1}{m_{\sigma_{\mathcal{K}}}^2} + \frac{1}{m_{\sigma_{\mathcal{L}}}^2} + \frac{1}{m_{\sigma_{\mathcal{K}^*}}^2} + \frac{1}{m_{\sigma_{\mathcal{L}^*}}^2} \right)$ et $b = -\frac{F_{\mathcal{Q}_{\mathcal{L}, \mathcal{K}^*}}}{m_{\sigma_{\mathcal{K}}}^2} + \frac{F_{\mathcal{Q}_{\mathcal{L}, \mathcal{L}^*}}}{m_{\sigma_{\mathcal{L}}}^2} - \frac{F_{\mathcal{Q}_{\mathcal{K}, \mathcal{K}^*}} + F_{\mathcal{Q}_{\mathcal{K}, \mathcal{L}^*}}}{m_{\sigma_{\mathcal{K}^*}}^2}$. Ainsi on obtient la solution suivante

$$\begin{aligned} \lambda_{\mathcal{L}^*} &= \frac{b}{b^*}, \quad \lambda_{\mathcal{K}^*} = \frac{1}{m_{\sigma_{\mathcal{K}^*}}} \left(F_{\mathcal{Q}_{\mathcal{K}, \mathcal{K}^*}} + F_{\mathcal{Q}_{\mathcal{K}, \mathcal{L}^*}} - m_{\sigma_{\mathcal{L}^*}} \frac{b}{b^*} \right), \\ \lambda_{\mathcal{L}} &= \frac{1}{m_{\sigma_{\mathcal{L}}}} \left(-F_{\mathcal{Q}_{\mathcal{L}, \mathcal{L}^*}} - m_{\sigma_{\mathcal{L}^*}} \frac{b}{b^*} \right), \quad \lambda_{\mathcal{K}} = \frac{1}{m_{\sigma_{\mathcal{K}}}} \left(-F_{\mathcal{Q}_{\mathcal{L}, \mathcal{K}^*}} + m_{\sigma_{\mathcal{L}^*}} \frac{b}{b^*} \right). \end{aligned} \quad (\text{VII.24})$$

On remarque que

$$|b|^2 \leq C(\text{reg}(\mathcal{T})) \frac{1}{d_{\mathcal{D}}^2} \sum_{\mathcal{Q} \in \Omega_{\mathcal{D}}} m_{\mathcal{Q}} \|S_{\mathcal{Q}}\|_{\mathcal{F}}^2 \quad \text{et} \quad |b^*| = -b^* \geq C(\text{reg}(\mathcal{T})) \frac{1}{d_{\mathcal{D}}}. \quad (\text{VII.25})$$

Grâce à (VII.25), on obtient

$$|\lambda_{\mathcal{L}^*}|^2 = \left| \frac{b}{b^*} \right|^2 \leq C(\text{reg}(\mathcal{T})) \sum_{\mathcal{Q} \in \Omega_{\mathcal{D}}} m_{\mathcal{Q}} \|S_{\mathcal{Q}}\|_{\mathcal{F}}^2.$$

Ensuite on déduit grâce à (VII.24), (VII.23) et (VII.25) que

$$\lambda^2 \leq C(\text{reg}(\mathcal{T})) \sum_{\mathcal{Q} \in \Omega_{\mathcal{D}}} m_{\mathcal{Q}} \|S_{\mathcal{Q}}\|_{\mathcal{F}}^2. \quad (\text{VII.26})$$

Finalement, on obtient en utilisant (VII.20) et (VII.26) que

$$\|\delta^\mathcal{D}\|_{\mathcal{F}}^2 \leq C(\text{reg}(\mathcal{T})) \sum_{\mathcal{Q} \in \mathfrak{Q}_{\mathcal{D}}} m_{\mathcal{Q}} \|S_{\mathcal{Q}}\|_{\mathcal{F}}^2 = C(\text{reg}(\mathcal{T})) \sum_{\mathcal{Q} \in \mathfrak{Q}_{\mathcal{D}}} m_{\mathcal{Q}} \|B_{\mathcal{Q}} \delta^\mathcal{D} + {}^t \delta^\mathcal{D} {}^t B_{\mathcal{Q}}\|_{\mathcal{F}}^2.$$

Estimation entre $B_{\mathcal{Q}} \delta^\mathcal{D}$ et $\delta^\mathcal{D}$: Par exemple pour $\mathcal{Q} = \mathcal{Q}_{\mathcal{K}, \mathcal{K}^*}$, on a

$$B_{\mathcal{Q}_{\mathcal{K}, \mathcal{K}^*}} \delta^\mathcal{D} = \frac{1}{m_{\mathcal{Q}_{\mathcal{K}, \mathcal{K}^*}}} (m_{\sigma_{\mathcal{K}}} \vec{n}_{\sigma_{\mathcal{K}} \mathcal{K}^*} \delta_{\mathcal{K}}^1 + m_{\sigma_{\mathcal{K}^*}} \vec{n}_{\sigma_{\mathcal{K}^*}} \delta_{\mathcal{K}^*}^1 - m_{\sigma_{\mathcal{K}}} \vec{n}_{\sigma_{\mathcal{K}} \mathcal{K}^*} \delta_{\mathcal{K}}^2 + m_{\sigma_{\mathcal{K}^*}} \vec{n}_{\sigma_{\mathcal{K}^*}} \delta_{\mathcal{K}^*}^2).$$

Ainsi, il vient que

$$\|B_{\mathcal{Q}_{\mathcal{K}, \mathcal{K}^*}} \delta^\mathcal{D}\|_{\mathcal{F}}^2 \leq 8 \left[\frac{4}{\sin(\alpha_{\mathcal{T}})^2 m_{\sigma_{\mathcal{K}^*}}^2} \|{}^t \delta_{\mathcal{K}}\|_2^2 + \frac{4}{\sin(\alpha_{\mathcal{T}})^2 m_{\sigma_{\mathcal{K}}}^2} \|{}^t \delta_{\mathcal{K}^*}\|_2^2 \right].$$

Grâce à $d_{\mathcal{D}} \leq C \min(m_{\sigma_{\mathcal{K}}}, m_{\sigma_{\mathcal{K}^*}})$, on en déduit

$$\|B_{\mathcal{Q}_{\mathcal{K}, \mathcal{K}^*}} \delta^\mathcal{D}\|_{\mathcal{F}}^2 \leq C \frac{1}{d_{\mathcal{D}}^2} \|\delta^\mathcal{D}\|_{\mathcal{F}}^2.$$

De la même manière, on obtient pour tout $\mathcal{Q} \in \mathfrak{Q}_{\mathcal{D}}$

$$\|B_{\mathcal{Q}} \delta^\mathcal{D}\|_{\mathcal{F}}^2 \leq C(\text{reg}(\mathcal{T})) \frac{1}{d_{\mathcal{D}}^2} \|\delta^\mathcal{D}\|_{\mathcal{F}}^2.$$

Finalement en utilisant la relation $\text{reg}(\mathcal{T})$, il vient que

$$\sum_{\mathcal{Q} \in \mathfrak{Q}_{\mathcal{D}}} m_{\mathcal{Q}} \|B_{\mathcal{Q}} \delta^\mathcal{D}\|_{\mathcal{F}}^2 \leq C \|\delta^\mathcal{D}\|_{\mathcal{F}}^2,$$

ceci conclut la démonstration. ■

On généralise maintenant la forme de l'inconnue $p^{\mathfrak{Q}_{\mathcal{D}}}$ donnée dans la Section VII.1.4 pour un cas particulier.

Lemme VII.12

Pour tout $\mathcal{D} \in \mathfrak{D}$, tout $(\mathcal{D}^\mathcal{D} \mathbf{u}^\mathcal{T}, p^\mathcal{D}) \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}$, il existe une constante $C_6 > 0$, dépendant uniquement de $\text{reg}(\mathcal{T})$ et \overline{C}_η , et une fonction linéaire $\alpha_{\mathfrak{s}, \mathcal{D}}$ telles que la solution $(\delta^\mathcal{D}, p^{\mathfrak{Q}_{\mathcal{D}}})$ de (VII.14) avec $(\mathcal{D}^\mathcal{D} \mathbf{u}^\mathcal{T}, p^\mathcal{D})$, est la forme suivante :

$$p^\mathfrak{Q} = p^\mathcal{D} + \alpha_{\mathfrak{s}, \mathcal{D}}(\mathcal{D}^\mathcal{D} \mathbf{u}^\mathcal{T}), \quad \text{où } \mathfrak{s} = \partial \mathcal{D} \cap \partial \mathcal{Q},$$

avec $|\alpha_{\mathfrak{s}, \mathcal{D}}(q^\mathcal{D})|^2 \leq C_6 \|q^\mathcal{D}\|_{\mathcal{F}}^2$, pour tout $q^\mathcal{D} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Démonstration : On suppose que $(\delta^\mathcal{D}, p^{\mathfrak{Q}_{\mathcal{D}}})$ est solution de (VII.14) avec $(\mathcal{D}^\mathcal{D} \mathbf{u}^\mathcal{T}, p^\mathcal{D})$. Pour simplifier les notations dans cette démonstration, on désigne $\alpha_{\mathfrak{s}, \mathcal{D}}(\mathcal{D}^\mathcal{D} \mathbf{u}^\mathcal{T})$ par $\alpha_{\mathcal{Q}}$ si $\mathfrak{s} = \partial \mathcal{D} \cap \partial \mathcal{Q}$. On pose alors $\alpha_{\mathcal{Q}} = p^\mathfrak{Q} - p^\mathcal{D}$. Ainsi on a que le couple $(\delta^\mathcal{D}, \alpha_{\mathfrak{Q}_{\mathcal{D}}})$ vérifie le système suivant

$$\begin{cases} \sum_{\mathcal{Q} \in \mathfrak{Q}_{\mathcal{D}}} m_{\mathcal{Q}} \varphi_{\mathcal{Q}}(\mathcal{D}^\mathcal{D} \mathbf{u}^\mathcal{T}, \delta^\mathcal{D}, \alpha_{\mathcal{Q}}) B_{\mathcal{Q}} = 0, & \text{Tr}({}^t \delta^\mathcal{D} {}^t B_{\mathcal{Q}}) = 0, \quad \forall \mathcal{Q} \in \mathfrak{Q}_{\mathcal{D}}, \\ \sum_{\mathcal{Q} \in \mathfrak{Q}_{\mathcal{D}}} m_{\mathcal{Q}} \alpha_{\mathcal{Q}} = 0, & (\delta^\mathcal{D} : \delta_0) = 0. \end{cases} \quad (\text{VII.27})$$

On remarque que ceci implique que $\delta^\mathcal{D}$ ne dépend que de $\mathcal{D}^\mathcal{D} \mathbf{u}^\mathcal{T}$. En utilisant la valeur de $\varphi_{\mathcal{Q}}$ dans (VII.27), on en déduit que

$$\sum_{\mathcal{Q} \in \mathfrak{Q}_{\mathcal{D}}} m_{\mathcal{Q}} \alpha_{\mathcal{Q}} B_{\mathcal{Q}} = 2 \sum_{\mathcal{Q} \in \mathfrak{Q}_{\mathcal{D}}} m_{\mathcal{Q}} \eta_{\mathcal{Q}} \mathcal{D}_{\mathcal{Q}}^\mathcal{N} \mathbf{u}^\mathcal{T} B_{\mathcal{Q}}. \quad (\text{VII.28})$$

On remarque que $\|m_{\mathcal{Q}_{\mathcal{K}, \mathcal{K}^*}} B_{\mathcal{Q}_{\mathcal{K}, \mathcal{K}^*}}\|_{\mathcal{F}}^2 = m_{\sigma_{\mathcal{K}}}^2 + m_{\sigma_{\mathcal{K}^*}}^2 \leq 2d_{\mathcal{D}}^2$. En fait, cette estimation est vraie pour tout $\mathcal{Q} \in \mathfrak{Q}_{\mathcal{D}}$. Ainsi on estime le membre de droite de (VII.28) grâce à l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\|2 \sum_{\mathcal{Q} \in \mathfrak{Q}_{\mathcal{D}}} m_{\mathcal{Q}} \eta_{\mathcal{Q}} \mathcal{D}_{\mathcal{Q}}^\mathcal{N} \mathbf{u}^\mathcal{T} B_{\mathcal{Q}}\|_{\mathcal{F}} \leq 2\overline{C}_\eta d_{\mathcal{D}} \left(\sum_{\mathcal{Q} \in \mathfrak{Q}_{\mathcal{D}}} \|\mathcal{D}_{\mathcal{Q}}^\mathcal{N} \mathbf{u}^\mathcal{T}\|_{\mathcal{F}}^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (\text{VII.29})$$

Puis on calcule le membre de gauche de (VII.28), il vient que

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{\mathfrak{Q} \in \mathfrak{Q}_{\mathcal{D}}} m_{\mathfrak{Q}} \alpha_{\mathfrak{Q}} B_{\mathfrak{Q}} \right\|_{\mathcal{F}}^2 &= m_{\sigma_{\mathcal{K}}}^2 (\alpha_{\mathfrak{Q}_{\mathcal{K}, \mathcal{K}^*}} - \alpha_{\mathfrak{Q}_{\mathcal{L}, \mathcal{L}^*}})^2 + m_{\sigma_{\mathcal{L}}}^2 (\alpha_{\mathfrak{Q}_{\mathcal{L}, \mathcal{K}^*}} - \alpha_{\mathfrak{Q}_{\mathcal{L}, \mathcal{L}^*}})^2 \\ &\quad + m_{\sigma_{\mathcal{K}^*}}^2 (\alpha_{\mathfrak{Q}_{\mathcal{K}, \mathcal{K}^*}} - \alpha_{\mathfrak{Q}_{\mathcal{L}, \mathcal{K}^*}})^2 + m_{\sigma_{\mathcal{L}^*}}^2 (\alpha_{\mathfrak{Q}_{\mathcal{K}, \mathcal{L}^*}} - \alpha_{\mathfrak{Q}_{\mathcal{L}, \mathcal{L}^*}})^2. \end{aligned} \quad (\text{VII.30})$$

En regroupant les deux résultats donnés par (VII.29) et (VII.30), la relation (I.1) implique que

$$|\alpha_{\mathfrak{Q}} - \alpha_{\mathfrak{Q}'}| \leq 2\overline{C}_{\eta} \text{reg}(\mathcal{T}) \left(\sum_{\mathfrak{Q} \in \mathfrak{Q}_{\mathcal{D}}} \|D_{\mathfrak{Q}}^{\mathcal{N}} \mathbf{u}^{\mathcal{T}}\|_{\mathcal{F}}^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \quad \forall \mathfrak{Q}, \mathfrak{Q}' \in \mathfrak{Q}_{\mathcal{D}} \text{ tel que } \mathfrak{Q} \cap \mathfrak{Q}' \neq \emptyset.$$

En utilisant l'estimation suivante (VII.36), on renvoie pour sa démonstration à celle de Lemme VII.18

$$\underline{C}_{\eta}^2 \sum_{\mathfrak{Q} \in \mathfrak{Q}_{\mathcal{D}}} m_{\mathfrak{Q}} \|D_{\mathfrak{Q}}^{\mathcal{N}} \mathbf{u}^{\mathcal{T}}\|_{\mathcal{F}}^2 \leq \overline{C}_{\eta}^2 m_{\mathcal{D}} \|D^{\mathcal{D}} \mathbf{u}^{\mathcal{T}}\|_{\mathcal{F}}^2,$$

et le fait que $\frac{m_{\mathcal{D}}}{m_{\mathfrak{Q}}} \leq \text{reg}(\mathcal{T})^3$, on obtient

$$\sum_{\mathfrak{Q} \in \mathfrak{Q}_{\mathcal{D}}} \|D_{\mathfrak{Q}}^{\mathcal{N}} \mathbf{u}^{\mathcal{T}}\|_{\mathcal{F}}^2 \leq \text{reg}(\mathcal{T})^3 \frac{\overline{C}_{\eta}^2}{\underline{C}_{\eta}^2} \|D^{\mathcal{D}} \mathbf{u}^{\mathcal{T}}\|_{\mathcal{F}}^2.$$

Ceci donne

$$|\alpha_{\mathfrak{Q}} - \alpha_{\mathfrak{Q}'}| \leq 2\text{reg}(\mathcal{T})^{5/2} \frac{\overline{C}_{\eta}^2}{\underline{C}_{\eta}} \|D^{\mathcal{D}} \mathbf{u}^{\mathcal{T}}\|_{\mathcal{F}}. \quad (\text{VII.31})$$

Maintenant on peut estimer $|\alpha_{\mathfrak{Q}}|$ avec des différences comme $\alpha_{\mathfrak{Q}'} - \alpha_{\mathfrak{Q}''}$, et en utilisant (VII.27), c'est-à-dire que $\sum_{\mathfrak{Q} \in \mathfrak{Q}_{\mathcal{D}}} m_{\mathfrak{Q}} \alpha_{\mathfrak{Q}} = 0$. Finalement, l'estimation (VII.31) conclut la démonstration en posant $C_6 = 6 \frac{\text{reg}(\mathcal{T})^{5/2} \overline{C}_{\eta}^2}{\underline{C}_{\eta}}$. ■

VII.1.6 Définitions des produits scalaires et normes associées sur les quarts de diamant

On définit maintenant les produits scalaires sur les espaces d'approximation sur les quarts de diamant :

$$\begin{aligned} (p^{\mathfrak{Q}}, q^{\mathfrak{Q}})_{\mathfrak{Q}} &= \sum_{\mathfrak{Q} \in \mathfrak{Q}} m_{\mathfrak{Q}} p^{\mathfrak{Q}} q^{\mathfrak{Q}}, \quad \forall p^{\mathfrak{Q}}, q^{\mathfrak{Q}} \in \mathbb{R}^{\mathfrak{Q}}, \\ (\xi^{\mathfrak{Q}} : \phi^{\mathfrak{Q}})_{\mathfrak{Q}} &= \sum_{\mathfrak{Q} \in \mathfrak{Q}} m_{\mathfrak{Q}} (\xi^{\mathfrak{Q}} : \phi^{\mathfrak{Q}}), \quad \forall \xi^{\mathfrak{Q}}, \phi^{\mathfrak{Q}} \in (\mathcal{M}_2(\mathbb{R}))^{\mathfrak{Q}}, \end{aligned}$$

et les normes correspondantes :

$$\|q^{\mathfrak{Q}}\|_2 = (q^{\mathfrak{Q}}, q^{\mathfrak{Q}})_{\mathfrak{Q}}^{\frac{1}{2}}, \quad \forall q^{\mathfrak{Q}} \in \mathbb{R}^{\mathfrak{Q}}, \quad \|\xi^{\mathfrak{Q}}\|_2 = (\xi^{\mathfrak{Q}} : \xi^{\mathfrak{Q}})_{\mathfrak{Q}}^{\frac{1}{2}}, \quad \forall \xi^{\mathfrak{Q}} \in (\mathcal{M}_2(\mathbb{R}))^{\mathfrak{Q}}.$$

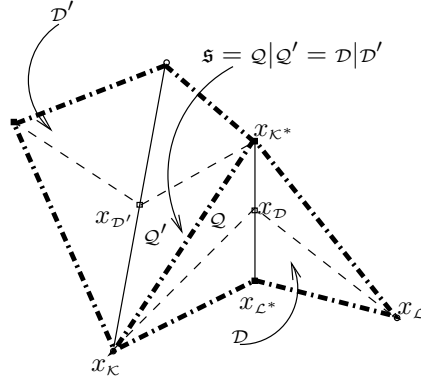
VII.2 Définition du nouveau terme de stabilisation

Maintenant, on peut définir un nouveau terme de stabilisation, qui prend en compte les sauts de pression sur les quarts de diamant.

Définition VII.13

On définit un opérateur du second ordre discret, noté $\underline{\Delta}^{\mathfrak{D}} : p^{\mathfrak{D}} \in \mathbb{R}^{\mathfrak{D}} \mapsto \underline{\Delta}^{\mathfrak{D}} p^{\mathfrak{D}} \in \mathbb{R}^{\mathfrak{D}}$, avec (voir la Figure VII.5) :

$$\underline{\Delta}^{\mathfrak{D}} p^{\mathfrak{D}} = \frac{1}{m_{\mathcal{D}}} \sum_{\substack{s=\mathfrak{Q}|\mathfrak{Q}' \\ =\mathfrak{D}|\mathfrak{D}' \in \mathcal{E}_{\mathcal{D}}}} \frac{d_{\mathfrak{D}}^2 + d_{\mathfrak{D}'}^2}{d_{\mathfrak{D}}^2} (p^{\mathfrak{Q}'} - p^{\mathfrak{Q}}), \quad \forall \mathfrak{D} \in \mathfrak{D}.$$

FIG. VII.5 – Un diamant \mathcal{D} et ces diamants voisins \mathcal{D}' .

Comparé au terme de stabilisation de la Définition IV.10, on a juste remplacé la différence $p^{\mathcal{D}'} - p^{\mathcal{D}}$ par $p^{\mathcal{Q}'} - p^{\mathcal{Q}}$. Ceci nous permet de considérer les sauts de pression sur les quarts de diamant. On définit un autre opérateur qui utilise la fonction $\alpha_{\mathfrak{s}, \mathcal{D}}$ introduite dans le Lemme VII.12, afin de donner le lien entre $\underline{\Delta}^{\mathcal{D}}$ et $\Delta^{\mathcal{D}}$.

Définition VII.14

On définit un opérateur du second ordre discret, noté $\Delta_{\alpha}^{\mathcal{D}} : q^{\mathcal{D}} \in (\mathcal{M}_2(\mathbb{R}))^{\mathfrak{D}} \mapsto \Delta_{\alpha}^{\mathcal{D}} q^{\mathcal{D}} \in \mathbb{R}^{\mathfrak{D}}$, avec :

$$\Delta_{\alpha}^{\mathcal{D}} q^{\mathcal{D}} = \frac{1}{m_{\mathcal{D}}} \sum_{\mathfrak{s}=\mathcal{D}|\mathcal{D}' \in \mathcal{E}_{\mathcal{D}}} \frac{d_{\mathcal{D}}^2 + d_{\mathcal{D}'}^2}{d_{\mathcal{D}}^2} (\alpha_{\mathfrak{s}, \mathcal{D}'}(q^{\mathcal{D}'}) - \alpha_{\mathfrak{s}, \mathcal{D}}(q^{\mathcal{D}})), \quad \forall \mathcal{D} \in \mathfrak{D},$$

où $\alpha_{\mathfrak{s}, \mathcal{D}}$ est la fonction définie dans le Lemme VII.12.

Définition VII.15

On définit la semi-norme discrète, pour tout $q^{\mathcal{D}} \in (\mathcal{M}_2(\mathbb{R}))^{\mathfrak{D}}$:

$$|q^{\mathcal{D}}|_{\alpha, h}^2 := \sum_{\mathfrak{s}=\mathcal{D}|\mathcal{D}' \in \mathcal{E}_{\mathcal{D}}} (d_{\mathcal{D}}^2 + d_{\mathcal{D}'}^2) (\alpha_{\mathfrak{s}, \mathcal{D}'}(q^{\mathcal{D}'}) - \alpha_{\mathfrak{s}, \mathcal{D}}(q^{\mathcal{D}}))^2,$$

où $\alpha_{\mathfrak{s}, \mathcal{D}}$ est la fonction définie dans le Lemme VII.12.

On peut estimer cette semi-norme avec la norme $\|\cdot\|_2$. En effet, l'inégalité de Young donne

$$|q^{\mathcal{D}}|_{\alpha, h}^2 \leq 2 \sum_{\mathfrak{s}=\mathcal{D}|\mathcal{D}' \in \mathcal{E}_{\mathcal{D}}} (d_{\mathcal{D}}^2 + d_{\mathcal{D}'}^2) (|\alpha_{\mathfrak{s}, \mathcal{D}'}(q^{\mathcal{D}'})|^2 + |\alpha_{\mathfrak{s}, \mathcal{D}}(q^{\mathcal{D}})|^2).$$

Grâce à la propriété $|\alpha_{\mathfrak{s}, \mathcal{D}}(q^{\mathcal{D}})|^2 \leq C_6 \|q^{\mathcal{D}}\|_{\mathcal{F}}^2$ et à la relation (I.1), on obtient

$$|q^{\mathcal{D}}|_{\alpha, h}^2 \leq C_7 \|q^{\mathcal{D}}\|_2^2, \quad \forall q^{\mathcal{D}} \in (\mathcal{M}_2(\mathbb{R}))^{\mathfrak{D}}, \quad (\text{VII.32})$$

avec $C_7 = 8C_6 \text{reg}(\mathcal{T})^2 (1 + \text{reg}(\mathcal{T})^2)$. Maintenant on peut relier les deux opérateurs $\underline{\Delta}^{\mathcal{D}}$ et $\Delta^{\mathcal{D}}$, grâce à $\Delta_{\alpha}^{\mathcal{D}}$. Le Lemme VII.12 donne les valeurs de $p^{\mathfrak{Q}}$ en fonction de $D^{\mathcal{D}'} \mathbf{u}^{\mathcal{T}}$ et $p^{\mathcal{D}}$, il vient que

$$\begin{aligned} d_{\mathcal{D}}^2 m_{\mathcal{D}} \underline{\Delta}^{\mathcal{D}} p^{\mathfrak{Q}} &= \sum_{\mathfrak{s}=\mathcal{Q}|\mathcal{Q}'=\mathcal{D}|\mathcal{D}' \in \mathcal{E}_{\mathcal{D}}} (d_{\mathcal{D}}^2 + d_{\mathcal{D}'}^2) (p^{\mathcal{Q}'} - p^{\mathcal{Q}}) \\ &= \sum_{\mathfrak{s}=\mathcal{D}|\mathcal{D}' \in \mathcal{E}_{\mathcal{D}}} (d_{\mathcal{D}}^2 + d_{\mathcal{D}'}^2) (p^{\mathcal{D}'} + \alpha_{\mathfrak{s}, \mathcal{D}'}(D^{\mathcal{D}'} \mathbf{u}^{\mathcal{T}}) - p^{\mathcal{D}} - \alpha_{\mathfrak{s}, \mathcal{D}}(D^{\mathcal{D}} \mathbf{u}^{\mathcal{T}})). \end{aligned}$$

Les Définitions IV.10 et VII.14 impliquent donc que

$$\forall \mathcal{D} \in \mathfrak{D}, \quad \underline{\Delta}^{\mathcal{D}} p^{\mathfrak{Q}} = \Delta^{\mathcal{D}} p^{\mathcal{D}} + \Delta_{\alpha}^{\mathcal{D}} D^{\mathcal{D}} \mathbf{u}^{\mathcal{T}}. \quad (\text{VII.33})$$

VII.3 Principe du schéma m-DDFV

Le schéma m-DDFV est le suivant. On intègre le bilan de quantité de mouvement du problème (VII.1) sur les mailles primales intérieures \mathfrak{M} et sur les mailles duales intérieures \mathfrak{M}^* . L'équation du bilan de masse est

directement approchée sur les diamants en utilisant le nouveau terme de stabilisation. On impose la condition de Dirichlet sur les mailles primales et duales du bord $\partial\mathfrak{M} \cup \partial\mathfrak{M}^*$. Finalement l'intégrale de la pression doit être nulle. Les différences avec le schéma (VI.4) sont le tenseur des contraintes visqueuses et le terme de stabilisation. En effet, on remplace $\eta^\mathfrak{D} D^\mathfrak{D} \mathbf{u}^\tau$ (resp. $-\lambda d_\mathfrak{D}^2 \Delta^\mathfrak{D} p^\mathfrak{D}$) par $D_\mathfrak{D}^{\eta, \mathcal{N}} \mathbf{u}^\tau$ (resp. $-\lambda d_\mathfrak{D}^2 \underline{\Delta}^\mathfrak{D} p^\mathfrak{D}$) comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } \mathbf{u}^\tau \in \mathbb{E}_0 \text{ et } p^\mathfrak{D} \in \mathbb{R}^\mathfrak{D} \text{ tels que,} \\ \mathbf{div}^\mathfrak{M}(-2D_\mathfrak{D}^{\eta, \mathcal{N}} \mathbf{u}^\tau + p^\mathfrak{D} \text{Id}) = \mathbf{f}^\mathfrak{M}, \\ \mathbf{div}^{\mathfrak{M}^*}(-2D_\mathfrak{D}^{\eta, \mathcal{N}} \mathbf{u}^\tau + p^\mathfrak{D} \text{Id}) = \mathbf{f}^{\mathfrak{M}^*}, \\ \mathbf{div}^\mathfrak{D}(\mathbf{u}^\tau) - \lambda d_\mathfrak{D}^2 \underline{\Delta}^\mathfrak{D} p^\mathfrak{D} = 0, \\ \sum_{\mathfrak{D} \in \mathfrak{D}} m_\mathfrak{D} p^\mathfrak{D} = 0, \end{array} \right. \quad (\text{VII.34})$$

avec $\lambda > 0$ donné, $\mathbf{f}^\mathfrak{M} = \mathbb{P}_\mathfrak{M} \mathbf{f}$ et $\mathbf{f}^{\mathfrak{M}^*} = \mathbb{P}_\mathfrak{M}^* \mathbf{f}$, où les projections sont définies par (IV.3), et pour tout $\mathfrak{D} \in \mathfrak{D}$, $(\delta^\mathfrak{D}, p^{\mathfrak{D}^\mathfrak{D}}) \in \mathcal{M}_{n_\mathfrak{D}, 2}(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^{n_\mathfrak{D}}$ vérifie (VII.14). Comme les inconnues artificielles $(\delta^\mathfrak{D}, p^{\mathfrak{D}^\mathfrak{D}})$ sont entièrement définies sur chaque diamant à l'aide du couple $(D^\mathfrak{D} \mathbf{u}^\tau, p^\mathfrak{D})$ et ce de façon linéaire, le système reste linéaire et le nombre d'inconnues du schéma modifié est le même que celui du schéma DDFV (VI.4).

Si on prend le terme de stabilisation $-\lambda d_\mathfrak{D}^2 \underline{\Delta}^\mathfrak{D} p^\mathfrak{D}$ au lieu de $-\lambda d_\mathfrak{D}^2 \Delta^\mathfrak{D} p^\mathfrak{D}$, le schéma est encore bien posé néanmoins l'estimation d'erreur d'ordre 1 ne marche pas, car on ne prend pas en compte les sauts de pression. Les tests numériques illustrent la différence de comportement des deux termes de stabilisation. On observe dans la Section VII.7 une perte de convergence si on utilise le terme de stabilisation $-\lambda d_\mathfrak{D}^2 \Delta^\mathfrak{D} p^\mathfrak{D}$.

Remarque VII.16

Comme on l'a vu, dans la Section VI.5 avec une viscosité constante, notre schéma (VII.34), sur des maillages rectangulaires, est équivalent (excepté sur le bord) à des schémas MAC découplés écrits sur deux maillages différents et décalés. Ainsi lorsque la viscosité est discontinue, le schéma (VII.34) donne une généralisation possible des schémas MAC pour des fluides diphasiques.

VII.4 Résultats sur les tenseurs des taux de déformation discrets

Dans cette section, on présente plusieurs résultats sur l'opérateur du tenseur des taux de déformation modifié. On commence par comparer le tenseur des taux de déformation discret et le modifié. Puis on montre le résultat important qui est une inégalité de Korn pour les opérateurs modifiés. La démonstration de cette inégalité n'est pas juste une extension de celle du Théorème VI.4, elle utilise les inconnues artificielles et le Lemme VII.11, qui est une sorte d'inégalité de Korn locale à un diamant. On commence par majorer le tenseur des taux de déformation discret par le gradient discret.

Proposition VII.17

Pour tout $\mathbf{u}^\tau \in (\mathbb{R}^2)^\tau$, on a

$$\|D_\mathfrak{D}^\mathfrak{N} \mathbf{u}^\tau\|_2 \leq \|\nabla_\mathfrak{D}^\mathfrak{N} \mathbf{u}^\tau\|_2.$$

Démonstration : Grâce à la Remarque IV.8, on obtient

$$\|D_\mathfrak{D}^\mathfrak{N} \mathbf{u}^\tau\|_2^2 = \sum_{\mathfrak{Q} \in \mathfrak{Q}} m_\mathfrak{Q} \|D_\mathfrak{Q}^\mathfrak{N} \mathbf{u}^\tau\|_\mathcal{F}^2 \leq \sum_{\mathfrak{Q} \in \mathfrak{Q}} m_\mathfrak{Q} \|\nabla_\mathfrak{Q}^\mathfrak{N} \mathbf{u}^\tau\|_\mathcal{F}^2 = \|\nabla_\mathfrak{D}^\mathfrak{N} \mathbf{u}^\tau\|_2^2.$$

■

On compare le tenseur des taux de déformation discret et le modifié.

Lemme VII.18

On suppose que η vérifie (VII.2). Il existe une constante $C_8 > 0$, dépendant uniquement de \underline{C}_η et \overline{C}_η , telle que pour tout $\mathbf{u}^\tau \in (\mathbb{R}^2)^\tau$:

$$\|D^\mathfrak{D} \mathbf{u}^\tau\|_2 \leq \|D_\mathfrak{D}^\mathfrak{N} \mathbf{u}^\tau\|_2 \leq C_8 \|D^\mathfrak{D} \mathbf{u}^\tau\|_2.$$

Démonstration : Estimation de gauche. Soit $\mathfrak{D} \in \mathfrak{D}$. L'estimation est juste une conséquence de la propriété sur les matrices $B_\mathfrak{Q}$ qui est $\sum_{\mathfrak{Q} \in \mathfrak{D}_\mathfrak{D}} m_\mathfrak{Q} B_\mathfrak{Q} = 0$, ainsi on a $\|D_\mathfrak{D}^\mathfrak{N} \mathbf{u}^\tau\|_2^2 = \|D^\mathfrak{D} \mathbf{u}^\tau\|_2^2 + \frac{1}{4} \|B_\mathfrak{Q} \delta^\mathfrak{D} + {}^t \delta^\mathfrak{D} B_\mathfrak{Q}\|_2^2$.

Estimation de droite. Soit $\mathcal{D} \in \mathfrak{D}$. On a vu que la condition (VII.14a) implique la relation (VII.16), c'est-à-dire

$$\sum_{\mathcal{Q} \in \Omega_{\mathcal{D}}} m_{\mathcal{Q}} \eta_{\mathcal{Q}} \underbrace{(2D^{\mathcal{D}} \mathbf{u}^{\mathcal{T}} + B_{\mathcal{Q}} \delta^{\mathcal{D}} + {}^t \delta^{\mathcal{D}^t} B_{\mathcal{Q}})}_{=2D_{\mathcal{Q}}^{\mathcal{N}} \mathbf{u}^{\mathcal{T}}} : B_{\mathcal{Q}} \delta^{\mathcal{D}} + {}^t \delta^{\mathcal{D}^t} B_{\mathcal{Q}} = 0. \quad (\text{VII.35})$$

Comme $D_{\mathcal{Q}}^{\mathcal{N}} \mathbf{u}^{\mathcal{T}} = D^{\mathcal{D}} \mathbf{u}^{\mathcal{T}} + \frac{1}{2}(B_{\mathcal{Q}} \delta^{\mathcal{D}} + {}^t \delta^{\mathcal{D}^t} B_{\mathcal{Q}})$, il vient que

$$\sum_{\mathcal{Q} \in \Omega_{\mathcal{D}}} m_{\mathcal{Q}} \eta_{\mathcal{Q}} \|D_{\mathcal{Q}}^{\mathcal{N}} \mathbf{u}^{\mathcal{T}}\|_{\mathcal{F}}^2 = \sum_{\mathcal{Q} \in \Omega_{\mathcal{D}}} m_{\mathcal{Q}} \eta_{\mathcal{Q}} (D_{\mathcal{Q}}^{\mathcal{N}} \mathbf{u}^{\mathcal{T}} : D^{\mathcal{D}} \mathbf{u}^{\mathcal{T}}).$$

On utilise maintenant la relation (VII.2) sur la viscosité pour obtenir

$$\underline{C}_{\eta} \sum_{\mathcal{Q} \in \Omega_{\mathcal{D}}} m_{\mathcal{Q}} \|D_{\mathcal{Q}}^{\mathcal{N}} \mathbf{u}^{\mathcal{T}}\|_{\mathcal{F}}^2 \leq \overline{C}_{\eta} \sum_{\mathcal{Q} \in \Omega_{\mathcal{D}}} m_{\mathcal{Q}} (D_{\mathcal{Q}}^{\mathcal{N}} \mathbf{u}^{\mathcal{T}} : D^{\mathcal{D}} \mathbf{u}^{\mathcal{T}}).$$

En appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on en déduit

$$\underline{C}_{\eta}^2 \sum_{\mathcal{Q} \in \Omega_{\mathcal{D}}} m_{\mathcal{Q}} \|D_{\mathcal{Q}}^{\mathcal{N}} \mathbf{u}^{\mathcal{T}}\|_{\mathcal{F}}^2 \leq \overline{C}_{\eta}^2 m_{\mathcal{D}} \|D^{\mathcal{D}} \mathbf{u}^{\mathcal{T}}\|_{\mathcal{F}}^2, \quad (\text{VII.36})$$

on pose alors $C_8 = \frac{\overline{C}_{\eta}}{\underline{C}_{\eta}}$. ■

On est maintenant en mesure de montrer l'inégalité de Korn.

Théorème VII.19 (Inégalité de Korn discrète sur les quarts de diamant)

On suppose que η vérifie (VII.2). Il existe une constante $C_9 > 0$, dépendant uniquement de \underline{C}_{η} , \overline{C}_{η} , $\text{reg}(\mathcal{T})$ et $\sin(\epsilon_0)$ telle que :

$$\|\nabla_{\Omega}^{\mathcal{N}} \mathbf{u}^{\mathcal{T}}\|_2 \leq C_9 \|D_{\Omega}^{\mathcal{N}} \mathbf{u}^{\mathcal{T}}\|_2, \quad \forall \mathbf{u}^{\mathcal{T}} \in \mathbb{E}_0.$$

Démonstration : L'égalité (VII.35) conduit à

$$\sum_{\mathcal{Q} \in \Omega_{\mathcal{D}}} m_{\mathcal{Q}} \eta_{\mathcal{Q}} \|B_{\mathcal{Q}} \delta^{\mathcal{D}} + {}^t \delta^{\mathcal{D}^t} B_{\mathcal{Q}}\|_{\mathcal{F}}^2 = - \sum_{\mathcal{Q} \in \Omega_{\mathcal{D}}} m_{\mathcal{Q}} \eta_{\mathcal{Q}} (2D^{\mathcal{D}} \mathbf{u}^{\mathcal{T}} : B_{\mathcal{Q}} \delta^{\mathcal{D}} + {}^t \delta^{\mathcal{D}^t} B_{\mathcal{Q}}).$$

L'inégalité de Cauchy-Schwarz et la relation (VII.2) sur la viscosité impliquent

$$\underline{C}_{\eta} \sum_{\mathcal{Q} \in \Omega_{\mathcal{D}}} m_{\mathcal{Q}} \|B_{\mathcal{Q}} \delta^{\mathcal{D}} + {}^t \delta^{\mathcal{D}^t} B_{\mathcal{Q}}\|_{\mathcal{F}}^2 \leq \overline{C}_{\eta} (m_{\mathcal{D}} \|D^{\mathcal{D}} \mathbf{u}^{\mathcal{T}}\|_{\mathcal{F}}^2)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{\mathcal{Q} \in \Omega_{\mathcal{D}}} m_{\mathcal{Q}} \|B_{\mathcal{Q}} \delta^{\mathcal{D}} + {}^t \delta^{\mathcal{D}^t} B_{\mathcal{Q}}\|_{\mathcal{F}}^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Il vient que

$$\sum_{\mathcal{Q} \in \Omega_{\mathcal{D}}} m_{\mathcal{Q}} \|B_{\mathcal{Q}} \delta^{\mathcal{D}} + {}^t \delta^{\mathcal{D}^t} B_{\mathcal{Q}}\|_{\mathcal{F}}^2 \leq \frac{\overline{C}_{\eta}^2}{\underline{C}_{\eta}^2} m_{\mathcal{D}} \|D^{\mathcal{D}} \mathbf{u}^{\mathcal{T}}\|_{\mathcal{F}}^2.$$

Grâce au Lemme VII.11, on déduit

$$\sum_{\mathcal{Q} \in \Omega_{\mathcal{D}}} m_{\mathcal{Q}} \|B_{\mathcal{Q}} \delta^{\mathcal{D}}\|_{\mathcal{F}}^2 \leq C_5 \frac{\overline{C}_{\eta}^2}{\underline{C}_{\eta}^2} m_{\mathcal{D}} \|D^{\mathcal{D}} \mathbf{u}^{\mathcal{T}}\|_{\mathcal{F}}^2.$$

De plus, on obtient ainsi

$$\sum_{\mathcal{Q} \in \Omega_{\mathcal{D}}} m_{\mathcal{Q}} \|\nabla_{\mathcal{Q}}^{\mathcal{N}} \mathbf{u}^{\mathcal{T}}\|_{\mathcal{F}}^2 \leq 2m_{\mathcal{D}} \|\nabla^{\mathcal{D}} \mathbf{u}^{\mathcal{T}}\|_{\mathcal{F}}^2 + 2C_5 \frac{\overline{C}_{\eta}^2}{\underline{C}_{\eta}^2} m_{\mathcal{D}} \|D^{\mathcal{D}} \mathbf{u}^{\mathcal{T}}\|_{\mathcal{F}}^2.$$

On conclut en appliquant l'inégalité de Korn (Théorème VI.4) et le Lemme VII.18 :

$$\|\nabla_{\Omega}^{\mathcal{N}} \mathbf{u}^{\mathcal{T}}\|_2^2 \leq 4 \left(1 + C_5 \frac{\overline{C}_{\eta}^2}{\underline{C}_{\eta}^2} \right) \|D^{\mathcal{D}} \mathbf{u}^{\mathcal{T}}\|_2^2 \leq 4 \left(1 + C_5 \frac{\overline{C}_{\eta}^2}{\underline{C}_{\eta}^2} \right) \|D_{\Omega}^{\mathcal{N}} \mathbf{u}^{\mathcal{T}}\|_2^2.$$

■

Le lemme VII.18 et les deux inégalités de Korn nous permettent de comparer également le gradient discret avec le modifié. Il faut remarquer que le résultat suivant est déduit des inégalités de Korn pour la seconde estimation. Il ne semble pas possible de la montrer de manière indépendante. En effet la première estimation est juste une conséquence de la propriété $\sum_{\mathcal{Q} \in \Omega_{\mathcal{D}}} m_{\mathcal{Q}} B_{\mathcal{Q}} = 0$.

Lemme VII.20

On suppose que η vérifie (VII.2). Il existe une constante $C_{10} > 0$, dépendant uniquement de \underline{C}_{η} , \overline{C}_{η} , $\text{reg}(\mathcal{T})$ et $\sin(\epsilon_0)$ telle que pour tout $\mathbf{u}^{\mathcal{T}} \in \mathbb{E}_0$, on a :

$$\|\nabla^{\mathfrak{D}} \mathbf{u}^{\mathcal{T}}\|_2 \leq \|\nabla_{\Omega}^{\mathcal{N}} \mathbf{u}^{\mathcal{T}}\|_2 \leq C_{10} \|\nabla^{\mathfrak{D}} \mathbf{u}^{\mathcal{T}}\|_2.$$

Comme on a introduit les opérateurs modifiés sur les quarts de diamant, on souhaite réécrire la formule de Green pour le tenseur des contraintes visqueuses $\mathbf{D}_{\mathfrak{D}}^{\eta, \mathcal{N}} \mathbf{u}^{\mathcal{T}}$ donné par la Définition VII.5.

Théorème VII.21

Pour tout $(\mathbf{u}^{\mathcal{T}}, \mathbf{v}^{\mathcal{T}}) \in (\mathbb{R}^2)^{\mathcal{T}} \times \mathbb{E}_0$, on a

$$\llbracket \mathbf{div}^{\mathcal{T}}(\mathbf{D}_{\mathfrak{D}}^{\eta, \mathcal{N}} \mathbf{u}^{\mathcal{T}}), \mathbf{v}^{\mathcal{T}} \rrbracket_{\mathcal{T}} = -(\eta^{\mathfrak{D}} \mathbf{D}_{\Omega}^{\mathcal{N}} \mathbf{u}^{\mathcal{T}} : \nabla_{\Omega}^{\mathcal{N}} \mathbf{v}^{\mathcal{T}})_{\Omega}.$$

Démonstration : La formule de Green (Théorème IV.9) donne

$$\llbracket \mathbf{div}^{\mathcal{T}}(\mathbf{D}_{\mathfrak{D}}^{\eta, \mathcal{N}} \mathbf{u}^{\mathcal{T}}), \mathbf{v}^{\mathcal{T}} \rrbracket_{\mathcal{T}} = -(\mathbf{D}_{\mathfrak{D}}^{\eta, \mathcal{N}} \mathbf{u}^{\mathcal{T}} : \nabla^{\mathfrak{D}} \mathbf{v}^{\mathcal{T}})_{\mathfrak{D}}.$$

Pour chaque diamant $\mathcal{D} \in \mathfrak{D}$, la Définition VII.5 de $\mathbf{D}_{\mathfrak{D}}^{\eta, \mathcal{N}}$, matrice symétrique, implique

$$m_{\mathcal{D}}(\mathbf{D}_{\mathfrak{D}}^{\eta, \mathcal{N}} \mathbf{u}^{\mathcal{T}} : \nabla^{\mathfrak{D}} \mathbf{v}^{\mathcal{T}}) = \sum_{\mathcal{Q} \in \Omega_{\mathcal{D}}} m_{\mathcal{Q}} \eta_{\mathcal{Q}}(\mathbf{D}_{\mathcal{Q}}^{\mathcal{N}} \mathbf{u}^{\mathcal{T}} : \mathbf{D}^{\mathfrak{D}} \mathbf{v}^{\mathcal{T}}).$$

Grâce au Théorème VII.10, il existe un unique couple $(\widehat{\delta^{\mathfrak{D}}}, \widehat{p^{\mathfrak{D}}}) \in \mathcal{M}_{n_{\mathcal{D}}, 2}(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^{n_{\mathcal{D}}}$ vérifiant (VII.14), avec $\mathbf{D}^{\mathfrak{D}} \mathbf{v}^{\mathcal{T}}$ et $p^{\mathfrak{D}}$ et on peut écrire :

$$m_{\mathcal{D}}(\mathbf{D}_{\mathfrak{D}}^{\eta, \mathcal{N}} \mathbf{u}^{\mathcal{T}} : \nabla^{\mathfrak{D}} \mathbf{v}^{\mathcal{T}}) = \sum_{\mathcal{Q} \in \Omega_{\mathcal{D}}} m_{\mathcal{Q}} \eta_{\mathcal{Q}} \left(\mathbf{D}_{\mathcal{Q}}^{\mathcal{N}} \mathbf{u}^{\mathcal{T}} : \mathbf{D}_{\mathcal{Q}}^{\mathcal{N}} \mathbf{v}^{\mathcal{T}} - \frac{1}{2} \left({}^t \widehat{\delta^{\mathfrak{D}}} B_{\mathcal{Q}} + B_{\mathcal{Q}} \widehat{\delta^{\mathfrak{D}}} \right) \right). \quad (\text{VII.37})$$

En multipliant à droite (VII.14a) par $\widehat{\delta^{\mathfrak{D}}}$ et en appliquant l'opérateur de trace, il vient que

$$\sum_{\mathcal{Q} \in \Omega_{\mathcal{D}}} m_{\mathcal{Q}} \underbrace{(2\eta_{\mathcal{Q}} \mathbf{D}^{\mathfrak{D}} \mathbf{u}^{\mathcal{T}} + \eta_{\mathcal{Q}} (B_{\mathcal{Q}} \delta^{\mathfrak{D}} + {}^t \delta^{\mathfrak{D}} B_{\mathcal{Q}}) - p^{\mathfrak{D}} \text{Id} : B_{\mathcal{Q}} \widehat{\delta^{\mathfrak{D}}} + {}^t \widehat{\delta^{\mathfrak{D}}} B_{\mathcal{Q}})}_{=\varphi_{\mathcal{Q}}(\mathbf{D}^{\mathfrak{D}} \mathbf{u}^{\mathcal{T}}, \delta^{\mathfrak{D}}, p^{\mathfrak{D}})} = 0,$$

puisque $\varphi_{\mathcal{Q}}(\mathbf{D}^{\mathfrak{D}} \mathbf{u}^{\mathcal{T}}, \delta^{\mathfrak{D}}, p^{\mathfrak{D}})$ est une matrice symétrique. De plus, comme on a $(\text{Id} : B_{\mathcal{Q}} \widehat{\delta^{\mathfrak{D}}} + {}^t \widehat{\delta^{\mathfrak{D}}} B_{\mathcal{Q}}) = \text{Tr}(B_{\mathcal{Q}} \widehat{\delta^{\mathfrak{D}}}) = 0$, on obtient

$$\sum_{\mathcal{Q} \in \Omega_{\mathcal{D}}} m_{\mathcal{Q}} \eta_{\mathcal{Q}} \underbrace{(2\mathbf{D}^{\mathfrak{D}} \mathbf{u}^{\mathcal{T}} + B_{\mathcal{Q}} \delta^{\mathfrak{D}} + {}^t \delta^{\mathfrak{D}} B_{\mathcal{Q}} : B_{\mathcal{Q}} \widehat{\delta^{\mathfrak{D}}} + {}^t \widehat{\delta^{\mathfrak{D}}} B_{\mathcal{Q}})}_{=2\mathbf{D}_{\mathcal{Q}}^{\mathcal{N}} \mathbf{u}^{\mathcal{T}}} = 0.$$

La Définition VII.3 de $\mathbf{D}_{\mathcal{Q}}^{\mathcal{N}}$ implique

$$\sum_{\mathcal{Q} \in \Omega_{\mathcal{D}}} m_{\mathcal{Q}} \eta_{\mathcal{Q}} (\mathbf{D}_{\mathcal{Q}}^{\mathcal{N}} \mathbf{u}^{\mathcal{T}} : {}^t \widehat{\delta^{\mathfrak{D}}} B_{\mathcal{Q}} + B_{\mathcal{Q}} \widehat{\delta^{\mathfrak{D}}}) = 0.$$

On remplace cette dernière égalité dans (VII.37) ceci donne :

$$m_{\mathcal{D}}(\mathbf{D}_{\mathfrak{D}}^{\eta, \mathcal{N}} \mathbf{u}^{\mathcal{T}} : \nabla^{\mathfrak{D}} \mathbf{v}^{\mathcal{T}}) = \sum_{\mathcal{Q} \in \Omega_{\mathcal{D}}} m_{\mathcal{Q}} \eta_{\mathcal{Q}} (\mathbf{D}_{\mathcal{Q}}^{\mathcal{N}} \mathbf{u}^{\mathcal{T}} : \mathbf{D}_{\mathcal{Q}}^{\mathcal{N}} \mathbf{v}^{\mathcal{T}}).$$

Finalement, comme la matrice $\mathbf{D}_{\mathcal{Q}}^{\mathcal{N}} \mathbf{u}^{\mathcal{T}}$ est symétrique, on en déduit que

$$m_{\mathcal{D}}(\mathbf{D}_{\mathfrak{D}}^{\eta, \mathcal{N}} \mathbf{u}^{\mathcal{T}} : \nabla^{\mathfrak{D}} \mathbf{v}^{\mathcal{T}}) = \sum_{\mathcal{Q} \in \Omega_{\mathcal{D}}} m_{\mathcal{Q}} \eta_{\mathcal{Q}} (\mathbf{D}_{\mathcal{Q}}^{\mathcal{N}} \mathbf{u}^{\mathcal{T}} : \nabla_{\mathcal{Q}}^{\mathcal{N}} \mathbf{v}^{\mathcal{T}}).$$

Ceci conclut le résultat. ■

VII.5 Stabilité du schéma m-DDFV

Dans cette section, on montre la stabilité et le caractère bien posé du schéma m-DDFV (VII.34). Dans le Théorème VII.23, le choix de la stabilisation est crucial. La nouveauté repose ici sur la présence des inconnues artificielles $(\delta^\mathfrak{D}, p^\mathfrak{D})$ (bien qu'elles soient algébriquement éliminées dans le système). On commence par donner la forme bilinéaire associée au schéma m-DDFV (VII.34).

Définition VII.22

On définit la forme bilinéaire associée au schéma m-DDFV (VII.34) :

$$\begin{aligned} \forall (\mathbf{u}^\tau, p^\mathfrak{D}), (\tilde{\mathbf{u}}^\tau, \tilde{p}^\mathfrak{D}) \in (\mathbb{R}^2)^\tau \times \mathbb{R}^\mathfrak{D}, \\ B(\mathbf{u}^\tau, p^\mathfrak{D}; \tilde{\mathbf{u}}^\tau, \tilde{p}^\mathfrak{D}) = \llbracket \mathbf{div}^\tau(-2D_\mathfrak{D}^{\eta, \mathcal{N}} \mathbf{u}^\tau + p^\mathfrak{D} \text{Id}), \tilde{\mathbf{u}}^\tau \rrbracket_\tau + (\text{div}^\mathfrak{D}(\mathbf{u}^\tau) - \lambda d_\mathfrak{D}^2 \underline{\Delta}^\mathfrak{D}(p^\mathfrak{D}), \tilde{p}^\mathfrak{D})_\mathfrak{D}, \end{aligned}$$

où $\lambda > 0$ et $(\delta^\mathfrak{D}, p^\mathfrak{D})$ est la solution de (VII.14) pour $D^\mathfrak{D} \mathbf{u}^\tau$ et $p^\mathfrak{D}$.

Théorème VII.23 (Stabilité du schéma)

On suppose que η vérifie (VII.2) et que $\lambda < \frac{4C_\eta}{C_7}$. Il existe deux constantes $C_{11}, C_{12} > 0$, dépendant uniquement de Ω , λ , \underline{C}_η , \overline{C}_η , $\text{reg}(\mathcal{T})$ et $\sin(\epsilon_0)$, telles que pour tout couple $(\mathbf{u}^\tau, p^\mathfrak{D}) \in \mathbb{E}_0 \times \mathbb{R}^\mathfrak{D}$ tel que $\sum_{v \in \mathfrak{D}} m_v p^v = 0$, il existe $(\tilde{\mathbf{u}}^\tau, \tilde{p}^\mathfrak{D}) \in \mathbb{E}_0 \times \mathbb{R}^\mathfrak{D}$ avec :

$$\|\nabla_\mathfrak{D}^\mathcal{N} \tilde{\mathbf{u}}^\tau\|_2 + \|\tilde{p}^\mathfrak{D}\|_2 \leq C_{11} (\|\nabla_\mathfrak{D}^\mathcal{N} \mathbf{u}^\tau\|_2 + \|p^\mathfrak{D}\|_2), \quad (\text{VII.38})$$

et

$$\|\nabla_\mathfrak{D}^\mathcal{N} \mathbf{u}^\tau\|_2^2 + \|p^\mathfrak{D}\|_2^2 \leq C_{12} B(\mathbf{u}^\tau, p^\mathfrak{D}; \tilde{\mathbf{u}}^\tau, \tilde{p}^\mathfrak{D}). \quad (\text{VII.39})$$

où $(\delta^\mathfrak{D}, p^\mathfrak{D})$ (resp. $(\tilde{\delta}^\mathfrak{D}, \tilde{p}^\mathfrak{D})$) est la solution de (VII.14) pour $D^\mathfrak{D} \mathbf{u}^\tau$ et $p^\mathfrak{D}$ (resp. $D^\mathfrak{D} \tilde{\mathbf{u}}^\tau$ et $\tilde{p}^\mathfrak{D}$).

La constante $\frac{4C_\eta}{C_7}$ dépend de la régularité du maillage et de la viscosité, en effet elle vaut $\frac{C_\eta^2}{C_7^2} \frac{1}{12 \text{reg}(\mathcal{T})^{9/2} \text{reg}(\mathcal{T})^2 (1 + \text{reg}(\mathcal{T})^2)}$.

Pour un maillage uniforme et un saut de viscosité de 10^{-4} , cette constante est de l'ordre de 10^{-8} . Dans les tests numériques, on a choisi $\lambda = 10^{-3}$, néanmoins le schéma semble bien posé.

Démonstration :

Etape 1 : On applique la formule de Green discrète (Théorème IV.9) et le Théorème VII.21, à la Définition VII.22 de B , en remarquant que $\gamma^\tau(\mathbf{u}^\tau) = 0$, on obtient

$$B(\mathbf{u}^\tau, p^\mathfrak{D}; \mathbf{u}^\tau, p^\mathfrak{D}) = (2\eta^\mathfrak{D} D_\mathfrak{D}^\mathcal{N} \mathbf{u}^\tau : \nabla_\mathfrak{D}^\mathcal{N} \mathbf{u}^\tau)_\mathfrak{D} - (\lambda d_\mathfrak{D}^2 \underline{\Delta}^\mathfrak{D}(p^\mathfrak{D}), p^\mathfrak{D})_\mathfrak{D}.$$

Comme la matrice $D_\mathfrak{D}^\mathcal{N} \mathbf{u}^\tau$ est symétrique, on a en utilisant la relation (VII.33) que

$$B(\mathbf{u}^\tau, p^\mathfrak{D}; \mathbf{u}^\tau, p^\mathfrak{D}) = (2\eta^\mathfrak{D} D_\mathfrak{D}^\mathcal{N} \mathbf{u}^\tau : D_\mathfrak{D}^\mathcal{N} \mathbf{u}^\tau)_\mathfrak{D} - (\lambda d_\mathfrak{D}^2 \underline{\Delta}^\mathfrak{D}(p^\mathfrak{D}) + \lambda d_\mathfrak{D}^2 \Delta_\alpha^\mathfrak{D}(D^\mathfrak{D} \mathbf{u}^\tau), p^\mathfrak{D})_\mathfrak{D}. \quad (\text{VII.40})$$

En réorganisant la somme sur les côtés $\mathfrak{s} \in \mathfrak{S}$ des diamants, on a

$$-(d_\mathfrak{D}^2 \Delta_\alpha^\mathfrak{D}(D^\mathfrak{D} \mathbf{u}^\tau), p^\mathfrak{D})_\mathfrak{D} = \sum_{\mathfrak{s}=\mathfrak{D}|\mathfrak{D}' \in \mathfrak{S}} (d_\mathfrak{D}^2 + d_{\mathfrak{D}'}^2)(\alpha_{\mathfrak{s}, \mathfrak{D}'}(D^{\mathfrak{D}'} \mathbf{u}^\tau) - \alpha_{\mathfrak{s}, \mathfrak{D}}(D^\mathfrak{D} \mathbf{u}^\tau))(p^{\mathfrak{D}'} - p^\mathfrak{D}).$$

L'inégalité de Young conduit à

$$-(d_\mathfrak{D}^2 \Delta_\alpha^\mathfrak{D}(D^\mathfrak{D} \mathbf{u}^\tau), p^\mathfrak{D})_\mathfrak{D} \geq -\frac{1}{2} |p^\mathfrak{D}|_h^2 - \frac{1}{2} |D^\mathfrak{D} \mathbf{u}^\tau|_{\alpha, h}^2.$$

Grâce à la Remarque IV.12 sur la semi-norme $|\cdot|_h$, il vient que

$$-\lambda(d_\mathfrak{D}^2 \Delta^\mathfrak{D}(p^\mathfrak{D}) + d_\mathfrak{D}^2 \Delta_\alpha^\mathfrak{D}(D^\mathfrak{D} \mathbf{u}^\tau), p^\mathfrak{D})_\mathfrak{D} \geq \frac{\lambda}{2} |p^\mathfrak{D}|_h^2 - \frac{\lambda}{2} |D^\mathfrak{D} \mathbf{u}^\tau|_{\alpha, h}^2.$$

En regroupant l'inégalité ci-dessus et l'inégalité sur la viscosité (VII.2) dans (VII.40), on obtient

$$B(\mathbf{u}^\tau, p^\mathfrak{D}; \mathbf{u}^\tau, p^\mathfrak{D}) \geq 2\underline{C}_\eta \|D_\mathfrak{D}^\mathcal{N} \mathbf{u}^\tau\|_2^2 + \frac{\lambda}{2} |p^\mathfrak{D}|_h^2 - \frac{\lambda}{2} |D^\mathfrak{D} \mathbf{u}^\tau|_{\alpha, h}^2. \quad (\text{VII.41})$$

La relation (VII.32) et le Lemme VII.18 impliquent que

$$|D^{\mathfrak{D}} \mathbf{u}^{\tau}|_{\alpha, h}^2 \leq C_7 \|D_{\Omega}^{\mathcal{N}} \mathbf{u}^{\tau}\|_2^2.$$

Finalement, on utilise cette inégalité et celle de Korn sur les quarts de diamant (Théorème VII.19) dans (VII.41) pour en déduire

$$B(\mathbf{u}^{\tau}, p^{\mathfrak{D}}; \mathbf{u}^{\tau}, p^{\mathfrak{D}}) \geq \frac{1}{C_9^2} \left(2C_{\eta} - C_7 \frac{\lambda}{2} \right) \|\nabla_{\Omega}^{\mathcal{N}} \mathbf{u}^{\tau}\|_2^2 + \frac{\lambda}{2} |p^{\mathfrak{D}}|_h^2. \quad (\text{VII.42})$$

Avec $\lambda < \frac{4C_{\eta}}{C_7}$, toutes les constantes de l'estimation ci-dessus sont strictement positives.

Etape 2 : On utilise le Lemme de Nečas (voir [GR86, Corollaire 2.4]) : comme $p^{\mathfrak{D}} = \sum_{\mathfrak{D} \in \mathfrak{D}} \sum_{\mathfrak{Q} \in \Omega_{\mathfrak{D}}} p^{\mathfrak{Q}} \mathbf{1}_{\mathfrak{Q}} \in L^2(\Omega)$ est d'intégrale nulle sur Ω , (car on a $m_{\mathfrak{D}} p^{\mathfrak{D}} = \sum_{\mathfrak{Q} \in \Omega_{\mathfrak{D}}} m_{\mathfrak{Q}} p^{\mathfrak{Q}}$, pour tout $\mathfrak{D} \in \mathfrak{D}$), alors il existe une constante $C > 0$, dépendant uniquement de Ω , et $\mathbf{v} \in (H_0^1(\Omega))^2$ telle que $\text{div}(\mathbf{v}) = -p^{\mathfrak{D}}$ et

$$\|\mathbf{v}\|_{H^1} \leq C \|p^{\mathfrak{D}}\|_2. \quad (\text{VII.43})$$

On pose $\mathbf{v}^{\tau} = \mathbb{P}_{\mathbf{m}}^{\tau} \mathbf{v}$, définie par (IV.4). En particulier, on a $\mathbf{v}^{\tau} \in \mathbb{E}_0$. Le Lemme VII.18 et la Proposition VI.1 impliquent

$$\|D_{\Omega}^{\mathcal{N}} \mathbf{v}^{\tau}\|_2 \leq C_8 \|D^{\mathfrak{D}} \mathbf{v}^{\tau}\|_2 \leq C_8 \|\nabla^{\mathfrak{D}} \mathbf{v}^{\tau}\|_2.$$

Ensuite grâce au Lemme IV.19, il vient que

$$\|D_{\Omega}^{\mathcal{N}} \mathbf{v}^{\tau}\|_2 \leq C_8 C_3 \|\mathbf{v}\|_{H^1}.$$

Pour finir, l'estimation VII.43 donne

$$\|D_{\Omega}^{\mathcal{N}} \mathbf{v}^{\tau}\|_2 \leq C_8 C_3 C \|p^{\mathfrak{D}}\|_2. \quad (\text{VII.44})$$

De plus, la formule de Green discrète (Théorème IV.9) et le Théorème VII.21 conduisent à

$$B(\mathbf{u}^{\tau}, p^{\mathfrak{D}}; \mathbf{v}^{\tau}, 0) = 2(\eta^{\mathfrak{D}} D_{\Omega}^{\mathcal{N}} \mathbf{u}^{\tau} : \nabla_{\Omega}^{\mathcal{N}} \mathbf{v}^{\tau})_{\Omega} - (p^{\mathfrak{D}}, \text{div}^{\mathfrak{D}}(\mathbf{v}^{\tau}))_{\mathfrak{D}}.$$

En utilisant le fait que $(\eta^{\mathfrak{D}} D_{\Omega}^{\mathcal{N}} \mathbf{u}^{\tau} : \nabla_{\Omega}^{\mathcal{N}} \mathbf{v}^{\tau})_{\Omega} = (\eta^{\mathfrak{D}} \nabla_{\Omega}^{\mathcal{N}} \mathbf{u}^{\tau} : D_{\Omega}^{\mathcal{N}} \mathbf{v}^{\tau})_{\Omega}$ et l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on en déduit que

$$B(\mathbf{u}^{\tau}, p^{\mathfrak{D}}; \mathbf{v}^{\tau}, 0) \geq -\overline{C}_{\eta} \|\nabla_{\Omega}^{\mathcal{N}} \mathbf{u}^{\tau}\|_2 \|D_{\Omega}^{\mathcal{N}} \mathbf{v}^{\tau}\|_2 - \sum_{\mathfrak{D} \in \mathfrak{D}} m_{\mathfrak{D}} p^{\mathfrak{D}} \text{div}^{\mathfrak{D}}(\mathbf{v}^{\tau}).$$

Ensuite, on ajoute et soustrait d'autres termes de contribution nulle que l'on estime par la suite de la manière suivante :

$$\begin{aligned} B(\mathbf{u}^{\tau}, p^{\mathfrak{D}}; \mathbf{v}^{\tau}, 0) &\geq -\overline{C}_{\eta} \|\nabla_{\Omega}^{\mathcal{N}} \mathbf{u}^{\tau}\|_2 \|D_{\Omega}^{\mathcal{N}} \mathbf{v}^{\tau}\|_2 - \sum_{\mathfrak{D} \in \mathfrak{D}} \sum_{\mathfrak{Q} \in \Omega_{\mathfrak{D}}} \int_{\mathfrak{Q}} p^{\mathfrak{Q}} \text{div}(\mathbf{v}(z)) dz \\ &\quad - \sum_{\mathfrak{D} \in \mathfrak{D}} \int_{\mathfrak{D}} p^{\mathfrak{D}} (\text{div}^{\mathfrak{D}}(\mathbf{v}^{\tau}) - \text{div}(\mathbf{v}(z))) dz + \sum_{\mathfrak{D} \in \mathfrak{D}} \sum_{\mathfrak{Q} \in \Omega_{\mathfrak{D}}} \int_{\mathfrak{Q}} (p^{\mathfrak{D}} - p^{\mathfrak{Q}}) \text{div}(\mathbf{v}(z)) dz. \end{aligned}$$

Puisqu'on a $\text{div}(\mathbf{v}) = -p^{\mathfrak{D}}$, l'inégalité (VII.44) donne

$$\begin{aligned} B(\mathbf{u}^{\tau}, p^{\mathfrak{D}}; \mathbf{v}^{\tau}, 0) &\geq -\overline{C}_{\eta} C_8 C_3 C \|\nabla_{\Omega}^{\mathcal{N}} \mathbf{u}^{\tau}\|_2 \|p^{\mathfrak{D}}\|_2 + \|p^{\mathfrak{D}}\|_2^2 \\ &\quad - \sum_{\mathfrak{D} \in \mathfrak{D}} \int_{\mathfrak{D}} p^{\mathfrak{D}} (\text{div}^{\mathfrak{D}}(\mathbf{v}^{\tau}) - \text{div}(\mathbf{v}(z))) dz - \sum_{\mathfrak{D} \in \mathfrak{D}} \sum_{\mathfrak{Q} \in \Omega_{\mathfrak{D}}} \int_{\mathfrak{Q}} (p^{\mathfrak{D}} - p^{\mathfrak{Q}}) \text{div}(\mathbf{v}(z)) dz. \end{aligned} \quad (\text{VII.45})$$

- Grâce à la Proposition IV.25 et à l'estimation (VII.43), on obtient

$$\sum_{\mathfrak{D} \in \mathfrak{D}} \int_{\mathfrak{D}} p^{\mathfrak{D}} (\text{div}^{\mathfrak{D}}(\mathbf{v}^{\tau}) - \text{div}(\mathbf{v}(z))) dz \leq C C_4 |p^{\mathfrak{D}}|_h \|p^{\mathfrak{D}}\|_2.$$

- Puis, le Lemme VII.12 donne $p^{\mathfrak{D}} - p^{\mathfrak{Q}} = -\alpha_{\mathfrak{s}, \mathfrak{D}}(D^{\mathfrak{D}} \mathbf{u}^{\tau})$, avec $\mathfrak{s} = \partial \mathfrak{D} \cap \partial \mathfrak{Q}$ et l'inégalité de Cauchy-Schwarz implique donc

$$\sum_{\mathfrak{D} \in \mathfrak{D}} \sum_{\mathfrak{Q} \in \Omega_{\mathfrak{D}}} \int_{\mathfrak{Q}} (p^{\mathfrak{D}} - p^{\mathfrak{Q}}) \text{div}(\mathbf{v}(z)) dz \leq \|\text{div}(\mathbf{v})\|_2 \left(\sum_{\mathfrak{D} \in \mathfrak{D}} \sum_{\mathfrak{s} \in \mathcal{E}_{\mathfrak{D}}} m_{\mathfrak{D}} |\alpha_{\mathfrak{s}, \mathfrak{D}}(D^{\mathfrak{D}} \mathbf{u}^{\tau})|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Puisqu'on a $\operatorname{div}(\mathbf{v}) = -p^\Omega$, l'estimation du Lemme VII.12 conduit à

$$\sum_{\mathcal{D} \in \mathcal{D}} \sum_{\mathcal{Q} \in \Omega_{\mathcal{D}}} \int_{\mathcal{Q}} (p^{\mathcal{D}} - p^{\mathcal{Q}}) \operatorname{div}(\mathbf{v}(z)) dz \leq \sqrt{C_6} \|p^\Omega\|_2 \|D^{\mathcal{D}} \mathbf{u}^\tau\|_2.$$

Pour finir, le Lemme VII.18 et la Proposition VII.17 impliquent

$$\sum_{\mathcal{D} \in \mathcal{D}} \sum_{\mathcal{Q} \in \Omega_{\mathcal{D}}} \int_{\mathcal{Q}} (p^{\mathcal{D}} - p^{\mathcal{Q}}) \operatorname{div}(\mathbf{v}(z)) dz \leq \sqrt{C_6} \|p^\Omega\|_2 \|\nabla_{\Omega}^{\mathcal{N}} \mathbf{u}^\tau\|_2.$$

On déduit de l'estimation (VII.45) que

$$B(\mathbf{u}^\tau, p^\Omega; \mathbf{v}^\tau, 0) \geq \|p^\Omega\|_2^2 - \overline{C}_\eta C_8 C_3 C \|p^\Omega\|_2 \|\nabla_{\Omega}^{\mathcal{N}} \mathbf{u}^\tau\|_2 - (\sqrt{C_6} + C C_4) |p^\Omega|_h \|p^\Omega\|_2.$$

En utilisant l'inégalité de Young, on obtient l'existence de trois constantes $\tilde{C}_1, \tilde{C}_2, \tilde{C}_3 > 0$, dépendant uniquement de Ω, η et $\operatorname{reg}(\mathcal{T})$, telles que

$$B(\mathbf{u}^\tau, p^\Omega; \mathbf{v}^\tau, 0) \geq \tilde{C}_1 \|p^\Omega\|_2^2 - \tilde{C}_2 \|\nabla_{\Omega}^{\mathcal{N}} \mathbf{u}^\tau\|_2^2 - \tilde{C}_3 |p^\Omega|_h^2. \quad (\text{VII.46})$$

Etape 3 : La bilinéarité de B , les estimations (VII.42) et (VII.46) donnent pour tout nombre strictement positif $\xi > 0$:

$$B(\mathbf{u}^\tau, p^\Omega; \mathbf{u}^\tau + \xi \mathbf{v}^\tau, p^\Omega) \geq \left(\frac{1}{C_9^2} \left(2\overline{C}_\eta - C_7 \frac{\lambda}{2} \right) - \xi \tilde{C}_2 \right) \|\nabla_{\Omega}^{\mathcal{N}} \mathbf{u}^\tau\|_2^2 + \xi \tilde{C}_1 \|p^\Omega\|_2^2 + \left(\frac{\lambda}{2} - \xi \tilde{C}_3 \right) |p^\Omega|_h^2.$$

On choisit la valeur de $\xi > 0$ suffisamment petite telle que toutes les constantes devant les normes soient strictement positives, cette inégalité conduit à l'estimation (VII.39). La relation (VII.38) est vérifiée pour le couple $\tilde{\mathbf{u}}^\tau = \mathbf{u}^\tau + \xi \mathbf{v}^\tau$ et $\tilde{p}^\Omega = p^\Omega$, grâce à (VII.44) et au Théorème VII.19, ceci conclut la démonstration. ■

Une conséquence immédiate des inégalités de stabilité est le caractère bien posé du schéma m-DDFV (VII.34).

Théorème VII.24

On suppose que η vérifie (VII.2). Soit \mathcal{T} un maillage DDFV associé à Ω . Le schéma m-DDFV (VII.34) avec $0 < \lambda < \frac{4\overline{C}_\eta}{C_7}$ admet une unique solution $(\mathbf{u}^\tau, p^\Omega) \in (\mathbb{R}^2)^\tau \times \mathbb{R}^\Omega$.

Démonstration : On note N la dimension de $(\mathbb{R}^2)^\tau \times \mathbb{R}^\Omega$. Le schéma (VII.34) peut s'écrire avec $q^\Omega = 0$, $\mathbf{g}^{\partial\mathfrak{M}} = 0$, $\mathbf{g}^{\partial\mathfrak{M}^*} = 0$ et $\alpha = 0$ comme suit

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } \mathbf{u}^\tau \in (\mathbb{R}^2)^\tau \text{ et } p^\Omega \in \mathbb{R}^\Omega \text{ tels que,} \\ \operatorname{div}^{\mathfrak{M}}(-2D_{\mathfrak{D}}^{\eta, \mathcal{N}} \mathbf{u}^\tau + p^\Omega \operatorname{Id}) = \mathbf{f}^{\mathfrak{M}}, \\ \operatorname{div}^{\mathfrak{M}^*}(-2D_{\mathfrak{D}}^{\eta, \mathcal{N}} \mathbf{u}^\tau + p^\Omega \operatorname{Id}) = \mathbf{f}^{\mathfrak{M}^*}, \\ \operatorname{div}^\Omega(\mathbf{u}^\tau) - \lambda d_{\mathfrak{D}}^2 \Delta^\Omega p^\Omega = q^\Omega, \\ \mathbf{u}_\kappa = \mathbf{g}_\kappa, \quad \forall \kappa \in \partial\mathfrak{M}, \\ \mathbf{u}_{\kappa^*} = \mathbf{g}_{\kappa^*}, \quad \forall \kappa^* \in \partial\mathfrak{M}^* \\ \sum_{\mathcal{D} \in \mathcal{D}} m_{\mathcal{D}} p^\Omega = \alpha. \end{array} \right.$$

C'est un système linéaire : $Av = b$ avec une matrice rectangle $A \in \mathcal{M}_{N+1, N}(\mathbb{R})$, $v \in \mathbb{R}^N$ et le second membre $b = {}^t(\mathbf{f}^{\mathfrak{M}}, \mathbf{f}^{\mathfrak{M}^*}, q^\Omega, \mathbf{g}^{\partial\mathfrak{M}}, \mathbf{g}^{\partial\mathfrak{M}^*}, \alpha) \in \mathbb{R}^{N+1}$. Soit X l'ensemble suivant

$$X = \left\{ (\mathbf{f}^{\mathfrak{M}}, \mathbf{f}^{\mathfrak{M}^*}, q^\Omega, \mathbf{g}^{\partial\mathfrak{M}}, \mathbf{g}^{\partial\mathfrak{M}^*}, \alpha)' \in \mathbb{R}^{N+1}, \sum_{\mathcal{D}, \sigma, \sigma^* \in \mathcal{D}_{ext}} m_\sigma \gamma^\tau(\mathbf{g}^\tau) \cdot \vec{\mathbf{n}}_{\sigma\kappa} = \sum_{\mathcal{D} \in \mathcal{D}} m_{\mathcal{D}} q^\Omega \right\},$$

la dimension de X vaut N . On a que ${}^t(\mathbf{f}^{\mathfrak{M}}, \mathbf{f}^{\mathfrak{M}^*}, 0, 0, 0, 0)$ appartient à X et que $\operatorname{Im} A \subset X$ car on a une relation entre l'équation de la conservation de la masse et la condition aux bords de Dirichlet grâce à la formule de Green

(Théorème IV.9). Si on montre que la matrice A est injective, on conclut que $\dim \operatorname{Im} A = N$ et ainsi $\operatorname{Im} A = X$. Etudions donc le noyau de la matrice A . Grâce au Théorème VII.23, il existe $\tilde{\mathbf{u}}^\tau \in \mathbb{E}_0$, $\tilde{p}^\mathfrak{D} \in \mathbb{R}^\mathfrak{D}$, tel que

$$\|\nabla_\Omega^\mathcal{N} \mathbf{u}^\tau\|_2^2 + \|p^\mathfrak{D}\|_2^2 \leq C_{12} B(\mathbf{u}^\tau, p^\mathfrak{D}; \tilde{\mathbf{u}}^\tau, \tilde{p}^\mathfrak{D}).$$

La Définition VII.22 de B implique que $B(\mathbf{u}^\tau, p^\mathfrak{D}; \tilde{\mathbf{u}}^\tau, \tilde{p}^\mathfrak{D}) = 0$. Il vient que $\nabla_\Omega^\mathcal{N} \mathbf{u}^\tau = 0$ et $p^\mathfrak{D} = 0$, avec $(\delta^\mathfrak{D}, p^\mathfrak{D})$ la solution de (VII.14) pour $\mathbf{D}^\mathfrak{D} \mathbf{u}^\tau$ et $p^\mathfrak{D}$. On déduit de la relation (VII.10) que $p^\mathfrak{D} = 0$. On a également grâce au Lemme VII.20 que $\nabla^\mathfrak{D} \mathbf{u}^\tau = 0$. Comme $\mathbf{u}^\tau \in \mathbb{E}_0$, la Remarque IV.3 implique $\mathbf{u}^\tau = 0$. ■

VII.6 Estimations d'erreurs du schéma m-DDFV

Pour étudier les ordres de convergence de notre schéma, on a besoin de faire des hypothèses de régularité de la solution exacte (\mathbf{u}, p) du problème (VII.1). On suppose que :

$$(H^2(\Omega))^2 = \{\mathbf{u} \in (H^1(\Omega))^2, \quad \mathbf{u}|_\mathcal{Q} \in (H^2(\mathcal{Q}))^2, \text{ pour tout } \mathcal{Q} \in \Omega\}, \text{ pour la vitesse,}$$

$$H^1(\Omega) = \{p \in L^2(\Omega), \quad p|_\mathcal{Q} \in H^1(\mathcal{Q}), \text{ pour tout } \mathcal{Q} \in \Omega\} \text{ pour la pression,}$$

avec les normes correspondantes :

$$\|\mathbf{u}\|_{(H^2(\Omega))^2}^2 = \|\mathbf{u}\|_{H^1(\Omega)}^2 + \sum_{\mathcal{Q} \in \Omega} \|\nabla^2 \mathbf{u}\|_{L^2(\mathcal{Q})}^2, \quad \forall \mathbf{u} \in (H^2(\Omega))^2,$$

$$\|p\|_{H^1(\Omega)}^2 = \|p\|_{L^2(\Omega)}^2 + \sum_{\mathcal{Q} \in \Omega} \|\nabla p\|_{L^2(\mathcal{Q})}^2, \quad \forall p \in H^1(\Omega).$$

On remarque que pour des fonctions dans $(H^2(\Omega))^2$, la projection centrée $\mathbb{P}_\mathcal{C}^\tau$, donnée par (IV.5), est bien définie. On donne maintenant une estimation de l'erreur dans le cas où la solution exacte du problème (VII.1) appartient à $(H^2(\Omega))^2 \times H^1(\Omega)$.

Théorème VII.25

On suppose que η vérifie (VII.2) et (VII.3) et que $0 < \lambda < \frac{4C_\eta}{C_\tau}$. On suppose que la solution (\mathbf{u}, p) du problème (VII.1) appartient à $(H^2(\Omega))^2 \times H^1(\Omega)$. Soit $(\mathbf{u}^\tau, p^\mathfrak{D}) \in (\mathbb{R}^2)^\tau \times \mathbb{R}^\mathfrak{D}$ la solution du schéma (VII.34). Il existe une constante $C_{13} > 0$, dépendant uniquement de Ω , $\operatorname{reg}(\mathcal{T})$, λ , $\sin(\epsilon_0)$, C_η , \underline{C}_η , \overline{C}_η , $\|\mathbf{u}\|_{(H^2(\Omega))^2}$ et $\|p\|_{H^1(\Omega)}$, telle que :

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}^\tau\|_2 + \|\mathbf{D}\mathbf{u} - \mathbf{D}_\Omega^\mathcal{N} \mathbf{u}^\tau\|_2 \leq C_{13} \operatorname{size}(\mathcal{T}) \quad \text{et} \quad \|p - p^\mathfrak{D}\|_2 \leq C_{13} \operatorname{size}(\mathcal{T}),$$

avec $(\delta^\mathfrak{D}, p^\mathfrak{D})$ la solution de (VII.14) pour $\mathbf{D}^\mathfrak{D} \mathbf{u}^\tau$ et $p^\mathfrak{D}$.

Début de la Démonstration du Théorème VII.25 : Soit $\mathbf{e}^\tau = \mathbb{P}_\mathcal{C}^\tau \mathbf{u} - \mathbf{u}^\tau \in \mathbb{E}_0$ l'erreur pour la vitesse et $e^\mathfrak{D} = \mathbb{P}_m^\mathfrak{D} p - p^\mathfrak{D} \in \mathbb{R}^\mathfrak{D}$ l'erreur pour la pression. Grâce à (VII.34) et (VII.1), on a $\forall \kappa \in \mathfrak{M}$

$$\operatorname{div}^\kappa(-2\mathbf{D}_\mathfrak{D}^{\eta, \mathcal{N}} \mathbf{u}^\tau + p^\mathfrak{D} \operatorname{Id}) = \mathbf{f}_\kappa = -\frac{1}{m_\kappa} \int_\kappa \operatorname{div}(2\eta(x) \mathbf{D}\mathbf{u}(x)) dx + \frac{1}{m_\kappa} \int_\kappa \nabla p(x) dx.$$

Par conséquent, on en déduit

$$m_\kappa \operatorname{div}^\kappa(-2\mathbf{D}_\mathfrak{D}^{\eta, \mathcal{N}} \mathbf{e}^\tau + e^\mathfrak{D} \operatorname{Id}) = m_\kappa \operatorname{div}^\kappa(-2\mathbf{D}_\mathfrak{D}^{\eta, \mathcal{N}} \mathbb{P}_\mathcal{C}^\tau \mathbf{u} + \mathbb{P}_m^\mathfrak{D} p \operatorname{Id}) + \int_\kappa \operatorname{div}(2\eta(x) \mathbf{D}\mathbf{u}(x)) dx - \int_\kappa \nabla p(x) dx.$$

La Définition IV.4 de la divergence discrète et la formule de Green impliquent

$$\begin{aligned} m_\kappa \operatorname{div}^\kappa(-2\mathbf{D}_\mathfrak{D}^{\eta, \mathcal{N}} \mathbf{e}^\tau + e^\mathfrak{D} \operatorname{Id}) &= \sum_{\mathcal{Q} \subset \kappa} \sum_{\substack{\mathbf{s} \in \mathcal{E}_\mathcal{Q} \\ \mathbf{s} \subset \partial \kappa}} \int_{\mathbf{s}} 2\eta(z) \mathbf{D}\mathbf{u}(z) \cdot \tilde{\mathbf{n}}_{\mathbf{s}, \mathcal{Q}} dz - \sum_{\mathfrak{D} \in \mathfrak{D}_\kappa} m_\sigma (2\mathbf{D}_\mathfrak{D}^{\eta, \mathcal{N}} \mathbb{P}_\mathcal{C}^\tau \mathbf{u}) \cdot \tilde{\mathbf{n}}_{\sigma \kappa} \\ &\quad + \sum_{\mathfrak{D} \in \mathfrak{D}_\kappa} m_\sigma \mathbb{P}_m^\mathfrak{D} p \tilde{\mathbf{n}}_{\sigma \kappa} - \sum_{\mathcal{Q} \subset \kappa} \sum_{\substack{\mathbf{s} \in \mathcal{E}_\mathcal{Q} \\ \mathbf{s} \subset \partial \kappa}} \int_{\mathbf{s}} p(z) \tilde{\mathbf{n}}_{\mathbf{s}, \mathcal{Q}} dz. \end{aligned}$$

On introduit la définition suivante qui est une conséquence du Théorème VII.10. Il existe $(\delta_{\text{ex}}^{\mathcal{D}}, p_{\text{ex}}^{\mathcal{D}}) \in \mathcal{M}_{n_{\mathcal{D}},2}(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^{n_{\mathcal{D}}}$ vérifiant

$$\begin{cases} \sum_{\mathcal{Q} \in \mathcal{Q}_{\mathcal{D}}} m_{\mathcal{Q}} \varphi_{\mathcal{Q}}(\mathcal{D}^{\mathcal{D}} \mathbb{P}_{\mathcal{C}}^{\mathcal{T}} \mathbf{u}, \delta_{\text{ex}}^{\mathcal{D}}, p_{\text{ex}}^{\mathcal{D}}) B_{\mathcal{Q}} = 0, & \text{Tr}({}^t \delta_{\text{ex}}^{\mathcal{D}} {}^t B_{\mathcal{Q}}) = 0, \quad \forall \mathcal{Q} \in \mathcal{Q}_{\mathcal{D}}, \\ \sum_{\mathcal{Q} \in \mathcal{Q}_{\mathcal{D}}} m_{\mathcal{Q}} p_{\text{ex}}^{\mathcal{Q}} = m_{\mathcal{D}} \mathbb{P}_m^{\mathcal{D}} p, & (\delta_{\text{ex}}^{\mathcal{D}} : \delta_0) = 0, \end{cases} \quad (\text{VII.47})$$

et on note dans toute la suite

$$\tilde{p}_{\text{ex}}^{\mathcal{Q}} = \mathbb{P}_m^{\mathcal{Q}} p - p_{\text{ex}}^{\mathcal{Q}}, \quad \forall \mathcal{Q} \in \mathcal{Q} \text{ et on a } \sum_{\mathcal{Q} \in \mathcal{Q}_{\mathcal{D}}} m_{\mathcal{Q}} \tilde{p}_{\text{ex}}^{\mathcal{Q}} = 0. \quad (\text{VII.48})$$

En utilisant la Définition VII.6 du tenseur des contraintes $\varphi_{\mathcal{Q}}$ et (VII.47), on déduit, pour tout $\mathcal{D} \in \mathcal{D}_{\mathcal{K}}$, que

$$\frac{m_{\sigma}}{m_{\mathcal{D}}} \sum_{\mathcal{Q} \in \mathcal{Q}_{\mathcal{D}}} m_{\mathcal{Q}} \varphi_{\mathcal{Q}}(\mathcal{D}^{\mathcal{D}} \mathbb{P}_{\mathcal{C}}^{\mathcal{T}} \mathbf{u}, \delta_{\text{ex}}^{\mathcal{D}}, p_{\text{ex}}^{\mathcal{D}}) \cdot \tilde{\mathbf{n}}_{\sigma \mathcal{K}} = m_{\sigma \mathcal{K}^*} \varphi_{\mathcal{Q}_{\mathcal{K}, \mathcal{K}^*}} \cdot \tilde{\mathbf{n}}_{\sigma \mathcal{K}} + m_{\sigma \mathcal{L}^*} \varphi_{\mathcal{Q}_{\mathcal{K}, \mathcal{L}^*}} \cdot \tilde{\mathbf{n}}_{\sigma \mathcal{K}}.$$

Finalement, on obtient

$$\begin{aligned} m_{\mathcal{K}} \mathbf{div}^{\mathcal{K}}(-2\mathcal{D}_{\mathcal{D}}^{\eta, \mathcal{N}} \mathbf{e}^{\mathcal{T}} + e^{\mathcal{D}} \text{Id}) &= -2 \sum_{\mathcal{Q} \subset \mathcal{K}} \sum_{\substack{\mathfrak{s} \in \mathcal{E}_{\mathcal{Q}} \\ \mathfrak{s} \subset \partial \mathcal{K}}} \int_{\mathfrak{s}} (\eta_{\mathcal{Q}} \mathcal{D}_{\mathcal{Q}}^{\mathcal{N}} \mathbb{P}_{\mathcal{C}}^{\mathcal{T}} \mathbf{u} - \eta(z) \text{Du}(z)) \cdot \tilde{\mathbf{n}}_{\mathfrak{s} \mathcal{Q}} dz \\ &\quad + \sum_{\mathcal{Q} \subset \mathcal{K}} \sum_{\substack{\mathfrak{s} \in \mathcal{E}_{\mathcal{Q}} \\ \mathfrak{s} \subset \partial \mathcal{K}}} \int_{\mathfrak{s}} (p_{\text{ex}}^{\mathcal{Q}} - p(z)) \tilde{\mathbf{n}}_{\mathfrak{s} \mathcal{Q}} dz. \end{aligned} \quad (\text{VII.49})$$

De la même manière, on montre que pour tout $\mathcal{K}^* \in \mathfrak{M}^*$ on a

$$\begin{aligned} m_{\mathcal{K}^*} \mathbf{div}^{\mathcal{K}^*}(-2\mathcal{D}_{\mathcal{D}}^{\eta, \mathcal{N}} \mathbf{e}^{\mathcal{T}} + e^{\mathcal{D}} \text{Id}) &= -2 \sum_{\mathcal{Q} \subset \mathcal{K}^*} \sum_{\substack{\mathfrak{s} \in \mathcal{E}_{\mathcal{Q}} \\ \mathfrak{s} \subset \partial \mathcal{K}^*}} \int_{\mathfrak{s}} (\eta_{\mathcal{Q}} \mathcal{D}_{\mathcal{Q}}^{\mathcal{N}} \mathbb{P}_{\mathcal{C}}^{\mathcal{T}} \mathbf{u} - \eta(z) \text{Du}(z)) \cdot \tilde{\mathbf{n}}_{\mathfrak{s} \mathcal{Q}} dz \\ &\quad + \sum_{\mathcal{Q} \subset \mathcal{K}^*} \sum_{\substack{\mathfrak{s} \in \mathcal{E}_{\mathcal{Q}} \\ \mathfrak{s} \subset \partial \mathcal{K}^*}} \int_{\mathfrak{s}} (p_{\text{ex}}^{\mathcal{Q}} - p(z)) \tilde{\mathbf{n}}_{\mathfrak{s} \mathcal{Q}} dz. \end{aligned} \quad (\text{VII.50})$$

On définit l'erreur de consistance de la manière suivante pour tout $\mathcal{Q} \in \mathcal{Q}$, pour tout $z \in \mathcal{Q}$

$$\begin{aligned} R_{\mathcal{Q}}^{\mathbf{u}}(z) &= \eta|_{\overline{\mathcal{Q}}}(z) \text{Du}|_{\overline{\mathcal{Q}}}(z) - \eta_{\mathcal{Q}} \mathcal{D}_{\mathcal{Q}}^{\mathcal{N}} \mathbb{P}_{\mathcal{C}}^{\mathcal{T}} \mathbf{u}, \\ R_{\mathcal{Q}}^p(z) &= \mathbb{P}_m^{\mathcal{Q}} p - p|_{\overline{\mathcal{Q}}}(z), \end{aligned} \quad (\text{VII.51})$$

on note pour tout $\mathfrak{s} = \mathcal{Q}|\mathcal{Q}' \in \mathcal{E}_{\mathcal{Q}}$:

$$\mathbf{R}_{\mathfrak{s}, \mathcal{Q}}^i = -\mathbf{R}_{\mathfrak{s}, \mathcal{Q}'}^i = \frac{1}{m_{\mathfrak{s}}} \int_{\mathfrak{s}} R_{\mathcal{Q}}^i(z) \cdot \tilde{\mathbf{n}}_{\mathfrak{s} \mathcal{Q}} dz, \quad \text{pour } i = \mathbf{u}, p,$$

et les normes L^2 correspondante pour $i = \mathbf{u}, p$:

$$\|\mathbf{R}_{\mathfrak{s}, \mathcal{Q}}^i\|_2^2 = \sum_{\mathcal{Q} \in \mathcal{Q}} \sum_{\mathfrak{s} \in \mathcal{E}_{\mathcal{Q}}} m_{\mathcal{Q}} |\mathbf{R}_{\mathfrak{s}, \mathcal{Q}}^i|^2.$$

Grâce à (VII.48), on définit aussi pour tout $\mathfrak{s} = \mathcal{Q}|\mathcal{Q}' \in \mathcal{E}_{\mathcal{Q}}$:

$$\mathbf{R}_{\mathfrak{s}, \mathcal{Q}} = 2\mathbf{R}_{\mathfrak{s}, \mathcal{Q}}^{\mathbf{u}} + \mathbf{R}_{\mathfrak{s}, \mathcal{Q}}^p - \tilde{p}_{\text{ex}}^{\mathcal{Q}} \tilde{\mathbf{n}}_{\mathfrak{s} \mathcal{Q}}.$$

Grâce à (VII.49) et (VII.50), le couple $(\mathbf{e}^{\mathcal{T}}, e^{\mathcal{D}}) \in \mathbb{E}_0 \times \mathbb{R}^{\mathcal{D}}$ est solution de

$$\begin{cases} \mathbf{div}^{\mathfrak{M}}(-2\mathcal{D}_{\mathcal{D}}^{\eta, \mathcal{N}} \mathbf{e}^{\mathcal{T}} + e^{\mathcal{D}} \text{Id}) = \mathbf{R}_{\mathfrak{M}}, \\ \mathbf{div}^{\mathfrak{M}^*}(-2\mathcal{D}_{\mathcal{D}}^{\eta, \mathcal{N}} \mathbf{e}^{\mathcal{T}} + e^{\mathcal{D}} \text{Id}) = \mathbf{R}_{\mathfrak{M}^*}, \\ \mathbf{div}^{\mathcal{D}}(\mathbf{e}^{\mathcal{T}}) - \lambda d_{\mathcal{D}}^2 \underline{\Delta}^{\mathcal{D}} e^{\mathcal{D}} = R_{\mathcal{D}}, \\ \sum_{\mathcal{D} \in \mathcal{D}} m_{\mathcal{D}} e^{\mathcal{D}} = 0, \end{cases} \quad (\text{VII.52})$$

où $\mathbf{R}_{\mathfrak{M}} = (\mathbf{R}_{\mathcal{K}})_{\mathcal{K} \in \mathfrak{M}}$, $\mathbf{R}_{\mathfrak{M}^*} = (\mathbf{R}_{\mathcal{K}^*})_{\mathcal{K}^* \in \mathfrak{M}^*}$ et $R_{\mathcal{D}} = (R_{\mathcal{D}})_{\mathcal{D} \in \mathfrak{D}}$ avec :

$$\begin{aligned}\mathbf{R}_{\mathcal{K}} &= \frac{1}{m_{\mathcal{K}}} \sum_{\mathcal{Q} \subset \mathcal{K}} \sum_{\substack{\mathfrak{s} \in \mathcal{E}_{\mathcal{Q}} \\ \mathfrak{s} \subset \partial \mathcal{K}}} m_{\mathfrak{s}} \mathbf{R}_{\mathfrak{s}, \mathcal{Q}}, \quad \forall \mathcal{K} \in \mathfrak{M}, \\ \mathbf{R}_{\mathcal{K}^*} &= \frac{1}{m_{\mathcal{K}^*}} \sum_{\mathcal{Q} \subset \mathcal{K}^*} \sum_{\substack{\mathfrak{s} \in \mathcal{E}_{\mathcal{Q}} \\ \mathfrak{s} \subset \partial \mathcal{K}^*}} m_{\mathfrak{s}} \mathbf{R}_{\mathfrak{s}, \mathcal{Q}}, \quad \forall \mathcal{K}^* \in \mathfrak{M}^*, \\ R_{\mathcal{D}} &= \operatorname{div}^{\mathcal{D}}(\mathbb{P}_{\mathcal{D}}^{\tau} \mathbf{u}) - \lambda d_{\mathcal{D}}^2 \underline{\Delta}^{\mathcal{D}} p_{\text{ex}}^{\mathcal{D}}, \quad \forall \mathcal{D} \in \mathfrak{D}, \\ e^{\mathcal{Q}} &= p_{\text{ex}}^{\mathcal{Q}} - p^{\mathcal{Q}}, \quad \forall \mathcal{Q} \in \mathfrak{Q}.\end{aligned}$$

Le Théorème VII.23 implique l'existence de $\tilde{\mathbf{e}}^{\tau} \in \mathbb{E}_0$, $\tilde{e}^{\mathcal{D}} \in \mathbb{R}^{\mathfrak{D}}$ tels que :

$$\|\nabla_{\mathfrak{Q}}^{\mathcal{N}} \tilde{\mathbf{e}}^{\tau}\|_2 + \|\tilde{e}^{\mathcal{D}}\|_2 \leq C_{11} (\|\nabla_{\mathfrak{Q}}^{\mathcal{N}} \mathbf{e}^{\tau}\|_2 + \|e^{\mathcal{D}}\|_2), \quad (\text{VII.53})$$

et

$$\|\nabla_{\mathfrak{Q}}^{\mathcal{N}} \mathbf{e}^{\tau}\|_2^2 + \|e^{\mathcal{D}}\|_2^2 \leq C_{12} B(\mathbf{e}^{\tau}, e^{\mathcal{D}}; \tilde{\mathbf{e}}^{\tau}, \tilde{e}^{\mathcal{D}}). \quad (\text{VII.54})$$

Grâce à la Définition VII.22 de B et de (VII.52), on a $B(\mathbf{e}^{\tau}, e^{\mathcal{D}}; \tilde{\mathbf{e}}^{\tau}, \tilde{e}^{\mathcal{D}}) = I + T$, avec $I := \llbracket \operatorname{div}^{\tau}(-2\mathbb{D}_{\mathfrak{D}}^{\eta, \mathcal{N}} \mathbf{e}^{\tau} + e^{\mathcal{D}} Id), \tilde{\mathbf{e}}^{\tau} \rrbracket$ et $T := (\operatorname{div}^{\mathcal{D}}(\mathbf{e}^{\tau}) - \lambda d_{\mathfrak{D}}^2 \underline{\Delta}^{\mathcal{D}} e^{\mathcal{D}}, \tilde{e}^{\mathcal{D}})_{\mathfrak{D}}$.

Estimation de I . En utilisant le fait que $\tilde{\mathbf{e}}^{\tau} \in \mathbb{E}_0$ et la définition de I , on a

$$I = \sum_{\mathcal{K} \in \mathfrak{M}} \sum_{\mathcal{Q} \subset \mathcal{K}} \sum_{\substack{\mathfrak{s} \in \mathcal{E}_{\mathcal{Q}} \\ \mathfrak{s} \subset \partial \mathcal{K}}} m_{\mathfrak{s}} \mathbf{R}_{\mathfrak{s}, \mathcal{Q}} \cdot \tilde{\mathbf{e}}_{\mathcal{K}} + \sum_{\mathcal{K}^* \in \mathfrak{M}^* \cup \partial \mathfrak{M}^*} \sum_{\mathcal{Q} \subset \mathcal{K}^*} \sum_{\substack{\mathfrak{s} \in \mathcal{E}_{\mathcal{Q}} \\ \mathfrak{s} \subset \partial \mathcal{K}^*}} m_{\mathfrak{s}} \mathbf{R}_{\mathfrak{s}, \mathcal{Q}} \cdot \tilde{\mathbf{e}}_{\mathcal{K}^*}.$$

En réorganisant la somme sur les diamants $\mathcal{D} \in \mathfrak{D}$, on obtient

$$\begin{aligned}I &= \sum_{\mathcal{D} \in \mathfrak{D}} \left(m_{\sigma_{\mathcal{K}}} \left(\mathbf{R}_{\sigma_{\mathcal{K}}, \mathcal{Q}_{\mathcal{K}}, \mathcal{K}^*} \cdot \tilde{\mathbf{e}}_{\mathcal{K}^*} + \mathbf{R}_{\sigma_{\mathcal{K}}, \mathcal{Q}_{\mathcal{K}}, \mathcal{L}^*} \cdot \tilde{\mathbf{e}}_{\mathcal{L}^*} \right) \right. \\ &\quad + m_{\sigma_{\mathcal{L}}} \left(\mathbf{R}_{\sigma_{\mathcal{L}}, \mathcal{Q}_{\mathcal{L}}, \mathcal{K}^*} \cdot \tilde{\mathbf{e}}_{\mathcal{K}^*} + \mathbf{R}_{\sigma_{\mathcal{L}}, \mathcal{Q}_{\mathcal{L}}, \mathcal{L}^*} \cdot \tilde{\mathbf{e}}_{\mathcal{L}^*} \right) \\ &\quad + m_{\sigma_{\mathcal{K}^*}} \left(\mathbf{R}_{\sigma_{\mathcal{K}^*}, \mathcal{Q}_{\mathcal{K}}, \mathcal{K}^*} \cdot \tilde{\mathbf{e}}_{\mathcal{K}} + \mathbf{R}_{\sigma_{\mathcal{K}^*}, \mathcal{Q}_{\mathcal{L}}, \mathcal{K}^*} \cdot \tilde{\mathbf{e}}_{\mathcal{L}} \right) \\ &\quad \left. + m_{\sigma_{\mathcal{L}^*}} \left(\mathbf{R}_{\sigma_{\mathcal{L}^*}, \mathcal{Q}_{\mathcal{K}}, \mathcal{L}^*} \cdot \tilde{\mathbf{e}}_{\mathcal{K}} + \mathbf{R}_{\sigma_{\mathcal{L}^*}, \mathcal{Q}_{\mathcal{L}}, \mathcal{L}^*} \cdot \tilde{\mathbf{e}}_{\mathcal{L}} \right) \right). \quad (\text{VII.55})\end{aligned}$$

On remarque que $\mathbf{R}_{\sigma_{\mathcal{K}}, \mathcal{Q}_{\mathcal{K}}, \mathcal{K}^*} = -\mathbf{R}_{\sigma_{\mathcal{K}}, \mathcal{Q}_{\mathcal{K}}, \mathcal{L}^*}$, ainsi on a pour le premier terme de (VII.55)

$$\begin{aligned}&m_{\sigma_{\mathcal{K}}} \left(\mathbf{R}_{\sigma_{\mathcal{K}}, \mathcal{Q}_{\mathcal{K}}, \mathcal{K}^*} \cdot \tilde{\mathbf{e}}_{\mathcal{K}^*} + \mathbf{R}_{\sigma_{\mathcal{K}}, \mathcal{Q}_{\mathcal{K}}, \mathcal{L}^*} \cdot \tilde{\mathbf{e}}_{\mathcal{L}^*} \right) \\ &= -m_{\mathcal{Q}_{\mathcal{K}}, \mathcal{K}^*} \frac{2}{\sin(\alpha_{\mathcal{K}})} \mathbf{R}_{\sigma_{\mathcal{K}}, \mathcal{Q}_{\mathcal{K}}, \mathcal{K}^*} \cdot \frac{\tilde{\mathbf{e}}_{\mathcal{L}^*} - \tilde{\mathbf{e}}_{\mathcal{K}^*}}{m_{\sigma}} + m_{\mathcal{Q}_{\mathcal{K}}, \mathcal{L}^*} \frac{2}{\sin(\alpha_{\mathcal{K}})} \mathbf{R}_{\sigma_{\mathcal{K}}, \mathcal{Q}_{\mathcal{K}}, \mathcal{L}^*} \cdot \frac{\tilde{\mathbf{e}}_{\mathcal{L}^*} - \tilde{\mathbf{e}}_{\mathcal{K}^*}}{m_{\sigma}}.\end{aligned}$$

La Définition IV.1 du gradient discret implique que

$$\begin{aligned}&m_{\sigma_{\mathcal{K}}} \left(\mathbf{R}_{\sigma_{\mathcal{K}}, \mathcal{Q}_{\mathcal{K}}, \mathcal{K}^*} \cdot \tilde{\mathbf{e}}_{\mathcal{K}^*} + \mathbf{R}_{\sigma_{\mathcal{K}}, \mathcal{Q}_{\mathcal{K}}, \mathcal{L}^*} \cdot \tilde{\mathbf{e}}_{\mathcal{L}^*} \right) \\ &= -\frac{2}{\sin(\alpha_{\mathcal{K}})} m_{\mathcal{Q}_{\mathcal{K}}, \mathcal{K}^*} \mathbf{R}_{\sigma_{\mathcal{K}}, \mathcal{Q}_{\mathcal{K}}, \mathcal{K}^*} \cdot (\nabla^{\mathcal{D}} \tilde{\mathbf{e}}^{\tau} \cdot \vec{\tau}_{\mathcal{K}^*, \mathcal{L}^*}) + \frac{2}{\sin(\alpha_{\mathcal{K}})} m_{\mathcal{Q}_{\mathcal{K}}, \mathcal{L}^*} \mathbf{R}_{\sigma_{\mathcal{K}}, \mathcal{Q}_{\mathcal{K}}, \mathcal{L}^*} \cdot (\nabla^{\mathcal{D}} \tilde{\mathbf{e}}^{\tau} \cdot \vec{\tau}_{\mathcal{K}^*, \mathcal{L}^*}).\end{aligned}$$

De plus, on remarque que $\mathbf{R}_{\sigma_{\mathcal{K}^*}, \mathcal{Q}_{\mathcal{K}}, \mathcal{K}^*} = -\mathbf{R}_{\sigma_{\mathcal{K}^*}, \mathcal{Q}_{\mathcal{L}}, \mathcal{K}^*}$, ainsi on a pour le troisième terme de (VII.55)

$$m_{\sigma_{\mathcal{K}^*}} \left(\mathbf{R}_{\sigma_{\mathcal{K}^*}, \mathcal{Q}_{\mathcal{K}}, \mathcal{K}^*} \cdot \tilde{\mathbf{e}}_{\mathcal{K}} + \mathbf{R}_{\sigma_{\mathcal{K}^*}, \mathcal{Q}_{\mathcal{L}}, \mathcal{K}^*} \cdot \tilde{\mathbf{e}}_{\mathcal{L}} \right) = m_{\sigma_{\mathcal{K}^*}} \mathbf{R}_{\sigma_{\mathcal{K}^*}, \mathcal{Q}_{\mathcal{K}}, \mathcal{K}^*} \cdot (\tilde{\mathbf{e}}_{\mathcal{K}} - \tilde{\mathbf{e}}_{\mathcal{L}}).$$

La Définition IV.1 du gradient discret implique de nouveau que

$$\begin{aligned}m_{\sigma_{\mathcal{K}^*}} \left(\mathbf{R}_{\sigma_{\mathcal{K}^*}, \mathcal{Q}_{\mathcal{K}}, \mathcal{K}^*} \cdot \tilde{\mathbf{e}}_{\mathcal{K}} + \mathbf{R}_{\sigma_{\mathcal{K}^*}, \mathcal{Q}_{\mathcal{L}}, \mathcal{K}^*} \cdot \tilde{\mathbf{e}}_{\mathcal{L}} \right) &= -m_{\sigma_{\mathcal{K}^*}} m_{\sigma^*} \mathbf{R}_{\sigma_{\mathcal{K}^*}, \mathcal{Q}_{\mathcal{K}}, \mathcal{K}^*} \cdot (\nabla^{\mathcal{D}} \tilde{\mathbf{e}}^{\tau} \cdot \vec{\tau}_{\mathcal{K}, \mathcal{L}}) \\ &= -\frac{2m_{\mathcal{Q}_{\mathcal{K}}, \mathcal{K}^*}}{\sin(\alpha_{\mathcal{K}})} \frac{m_{\sigma^*}}{m_{\sigma_{\mathcal{K}}}} \mathbf{R}_{\sigma_{\mathcal{K}^*}, \mathcal{Q}_{\mathcal{K}}, \mathcal{K}^*} \cdot (\nabla^{\mathcal{D}} \tilde{\mathbf{e}}^{\tau} \cdot \vec{\tau}_{\mathcal{K}, \mathcal{L}}).\end{aligned}$$

En faisant de même pour les autres, une première estimation donne

$$I \leq C \sum_{\mathcal{D} \in \mathcal{D}} \sum_{\mathcal{Q} \in \mathcal{Q}_{\mathcal{D}}} \sum_{\mathfrak{s} \in \mathcal{E}_{\mathcal{Q}}} m_{\mathcal{Q}} |\mathbf{R}_{\mathfrak{s}, \mathcal{Q}}| \|\nabla^{\mathcal{D}} \tilde{\mathbf{e}}^{\mathcal{T}}\|_{\mathcal{F}},$$

Grâce à l'inégalité de Cauchy-Schwarz et au Lemme VII.20, on obtient

$$I \leq C \|\mathbf{R}_{\mathfrak{s}, \Omega}\|_2 \|\nabla_{\Omega}^{\mathcal{N}} \tilde{\mathbf{e}}^{\mathcal{T}}\|_2. \quad (\text{VII.56})$$

Estimation de T . Tout d'abord, on note $T_1 := -\lambda(d_{\mathcal{D}}^2 \Delta^{\mathcal{D}} p_{\text{ex}}^{\Omega}, \tilde{e}^{\mathcal{D}})_{\mathcal{D}}$. En réorganisant la somme sur les côtés des diamants $\mathfrak{s} \in \mathfrak{S}$, on a

$$T_1 = \lambda \sum_{\mathfrak{s}=\mathcal{Q} | \mathcal{Q}'=\mathcal{D} | \mathcal{D}' \in \mathfrak{S}} (d_{\mathcal{D}}^2 + d_{\mathcal{D}'}^2) (p_{\text{ex}}^{\mathcal{Q}'} - p_{\text{ex}}^{\mathcal{Q}}) (\tilde{e}^{\mathcal{D}'} - \tilde{e}^{\mathcal{D}}).$$

L'inégalité de Cauchy-Schwarz et la semi-norme $|\cdot|_h$ (IV.15) donnent

$$\begin{aligned} |T_1| &\leq \lambda \left(\sum_{\mathfrak{s}=\mathcal{Q} | \mathcal{Q}'=\mathcal{D} | \mathcal{D}' \in \mathfrak{S}} (d_{\mathcal{D}}^2 + d_{\mathcal{D}'}^2) (p_{\text{ex}}^{\mathcal{Q}'} - p_{\text{ex}}^{\mathcal{Q}})^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{\mathfrak{s}=\mathcal{D} | \mathcal{D}' \in \mathfrak{S}} (d_{\mathcal{D}}^2 + d_{\mathcal{D}'}^2) (\tilde{e}^{\mathcal{D}'} - \tilde{e}^{\mathcal{D}})^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq 2\text{size}(\mathcal{T}) \lambda |\tilde{e}^{\mathcal{D}}|_h \left(\sum_{\mathfrak{s}=\mathcal{Q} | \mathcal{Q}'=\mathcal{D} | \mathcal{D}' \in \mathfrak{S}} (p_{\text{ex}}^{\mathcal{Q}'} - p_{\text{ex}}^{\mathcal{Q}})^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

On applique le Lemme IV.13 pour obtenir

$$|T_1| \leq C_2 2\text{size}(\mathcal{T}) \lambda \|\tilde{e}^{\mathcal{D}}\|_2 \left(\sum_{\mathfrak{s}=\mathcal{Q} | \mathcal{Q}'=\mathcal{D} | \mathcal{D}' \in \mathfrak{S}} (p_{\text{ex}}^{\mathcal{Q}'} - p_{\text{ex}}^{\mathcal{Q}})^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

On a ainsi $T = (\text{div}^{\mathcal{D}}(\mathbb{P}_{\mathcal{C}}^{\mathcal{T}} \mathbf{u}), \tilde{e}^{\mathcal{D}})_{\mathcal{D}} + T_1$ et on en déduit l'estimation suivante pour le terme T :

$$|T| \leq \|\tilde{e}^{\mathcal{D}}\|_2 \left(2\text{size}(\mathcal{T}) \lambda C_2 \left(\sum_{\mathfrak{s}=\mathcal{Q} | \mathcal{Q}'=\mathcal{D} | \mathcal{D}' \in \mathfrak{S}} (p_{\text{ex}}^{\mathcal{Q}'} - p_{\text{ex}}^{\mathcal{Q}})^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \|\text{div}^{\mathcal{D}} \mathbb{P}_{\mathcal{C}}^{\mathcal{T}} \mathbf{u}\|_2 \right). \quad (\text{VII.57})$$

En combinant (VII.56) et (VII.57) et en utilisant le fait que $\|\tilde{e}^{\mathcal{D}}\|_2 \leq \|\tilde{e}^{\Omega}\|_2$, (VII.54) devient

$$\begin{aligned} \|\nabla_{\Omega}^{\mathcal{N}} \mathbf{e}^{\mathcal{T}}\|_2^2 + \|e^{\Omega}\|_2^2 &\leq C_{12} C \|\nabla_{\Omega}^{\mathcal{N}} \tilde{\mathbf{e}}^{\mathcal{T}}\|_2 \|\mathbf{R}_{\mathfrak{s}, \Omega}\|_2 + C_{12} \|\tilde{e}^{\Omega}\|_2 \|\text{div}^{\mathcal{D}} \mathbb{P}_{\mathcal{C}}^{\mathcal{T}} \mathbf{u}\|_2 \\ &\quad + C_{12} 2\text{size}(\mathcal{T}) \lambda C_2 \|\tilde{e}^{\Omega}\|_2 \left(\sum_{\mathfrak{s}=\mathcal{Q} | \mathcal{Q}'=\mathcal{D} | \mathcal{D}' \in \mathfrak{S}} (p_{\text{ex}}^{\mathcal{Q}'} - p_{\text{ex}}^{\mathcal{Q}})^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Finalement, (VII.53) conduit à

$$\begin{aligned} \|\nabla_{\Omega}^{\mathcal{N}} \mathbf{e}^{\mathcal{T}}\|_2^2 + \|e^{\Omega}\|_2^2 &\leq \tilde{C}_1 (\|\nabla_{\Omega}^{\mathcal{N}} \mathbf{e}^{\mathcal{T}}\|_2 + \|e^{\Omega}\|_2) (\|\mathbf{R}_{\mathfrak{s}, \Omega}\|_2 + \|\text{div}^{\mathcal{D}} \mathbb{P}_{\mathcal{C}}^{\mathcal{T}} \mathbf{u}\|_2) \\ &\quad + \tilde{C}_2 \text{size}(\mathcal{T}) (\|\nabla_{\Omega}^{\mathcal{N}} \mathbf{e}^{\mathcal{T}}\|_2 + \|e^{\Omega}\|_2) \left(\sum_{\mathfrak{s}=\mathcal{Q} | \mathcal{Q}'=\mathcal{D} | \mathcal{D}' \in \mathfrak{S}} (p_{\text{ex}}^{\mathcal{Q}'} - p_{\text{ex}}^{\mathcal{Q}})^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \end{aligned} \quad (\text{VII.58})$$

où $\tilde{C}_1 = C_{12} C_{11} \max(2\text{reg}(\mathcal{T})(1 + \text{reg}(\mathcal{T})), 1)$ et $\tilde{C}_2 = 2C_{12} C_{11} \lambda C_2$. Il reste à montrer les estimations des erreurs de consistance.

VII.6.1 Erreur de consistance en pression

Lemme VII.26

Il existe deux constantes $C_{14}, C_{15} > 0$, dépendant uniquement de $\text{reg}(\mathcal{T})$, telles que pour tout $p \in H^1(\Omega)$ et pour tout $\mathcal{D} \in \mathcal{D}$

$$\sum_{\mathcal{Q} \in \mathcal{Q}_{\mathcal{D}}} m_{\mathcal{Q}} \sum_{\mathfrak{s} \in \mathcal{E}_{\mathcal{Q}}} |\mathbf{R}_{\mathfrak{s}, \mathcal{Q}}^p|^2 \leq C_{14} d_{\mathcal{D}}^2 \sum_{\mathcal{Q} \in \mathcal{Q}_{\mathcal{D}}} \int_{\mathcal{Q}} |\nabla p(z)|^2 dz,$$

et

$$\|\mathbf{R}_{\Omega}^p\|_2^2 \leq C_{15} \text{size}(\mathcal{T})^2 \|p\|_{H^1(\Omega)}^2.$$

Démonstration : On rappelle la définition de $\mathbf{R}_{\mathfrak{s},\mathfrak{Q}}^p = \frac{1}{m_{\mathfrak{s}}} \int_{\mathfrak{s}} (\mathbb{P}_m^{\mathfrak{Q}} p - p|_{\overline{\mathfrak{Q}}}(z)) \mathbf{n}_{\mathfrak{s},\mathfrak{Q}} dz$, pour $\mathfrak{s} \in \mathcal{E}_{\mathfrak{Q}}$, ainsi on a

$$\sum_{\mathfrak{Q} \in \mathfrak{Q}_{\mathcal{T}}} \sum_{\mathfrak{s} \in \mathcal{E}_{\mathfrak{Q}}} m_{\mathfrak{Q}} |\mathbf{R}_{\mathfrak{s},\mathfrak{Q}}^p|^2 \leq \sum_{\mathfrak{Q} \in \mathfrak{Q}_{\mathcal{T}}} \sum_{\mathfrak{s} \in \mathcal{E}_{\mathfrak{Q}}} m_{\mathfrak{Q}} \left| \frac{1}{m_{\mathfrak{s}}} \int_{\mathfrak{s}} (\mathbb{P}_m^{\mathfrak{Q}} p - p(z)) dz \right|^2.$$

On applique le Lemme I.12 à un quart de diamant \mathfrak{Q} et à un de ses côtés \mathfrak{s} , en utilisant le fait que $\frac{d_{\mathfrak{Q}}^3}{m_{\mathfrak{s}} m_{\mathfrak{Q}}} \leq \text{reg}(\mathcal{T})^3$, on obtient

$$\left| \frac{1}{m_{\mathfrak{s}}} \int_{\mathfrak{s}} (\mathbb{P}_m^{\mathfrak{Q}} p - p(z)) dz \right|^2 \leq C_1 \frac{d_{\mathfrak{Q}}^3}{m_{\mathfrak{s}} m_{\mathfrak{Q}}} \int_{\mathfrak{Q}} |\nabla p|^2 dz \leq C_1 \text{reg}(\mathcal{T})^3 \int_{\mathfrak{Q}} |\nabla p|^2 dz.$$

On en déduit que

$$\sum_{\mathfrak{Q} \in \mathfrak{Q}_{\mathcal{T}}} \sum_{\mathfrak{s} \in \mathcal{E}_{\mathfrak{Q}}} m_{\mathfrak{Q}} |\mathbf{R}_{\mathfrak{s},\mathfrak{Q}}^p|^2 \leq C_1 \text{reg}(\mathcal{T})^3 d_{\mathfrak{D}}^2 \sum_{\mathfrak{Q} \in \mathfrak{Q}_{\mathcal{T}}} \int_{\mathfrak{Q}} |\nabla p(z)|^2 dz.$$

Ceci conclut la première estimation avec $C_{14} = C_1 \text{reg}(\mathcal{T})^3$. Pour la seconde, on ajoute et soustrait $\frac{1}{m_{\mathfrak{s}}} \int_{\mathfrak{s}} p(x) dx$, dont la contribution est nulle, à $R_{\mathfrak{Q}}^p(z) = p(z) - \mathbb{P}_m^{\mathfrak{Q}} p$ pour obtenir

$$\int_{\mathfrak{Q}} (p(z) - \mathbb{P}_m^{\mathfrak{Q}} p)^2 dz \leq 2 \int_{\mathfrak{Q}} \left| \frac{1}{m_{\mathfrak{s}}} \int_{\mathfrak{s}} (p(z) - p(x)) dx dz \right|^2 + 2m_{\mathfrak{Q}} \left| \frac{1}{m_{\mathfrak{s}}} \int_{\mathfrak{s}} (\mathbb{P}_m^{\mathfrak{Q}} p - p(z)) dz \right|^2.$$

On applique ensuite l'inégalité de Jensen

$$\int_{\mathfrak{Q}} (p(z) - \mathbb{P}_m^{\mathfrak{Q}} p)^2 dz \leq 4m_{\mathfrak{Q}} \frac{1}{m_{\mathfrak{Q}} m_{\mathfrak{s}}} \int_{\mathfrak{Q}} \int_{\mathfrak{s}} (p(z) - p(x))^2 dx dz.$$

On applique le Lemme I.12 à un quart de diamant \mathfrak{Q} et à un de ses côtés \mathfrak{s} , en utilisant le fait que $\frac{d_{\mathfrak{Q}}^3}{m_{\mathfrak{s}} m_{\mathfrak{Q}}} \leq \text{reg}(\mathcal{T})^3$, on obtient

$$\int_{\mathfrak{Q}} (p(z) - \mathbb{P}_m^{\mathfrak{Q}} p)^2 dz \leq 4C_1 \text{reg}(\mathcal{T})^3 \text{size}(\mathcal{T})^2 \int_{\mathfrak{Q}} |\nabla p|^2 dz,$$

ceci conclut le résultat avec $C_{15} = 4C_1 \text{reg}(\mathcal{T})^3$. ■

VII.6.2 Erreur de consistance en vitesse

Propriétés de la projection centrée

En utilisant les formules de Taylor usuelles sur chaque quart de diamant \mathfrak{Q} (voir [BH08], pour plus de détail), on peut facilement montrer le résultat suivant.

Lemme VII.27

Il existe deux constantes $C_{16}, C_{17} > 0$, dépendant uniquement de $\text{reg}(\mathcal{T})$, telles que pour toute fonction \mathbf{v} dans $(H^2(\mathfrak{Q}))^2$, on a

$$\|\mathbf{v} - \mathbb{P}_{\mathfrak{c}}^{\mathcal{T}} \mathbf{v}\|_2 \leq C_{16} \text{size}(\mathcal{T}) \|\mathbf{v}\|_{(H^2(\mathfrak{Q}))^2} \quad \text{et} \quad \|\nabla_{\mathfrak{Q}}^{\mathcal{N}} \mathbb{P}_{\mathfrak{c}}^{\mathcal{T}} \mathbf{v}\|_2 \leq C_{17} \|\mathbf{v}\|_{(H^2(\mathfrak{Q}))^2}.$$

Définition VII.28

On définit la projection $\mathbb{P}_{\mathfrak{c}}^{\mathfrak{Q}} \mathbf{u}$ de \mathbf{u} sur les quarts de diamant comme suit. Pour chaque quart de diamant $\mathfrak{Q} \in \mathfrak{Q}$, la restriction de $\mathbb{P}_{\mathfrak{c}}^{\mathfrak{Q}} \mathbf{u}$ sur le triangle \mathfrak{Q} est l'unique fonction affine $\mathbb{P}_{\mathfrak{c}}^{\mathfrak{Q}} \mathbf{u}$ qui coïncide avec \mathbf{u} aux milieux des demi-arêtes $\mathfrak{s} \in \mathcal{E}_{\mathfrak{Q}}$ et dont la valeur au milieu du troisième côté de \mathfrak{Q} vaut la moyenne des valeurs de \mathbf{u} aux deux extrémités du côté. Il faut noter que cette définition a un sens car $\mathbf{u}|_{\mathfrak{Q}} \in (H^2(\mathfrak{Q}))^2 \subset (C^0(\overline{\mathfrak{Q}}))^2$. Par exemple, dans le cas du quart de diamant $\mathfrak{Q} = \mathfrak{Q}_{\mathcal{K},\mathcal{K}^}$ (voir la Figure VII.6), cela s'écrit :*

$$\mathbb{P}_{\mathfrak{c}}^{\mathfrak{Q}} \mathbf{u}(x_{\sigma_{\mathcal{K}}}) = \mathbf{u}(x_{\sigma_{\mathcal{K}}}), \quad \mathbb{P}_{\mathfrak{c}}^{\mathfrak{Q}} \mathbf{u}(x_{\sigma_{\mathcal{K}^*}}) = \mathbf{u}(x_{\sigma_{\mathcal{K}^*}}), \quad \mathbb{P}_{\mathfrak{c}}^{\mathfrak{Q}} \mathbf{u}\left(\frac{x_{\mathcal{K}} + x_{\mathcal{K}^*}}{2}\right) = \frac{\mathbf{u}(x_{\mathcal{K}}) + \mathbf{u}(x_{\mathcal{K}^*})}{2}.$$

Les inégalités (VII.2) et (VII.3) sur la viscosité donnent

$$\|R_{\mathcal{Q}}^{\mathbf{u},\eta}(z)\|_{\mathcal{F}}^2 \leq \frac{2C_{\eta}^2}{m_{\mathcal{Q}}} d_{\mathcal{D}}^2 \int_{\mathcal{Q}} \|\mathbf{Du}(x)\|_{\mathcal{F}}^2 dx + \frac{2\overline{C}_{\eta}^2}{m_{\mathcal{Q}}} \int_{\mathcal{Q}} \|\mathbf{Du}(z) - \mathbf{Du}(x)\|_{\mathcal{F}}^2 dx. \quad (\text{VII.60})$$

L'inégalité de Jensen implique

$$m_{\mathcal{Q}} |\mathbf{R}_{\mathbf{s},\mathcal{Q}}^{\mathbf{u},\eta}|^2 \leq \frac{m_{\mathcal{Q}}}{m_{\mathbf{s}}} \int_{\mathbf{s}} \|R_{\mathcal{Q}}^{\mathbf{u},\eta}(z)\|_{\mathcal{F}}^2 dz. \quad (\text{VII.61})$$

En remplaçant (VII.60) dans (VII.61), il vient

$$m_{\mathcal{Q}} |\mathbf{R}_{\mathbf{s},\mathcal{Q}}^{\mathbf{u},\eta}|^2 \leq d_{\mathcal{D}}^2 2C_{\eta}^2 \int_{\mathcal{Q}} \|\mathbf{Du}(x)\|_{\mathcal{F}}^2 dx + \frac{2\overline{C}_{\eta}^2}{m_{\mathbf{s}}} \int_{\mathbf{s}} \int_{\mathcal{Q}} \|\mathbf{Du}(z) - \mathbf{Du}(x)\|_{\mathcal{F}}^2 dx dz.$$

Pour la seconde intégrale, on applique le Lemme I.12 à un quart de diamant \mathcal{Q} et à un de ses côtés \mathbf{s} pour obtenir

$$\frac{1}{m_{\mathbf{s}}} \int_{\mathbf{s}} \int_{\mathcal{Q}} \|\mathbf{Du}(z) - \mathbf{Du}(x)\|_{\mathcal{F}}^2 dx dz \leq C_1 \frac{d_{\mathcal{Q}}^3}{m_{\mathbf{s}}} \int_{\mathcal{Q}} |\nabla \mathbf{Du}(y)|^2 dy.$$

Comme de plus on a $\frac{d_{\mathcal{Q}}^3}{m_{\mathbf{s}}} \leq \text{reg}(\mathcal{T}) d_{\mathcal{D}}^2$, on obtient que

$$m_{\mathcal{Q}} |\mathbf{R}_{\mathbf{s},\mathcal{Q}}^{\mathbf{u},\eta}|^2 \leq d_{\mathcal{D}}^2 2C_{\eta}^2 \int_{\mathcal{Q}} \|\mathbf{Du}(x)\|_{\mathcal{F}}^2 dx + 2\overline{C}_{\eta}^2 C_1 \text{reg}(\mathcal{T}) d_{\mathcal{D}}^2 \int_{\mathcal{Q}} |\nabla \mathbf{Du}(y)|^2 dy.$$

Finalement, on déduit le résultat avec $C_{19} = \max(2C_{\eta}^2, 2\overline{C}_{\eta}^2 C_1 \text{reg}(\mathcal{T}))$. ■

Approximation du tenseur des taux de déformation

Définition VII.31

On définit $R^{\mathcal{D}} \in \mathcal{M}_{2,4}(\mathbb{R})$, pour tout $\mathcal{D} \in \mathfrak{D}$, comme suit

$$R^{\mathcal{D}} = \begin{pmatrix} m_{\sigma_{\mathcal{K}}} (2(\mathbf{R}_{\sigma_{\mathcal{K}},\mathcal{Q}_{\mathcal{K},\mathcal{L}^*}}^{\mathbf{u},\eta} - \mathbf{R}_{\sigma_{\mathcal{K}},\mathcal{Q}_{\mathcal{K},\mathcal{K}^*}}^{\mathbf{u},\eta}) + \mathbf{R}_{\sigma_{\mathcal{K}},\mathcal{Q}_{\mathcal{K},\mathcal{L}^*}}^p - \mathbf{R}_{\sigma_{\mathcal{K}},\mathcal{Q}_{\mathcal{K},\mathcal{K}^*}}^p) \\ m_{\sigma_{\mathcal{L}}} (2(\mathbf{R}_{\sigma_{\mathcal{L}},\mathcal{Q}_{\mathcal{L},\mathcal{L}^*}}^{\mathbf{u},\eta} - \mathbf{R}_{\sigma_{\mathcal{L}},\mathcal{Q}_{\mathcal{L},\mathcal{K}^*}}^{\mathbf{u},\eta}) + \mathbf{R}_{\sigma_{\mathcal{L}},\mathcal{Q}_{\mathcal{L},\mathcal{L}^*}}^p - \mathbf{R}_{\sigma_{\mathcal{L}},\mathcal{Q}_{\mathcal{L},\mathcal{K}^*}}^p) \\ m_{\sigma_{\mathcal{K}^*}} (2(\mathbf{R}_{\sigma_{\mathcal{K}^*},\mathcal{Q}_{\mathcal{L},\mathcal{K}^*}}^{\mathbf{u},\eta} - \mathbf{R}_{\sigma_{\mathcal{K}^*},\mathcal{Q}_{\mathcal{K},\mathcal{K}^*}}^{\mathbf{u},\eta}) + \mathbf{R}_{\sigma_{\mathcal{K}^*},\mathcal{Q}_{\mathcal{L},\mathcal{K}^*}}^p - \mathbf{R}_{\sigma_{\mathcal{K}^*},\mathcal{Q}_{\mathcal{K},\mathcal{K}^*}}^p) \\ m_{\sigma_{\mathcal{L}^*}} (2(\mathbf{R}_{\sigma_{\mathcal{L}^*},\mathcal{Q}_{\mathcal{L},\mathcal{L}^*}}^{\mathbf{u},\eta} - \mathbf{R}_{\sigma_{\mathcal{L}^*},\mathcal{Q}_{\mathcal{K},\mathcal{L}^*}}^{\mathbf{u},\eta}) + \mathbf{R}_{\sigma_{\mathcal{L}^*},\mathcal{Q}_{\mathcal{L},\mathcal{L}^*}}^p - \mathbf{R}_{\sigma_{\mathcal{L}^*},\mathcal{Q}_{\mathcal{K},\mathcal{L}^*}}^p) \end{pmatrix},$$

avec les erreurs de consistance définies par (VII.51) et (VII.59).

On introduit une nouvelle norme pour tout $\mathcal{D} \in \mathfrak{D}$

$$\|A\|_{\Omega_{\mathcal{D}}}^2 = \sum_{\mathcal{Q} \in \Omega_{\mathcal{D}}} \|A\|_{L^2(\mathcal{Q})}^2, \quad \forall A|_{\mathcal{Q}} \in L^2(\mathcal{Q}, \mathcal{M}_2(\mathbb{R})), \text{ pour tout } \mathcal{Q} \in \Omega_{\mathcal{D}}.$$

Proposition VII.32

Il existe une constante $C_{20} > 0$, dépendant uniquement de \underline{C}_{η} , \overline{C}_{η} , C_{η} et $\text{reg}(\mathcal{T})$, telle que pour tout $\mathcal{D} \in \mathfrak{D}$, et tout $\delta^{\mathcal{D}}$ dans $\mathcal{M}_{4,2}(\mathbb{R})$, on a

$$|\text{Tr}({}^t \delta^{\mathcal{D}} R^{\mathcal{D}})|^2 \leq C_{20} \left(\sum_{\mathcal{Q} \in \Omega_{\mathcal{D}}} m_{\mathcal{Q}} \|B_{\mathcal{Q}} \delta^{\mathcal{D}}\|_{\mathcal{F}}^2 \right) d_{\mathcal{D}}^2 \sum_{\mathcal{Q} \in \Omega_{\mathcal{D}}} \int_{\mathcal{Q}} (\|\nabla \mathbf{u}(z)\|_{\mathcal{F}}^2 + |\nabla^2 \mathbf{u}(z)|^2 + |\nabla p(z)|^2) dz.$$

Démonstration : On calcule $\text{Tr}({}^t \delta^{\mathcal{D}} R^{\mathcal{D}})$:

$$\begin{aligned} \text{Tr}({}^t \delta^{\mathcal{D}} R^{\mathcal{D}}) &= m_{\sigma_{\mathcal{K}}} (2(\mathbf{R}_{\sigma_{\mathcal{K}},\mathcal{Q}_{\mathcal{K},\mathcal{L}^*}}^{\mathbf{u},\eta} - \mathbf{R}_{\sigma_{\mathcal{K}},\mathcal{Q}_{\mathcal{K},\mathcal{K}^*}}^{\mathbf{u},\eta}) + \mathbf{R}_{\sigma_{\mathcal{K}},\mathcal{Q}_{\mathcal{K},\mathcal{L}^*}}^p - \mathbf{R}_{\sigma_{\mathcal{K}},\mathcal{Q}_{\mathcal{K},\mathcal{K}^*}}^p) \cdot \delta_{\mathcal{K}} \\ &\quad + m_{\sigma_{\mathcal{L}}} (2(\mathbf{R}_{\sigma_{\mathcal{L}},\mathcal{Q}_{\mathcal{L},\mathcal{L}^*}}^{\mathbf{u},\eta} - \mathbf{R}_{\sigma_{\mathcal{L}},\mathcal{Q}_{\mathcal{L},\mathcal{K}^*}}^{\mathbf{u},\eta}) + \mathbf{R}_{\sigma_{\mathcal{L}},\mathcal{Q}_{\mathcal{L},\mathcal{L}^*}}^p - \mathbf{R}_{\sigma_{\mathcal{L}},\mathcal{Q}_{\mathcal{L},\mathcal{K}^*}}^p) \cdot \delta_{\mathcal{L}} \\ &\quad + m_{\sigma_{\mathcal{K}^*}} (2(\mathbf{R}_{\sigma_{\mathcal{K}^*},\mathcal{Q}_{\mathcal{L},\mathcal{K}^*}}^{\mathbf{u},\eta} - \mathbf{R}_{\sigma_{\mathcal{K}^*},\mathcal{Q}_{\mathcal{K},\mathcal{K}^*}}^{\mathbf{u},\eta}) + \mathbf{R}_{\sigma_{\mathcal{K}^*},\mathcal{Q}_{\mathcal{L},\mathcal{K}^*}}^p - \mathbf{R}_{\sigma_{\mathcal{K}^*},\mathcal{Q}_{\mathcal{K},\mathcal{K}^*}}^p) \cdot \delta_{\mathcal{K}^*} \\ &\quad + m_{\sigma_{\mathcal{L}^*}} (2(\mathbf{R}_{\sigma_{\mathcal{L}^*},\mathcal{Q}_{\mathcal{L},\mathcal{L}^*}}^{\mathbf{u},\eta} - \mathbf{R}_{\sigma_{\mathcal{L}^*},\mathcal{Q}_{\mathcal{K},\mathcal{L}^*}}^{\mathbf{u},\eta}) + \mathbf{R}_{\sigma_{\mathcal{L}^*},\mathcal{Q}_{\mathcal{L},\mathcal{L}^*}}^p - \mathbf{R}_{\sigma_{\mathcal{L}^*},\mathcal{Q}_{\mathcal{K},\mathcal{L}^*}}^p) \cdot \delta_{\mathcal{L}^*}. \end{aligned}$$

On obtient donc une première estimation

$$|\mathrm{Tr}(\widehat{\delta^\mathcal{D}} R^\mathcal{D})| \leq \sum_{\mathcal{Q} \in \mathfrak{Q}_\mathcal{D}} m_\mathcal{Q} \|B_\mathcal{Q} \widehat{\delta^\mathcal{D}}\|_\mathcal{F} \sum_{s \in \mathcal{E}_\mathcal{Q}} (|\mathbf{R}_{s,\mathcal{Q}}^{\mathbf{u},\eta}| + |\mathbf{R}_{s,\mathcal{Q}}^p|).$$

Puis l'inégalité de Cauchy-Schwarz implique que

$$|\mathrm{Tr}({}^t \delta^\mathcal{D} R^\mathcal{D})|^2 \leq \left(\sum_{\mathcal{Q} \in \mathfrak{Q}_\mathcal{D}} m_\mathcal{Q} \|B_\mathcal{Q} \delta^\mathcal{D}\|_\mathcal{F}^2 \right) \left(\sum_{\mathcal{Q} \in \mathfrak{Q}_\mathcal{D}} m_\mathcal{Q} \sum_{s \in \mathcal{E}_\mathcal{Q}} (|\mathbf{R}_{s,\mathcal{Q}}^{\mathbf{u},\eta}|^2 + |\mathbf{R}_{s,\mathcal{Q}}^p|^2) \right).$$

Les Lemmes VII.30 et VII.26 concluent la démonstration. \blacksquare

Lemme VII.33

On suppose que (\mathbf{u}, p) est la solution du problème (VII.1). Pour tout $\mathcal{D} \in \mathfrak{D}$, on a

$$\begin{aligned} & \sum_{\mathcal{Q} \in \mathfrak{Q}_\mathcal{D}} \int_{\mathcal{Q}} \eta(z) \left(B_\mathcal{Q} \delta^\mathcal{D} + {}^t \delta^\mathcal{D} B_\mathcal{Q} : \mathrm{Du}(z) - \mathrm{D}_\mathcal{Q}^\mathcal{N} \mathbb{P}_\mathcal{C}^\mathcal{T} \mathbf{u} \right) dz \\ & - \sum_{\mathcal{Q} \in \mathfrak{Q}_\mathcal{D}} m_\mathcal{Q} \mathrm{Tr} \left({}^t \delta^\mathcal{D} B_\mathcal{Q} \right) \widetilde{p}_{\mathrm{ex}}^\mathcal{Q} = \mathrm{Tr} \left({}^t \delta^\mathcal{D} R^\mathcal{D} \right), \quad \forall \delta^\mathcal{D} \in \mathcal{M}_{n_\mathcal{D}, 2}(\mathbb{R}). \end{aligned}$$

Démonstration : On fait la démonstration uniquement pour des diamants intérieurs $\mathcal{D} \in \mathfrak{D}_{int}$, ainsi on a $n_\mathcal{D} = 4$. Le cas des diamants du bord $\mathcal{D} \in \mathfrak{D}_{ext}$ peut se traiter de la même manière. Comme le couple (\mathbf{u}, p) résout (VII.1), on a la continuité du tenseur des contraintes normal à travers $s = \mathcal{Q}|\mathcal{Q}'$ comme suit

$$\int_s (2\eta|_{\overline{\mathcal{Q}}}(z) \mathrm{Du}|_{\overline{\mathcal{Q}}}(z) - p|_{\overline{\mathcal{Q}}}(z) \mathrm{Id}) \tilde{\mathbf{n}}_{s,\mathcal{Q}} dz = \int_s (2\eta|_{\overline{\mathcal{Q}'}}(z) \mathrm{Du}|_{\overline{\mathcal{Q}'}}(z) - p|_{\overline{\mathcal{Q}'}}(z) \mathrm{Id}) \tilde{\mathbf{n}}_{s,\mathcal{Q}} dz.$$

Grâce à la définition de $(\delta_{\mathrm{ex}}^\mathcal{D}, p_{\mathrm{ex}}^\mathcal{Q})$ donnée par (VII.47), on en déduit que

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{m_s} \int_s (2\eta|_{\overline{\mathcal{Q}}}(z) \mathrm{Du}|_{\overline{\mathcal{Q}}}(z) - p|_{\overline{\mathcal{Q}}}(z) \mathrm{Id}) dz - (2\eta_\mathcal{Q} \mathrm{D}_\mathcal{Q}^\mathcal{N} \mathbb{P}_\mathcal{C}^\mathcal{T} \mathbf{u} - p_{\mathrm{ex}}^\mathcal{Q} \mathrm{Id}) \right) \tilde{\mathbf{n}}_{s,\mathcal{Q}} \\ & - \left(\frac{1}{m_s} \int_s (2\eta|_{\overline{\mathcal{Q}'}}(z) \mathrm{Du}|_{\overline{\mathcal{Q}'}}(z) - p|_{\overline{\mathcal{Q}'}}(z) \mathrm{Id}) dz - (2\eta_{\mathcal{Q}'} \mathrm{D}_{\mathcal{Q}'}^\mathcal{N} \mathbb{P}_\mathcal{C}^\mathcal{T} \mathbf{u} - p_{\mathrm{ex}}^{\mathcal{Q}'} \mathrm{Id}) \right) \tilde{\mathbf{n}}_{s,\mathcal{Q}} = 0. \end{aligned}$$

Les définitions des consistances données par (VII.51) et la dernière égalité impliquent

$$\begin{aligned} & \frac{2}{m_\mathcal{Q}} \int_{\mathcal{Q}} \eta(z) (\mathrm{Du}(z) - \mathrm{D}_\mathcal{Q}^\mathcal{N} \mathbb{P}_\mathcal{C}^\mathcal{T} \mathbf{u}) \tilde{\mathbf{n}}_{s,\mathcal{Q}} dz - \frac{2}{m_{\mathcal{Q}'}} \int_{\mathcal{Q}'} \eta(z) (\mathrm{Du}(z) - \mathrm{D}_{\mathcal{Q}'}^\mathcal{N} \mathbb{P}_\mathcal{C}^\mathcal{T} \mathbf{u}) \tilde{\mathbf{n}}_{s,\mathcal{Q}} dz \\ & - \frac{1}{m_\mathcal{Q}} \int_{\mathcal{Q}} (p(z) - p_{\mathrm{ex}}^\mathcal{Q}) \tilde{\mathbf{n}}_{s,\mathcal{Q}} dz + \frac{1}{m_{\mathcal{Q}'}} \int_{\mathcal{Q}'} (p(z) - p_{\mathrm{ex}}^{\mathcal{Q}'}) \tilde{\mathbf{n}}_{s,\mathcal{Q}} dz = 2\mathbf{R}_{s,\mathcal{Q}'}^{\mathbf{u},\eta} - 2\mathbf{R}_{s,\mathcal{Q}}^{\mathbf{u},\eta} - \mathbf{R}_{s,\mathcal{Q}}^p + \mathbf{R}_{s,\mathcal{Q}'}^p. \end{aligned}$$

On somme sur les quarts de diamant $\mathcal{Q} \in \mathfrak{Q}_\mathcal{D}$ du diamant \mathcal{D} pour obtenir

$$\sum_{\mathcal{Q} \in \mathfrak{Q}_\mathcal{D}} \left(\int_{\mathcal{Q}} 2\eta(z) (\mathrm{Du}(z) - \mathrm{D}_\mathcal{Q}^\mathcal{N} \mathbb{P}_\mathcal{C}^\mathcal{T} \mathbf{u}) dz \right) B_\mathcal{Q} - \sum_{\mathcal{Q} \in \mathfrak{Q}_\mathcal{D}} \left(\int_{\mathcal{Q}} (p(z) - p_{\mathrm{ex}}^\mathcal{Q}) dz \right) B_\mathcal{Q} = {}^t R^\mathcal{D}, \quad (\text{VII.62})$$

avec $R^\mathcal{D}$ donné par la Définition VII.31. On multiplie (VII.62) à droite par un $\delta^\mathcal{D} \in \mathcal{M}_{n_\mathcal{D}, 2}(\mathbb{R})$ et on prend la transposé, grâce à la symétrie de $\mathrm{Du}(z)$ et $\mathrm{D}_\mathcal{Q}^\mathcal{N} \mathbb{P}_\mathcal{C}^\mathcal{T} \mathbf{u}$, on obtient

$$\sum_{\mathcal{Q} \in \mathfrak{Q}_\mathcal{D}} \int_{\mathcal{Q}} {}^t \delta^\mathcal{D} B_\mathcal{Q} 2\eta(z) (\mathrm{Du}(z) - \mathrm{D}_\mathcal{Q}^\mathcal{N} \mathbb{P}_\mathcal{C}^\mathcal{T} \mathbf{u}) dz - \sum_{\mathcal{Q} \in \mathfrak{Q}_\mathcal{D}} m_\mathcal{Q} {}^t \delta^\mathcal{D} B_\mathcal{Q} \widetilde{p}_{\mathrm{ex}}^\mathcal{Q} = {}^t \delta^\mathcal{D} R^\mathcal{D}.$$

On applique maintenant l'opérateur trace en utilisant le fait que la matrice $\mathrm{Du} - \mathrm{D}_\mathcal{Q}^\mathcal{N} \mathbb{P}_\mathcal{C}^\mathcal{T} \mathbf{u}$ est symétrique pour déduire le résultat. \blacksquare

Proposition VII.34

On suppose que (\mathbf{u}, p) est la solution du problème (VII.1). Pour tout $\mathcal{D} \in \mathfrak{D}$, il existe une constante $C_{21} > 0$, dépendant uniquement de \underline{C}_η , \overline{C}_η et $\mathrm{reg}(\mathcal{T})$, et une fonction $\tilde{\mathbf{v}}_\mathcal{D}$ qui est affine sur chaque quart de diamant

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{Q} \text{ de } \mathfrak{Q}_{\mathcal{D}} \text{ telle que } \tilde{\mathbf{v}}_{\mathcal{D}} \in (H^1(\mathcal{D}))^2 \cap (H^2(\mathcal{Q}))^2, \text{ pour tout } \mathcal{Q} \in \mathfrak{Q}_{\mathcal{D}}, \text{ et} \\ \|\mathbf{D}\tilde{\mathbf{v}}_{\mathcal{D}} - \mathbf{D}_{\mathfrak{Q}}^{\mathcal{N}} \mathbb{P}_{\mathbf{c}}^{\tau} \tilde{\mathbf{v}}_{\mathcal{D}}\|_{\mathfrak{Q}_{\mathcal{D}}} \leq C_{21}(\|\tilde{p}_{\text{ex}}^{\mathfrak{Q}_{\mathcal{D}}}\|_2 + \|\mathbf{D}\mathbf{u} - \mathbf{D}_{\mathfrak{Q}}^{\mathcal{N}} \mathbb{P}_{\mathbf{c}}^{\tau} \mathbf{u}\|_{\mathfrak{Q}_{\mathcal{D}}} + d_{\mathcal{D}}), \\ \text{et} \\ - \sum_{\mathcal{Q} \in \mathfrak{Q}_{\mathcal{D}}} \int_{\mathcal{Q}} \text{div} \tilde{\mathbf{v}}_{\mathcal{D}} \tilde{p}_{\text{ex}}^{\mathcal{Q}} dz \geq -C_{21} \|\mathbf{D}\mathbf{u} - \mathbf{D}_{\mathfrak{Q}}^{\mathcal{N}} \mathbb{P}_{\mathbf{c}}^{\tau} \mathbf{u}\|_{\mathfrak{Q}_{\mathcal{D}}}^2 + \frac{1}{2} \|\tilde{p}_{\text{ex}}^{\mathfrak{Q}_{\mathcal{D}}}\|_2^2 - C_{21} \text{size}(\mathcal{T}). \end{array} \right.$$

Il faut noter que $\mathbb{P}_{\mathbf{c}}^{\tau} \tilde{\mathbf{v}}_{\mathcal{D}}$ n'est pas bien défini, il faut comprendre cette notation comme $\mathbb{P}_{\mathbf{c}}^{\tau} \tilde{\mathbf{v}}_{\mathcal{D}} = (\tilde{\mathbf{v}}_{\mathcal{D}}(x_{\mathcal{K}}), \tilde{\mathbf{v}}_{\mathcal{D}}(x_{\mathcal{L}}), \tilde{\mathbf{v}}_{\mathcal{D}}(x_{\mathcal{K}^*}), \tilde{\mathbf{v}}_{\mathcal{D}}(x_{\mathcal{L}^*}))$, pour chaque diamant \mathcal{D} .

Démonstration : Soit $\mathcal{D} \in \mathfrak{D}$. On pose $F_{\mathcal{Q}}$ pour $\mathcal{Q} \in \mathfrak{Q}_{\mathcal{D}}$ de la manière suivante :

$$F_{\mathcal{Q}_{\mathcal{K}, \mathcal{K}^*}} = \frac{\text{Id}}{m_{\mathcal{Q}_{\mathcal{K}, \mathcal{K}^*}}}, \quad F_{\mathcal{Q}_{\mathcal{K}, \mathcal{L}^*}} = -\frac{\text{Id}}{m_{\mathcal{Q}_{\mathcal{K}, \mathcal{L}^*}}}, \quad F_{\mathcal{Q}_{\mathcal{L}, \mathcal{K}^*}} = -\frac{\text{Id}}{m_{\mathcal{Q}_{\mathcal{L}, \mathcal{K}^*}}}, \quad F_{\mathcal{Q}_{\mathcal{L}, \mathcal{L}^*}} = \frac{\text{Id}}{m_{\mathcal{Q}_{\mathcal{L}, \mathcal{L}^*}}}.$$

On remarque que $F_{\mathcal{Q}}$ vérifie les conditions (VII.12) et (VII.13) si $\alpha_{\mathcal{K}} = \alpha_{\mathcal{L}}$. Ainsi, il existe $\bar{\delta}^{\mathcal{D}} \in \mathcal{M}_{n_{\mathcal{D}}, 2}(\mathbb{R})$ tel que $(B_{\mathcal{Q}} \bar{\delta}^{\mathcal{D}} + {}^t \bar{\delta}^{\mathcal{D}} B_{\mathcal{Q}}) = F_{\mathcal{Q}}, \forall \mathcal{Q} \in \mathfrak{Q}_{\mathcal{D}}$ et $(\bar{\delta}^{\mathcal{D}} : \delta_0) = 0$. En prenant $\delta^{\mathcal{D}}$ égal à $\bar{\delta}^{\mathcal{D}}$ dans la formule du Lemme VII.33, on en déduit que

$$\sum_{\mathcal{Q} \in \mathfrak{Q}_{\mathcal{D}}} \int_{\mathcal{Q}} \eta(z) (F_{\mathcal{Q}} : \mathbf{D}\mathbf{u}(z) - \mathbf{D}_{\mathfrak{Q}}^{\mathcal{N}} \mathbb{P}_{\mathbf{c}}^{\tau} \mathbf{u}) dz - \sum_{\mathcal{Q} \in \mathfrak{Q}_{\mathcal{D}}} m_{\mathcal{Q}} \text{Tr}(F_{\mathcal{Q}}) \tilde{p}_{\text{ex}}^{\mathcal{Q}} = \text{Tr}({}^t \bar{\delta}^{\mathcal{D}} R^{\mathcal{D}}). \quad (\text{VII.63})$$

On va construire une fonction $\tilde{\mathbf{v}}_{\mathcal{D}}$ telle que $\tilde{\mathbf{v}}_{\mathcal{D}} \in (H^1(\mathcal{D}))^2 \cap (H^2(\mathcal{Q}))^2$, pour tout $\mathcal{Q} \in \mathfrak{Q}_{\mathcal{D}}$, telle que

$$\text{div}(\tilde{\mathbf{v}}_{\mathcal{D}})(x) = \begin{cases} -\tilde{p}_{\text{ex}}^{\mathcal{Q}} + \frac{\text{div}^{\mathcal{D}}(\mathbb{P}_{\mathbf{c}}^{\tau} \mathbf{u})}{2m_{\mathcal{Q}}} \int_{\mathcal{Q}} \eta(z) dz - \frac{1}{2} \text{Tr}({}^t \bar{\delta}^{\mathcal{D}} R^{\mathcal{D}}), & \text{si } x \in \mathcal{Q}_{\mathcal{K}, \mathcal{K}^*}, \\ -\tilde{p}_{\text{ex}}^{\mathcal{Q}} + \frac{\text{div}^{\mathcal{D}}(\mathbb{P}_{\mathbf{c}}^{\tau} \mathbf{u})}{2m_{\mathcal{Q}}} \int_{\mathcal{Q}} \eta(z) dz, & \text{si } x \in \mathcal{Q}, \mathcal{Q} \cap \mathcal{Q}_{\mathcal{K}, \mathcal{K}^*} = \emptyset, \end{cases} \quad (\text{VII.64})$$

avec $R^{\mathcal{D}}$ défini dans la Définition VII.31. On choisit $\tilde{\mathbf{v}}_{\mathcal{D}}$ linéaire par quart de diamant de la forme $A_{\mathcal{Q}}(x - x_{\mathcal{D}})$ si $x \in \mathcal{Q}$, avec

$$\begin{aligned} A_{\mathcal{Q}_{\mathcal{K}, \mathcal{K}^*}} &= \frac{\tilde{\mathbf{v}}_{\mathcal{K}^*}^{\mathcal{D}} \otimes \vec{\mathbf{n}}_{\sigma_{\mathcal{K} \mathcal{K}^*}}}{\vec{\mathbf{n}}_{\sigma_{\mathcal{K} \mathcal{K}^*}} \cdot \vec{\tau}_{\mathcal{K}^*, \mathcal{L}^*}} + \frac{\tilde{\mathbf{v}}_{\mathcal{K}}^{\mathcal{D}} \otimes \vec{\mathbf{n}}_{\sigma_{\mathcal{K}}} }{\vec{\mathbf{n}}_{\sigma_{\mathcal{K}}} \cdot \vec{\tau}_{\sigma_{\mathcal{K} \mathcal{K}^*}}}, & A_{\mathcal{Q}_{\mathcal{K}, \mathcal{L}^*}} &= \frac{\tilde{\mathbf{v}}_{\mathcal{L}^*}^{\mathcal{D}} \otimes \vec{\mathbf{n}}_{\sigma_{\mathcal{K} \mathcal{K}^*}}}{\vec{\mathbf{n}}_{\sigma_{\mathcal{K} \mathcal{K}^*}} \cdot \vec{\tau}_{\mathcal{K}^*, \mathcal{L}^*}} + \frac{\tilde{\mathbf{v}}_{\mathcal{K}}^{\mathcal{D}} \otimes \vec{\mathbf{n}}_{\sigma_{\mathcal{K}}} }{\vec{\mathbf{n}}_{\sigma_{\mathcal{K}}} \cdot \vec{\tau}_{\sigma_{\mathcal{K} \mathcal{K}^*}}}, \\ A_{\mathcal{Q}_{\mathcal{L}, \mathcal{K}^*}} &= \frac{\tilde{\mathbf{v}}_{\mathcal{K}^*}^{\mathcal{D}} \otimes \vec{\mathbf{n}}_{\sigma_{\mathcal{L} \mathcal{K}^*}}}{\vec{\mathbf{n}}_{\sigma_{\mathcal{L} \mathcal{K}^*}} \cdot \vec{\tau}_{\mathcal{K}^*, \mathcal{L}^*}} + \frac{\tilde{\mathbf{v}}_{\mathcal{L}}^{\mathcal{D}} \otimes \vec{\mathbf{n}}_{\sigma_{\mathcal{L}}} }{\vec{\mathbf{n}}_{\sigma_{\mathcal{L}}} \cdot \vec{\tau}_{\sigma_{\mathcal{L} \mathcal{K}^*}}}, & A_{\mathcal{Q}_{\mathcal{L}, \mathcal{L}^*}} &= \frac{\tilde{\mathbf{v}}_{\mathcal{L}^*}^{\mathcal{D}} \otimes \vec{\mathbf{n}}_{\sigma_{\mathcal{L} \mathcal{K}^*}}}{\vec{\mathbf{n}}_{\sigma_{\mathcal{L} \mathcal{K}^*}} \cdot \vec{\tau}_{\mathcal{K}^*, \mathcal{L}^*}} + \frac{\tilde{\mathbf{v}}_{\mathcal{L}}^{\mathcal{D}} \otimes \vec{\mathbf{n}}_{\sigma_{\mathcal{L}}} }{\vec{\mathbf{n}}_{\sigma_{\mathcal{L}}} \cdot \vec{\tau}_{\sigma_{\mathcal{L} \mathcal{K}^*}}}, \end{aligned}$$

où $\tilde{\mathbf{v}}_{\mathcal{K}}^{\mathcal{D}}, \tilde{\mathbf{v}}_{\mathcal{L}}^{\mathcal{D}}, \tilde{\mathbf{v}}_{\mathcal{K}^*}^{\mathcal{D}}, \tilde{\mathbf{v}}_{\mathcal{L}^*}^{\mathcal{D}}$ appartiennent à \mathbb{R}^2 , ces valeurs seront déterminées ci-dessous.

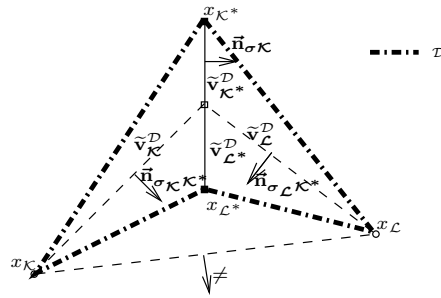


FIG. VII.7 – Construction de la fonction $\tilde{\mathbf{v}}_{\mathcal{D}}$.

On remarque qu'on a (voir la Figure VII.7), par exemple,

$$\tilde{\mathbf{v}}_{\mathcal{D}}(x_{\mathcal{D}} + \alpha \vec{\tau}_{\mathcal{K}^*, \mathcal{L}^*}) = \begin{cases} \alpha \tilde{\mathbf{v}}_{\mathcal{K}^*}^{\mathcal{D}}, & \text{si } x_{\mathcal{D}} + \alpha \vec{\tau}_{\mathcal{K}^*, \mathcal{L}^*} \in \sigma_{\mathcal{K}^*}, \\ \alpha \tilde{\mathbf{v}}_{\mathcal{L}^*}^{\mathcal{D}}, & \text{si } x_{\mathcal{D}} + \alpha \vec{\tau}_{\mathcal{K}^*, \mathcal{L}^*} \in \sigma_{\mathcal{L}^*}. \end{cases}$$

Ainsi $\tilde{\mathbf{v}}_{\mathcal{D}}$ est continue à travers les diagonales du diamant \mathcal{D} et de plus on a $\tilde{\mathbf{v}}_{\mathcal{D}}(x_{\mathcal{D}}) = 0$.

- **Cas** $\alpha_{\mathcal{K}} = \alpha_{\mathcal{L}}$: On choisit $\tilde{\mathbf{v}}_{\mathcal{K}}^{\mathcal{D}} = a_{\mathcal{K}} \tilde{\mathbf{n}}_{\sigma \mathcal{K}}$, $\tilde{\mathbf{v}}_{\mathcal{L}}^{\mathcal{D}} = a_{\mathcal{L}} \tilde{\mathbf{n}}_{\sigma \mathcal{K}}$, $\tilde{\mathbf{v}}_{\mathcal{K}^*}^{\mathcal{D}} = a_{\mathcal{K}^*} \tilde{\mathbf{r}}_{\mathcal{K}, \mathcal{L}}$, $\tilde{\mathbf{v}}_{\mathcal{L}^*}^{\mathcal{D}} = a_{\mathcal{L}^*} \tilde{\mathbf{n}}_{\sigma^* \mathcal{K}^*}$. Il reste à fixer les valeurs des scalaires $a_{\mathcal{K}}$, $a_{\mathcal{L}}$, $a_{\mathcal{K}^*}$, $a_{\mathcal{L}^*}$, qui sont imposées par (VII.64), comme suit :

$$\begin{aligned} a_{\mathcal{K}} &= \sin(\alpha_{\mathcal{D}}) \left(-\tilde{p}_{\mathcal{Q}_{\mathcal{K}, \mathcal{K}^*}}^{\text{ex}} + \frac{\text{div}^{\mathcal{D}}(\mathbb{P}_{\mathcal{C}}^{\mathcal{T}} \mathbf{u})}{2m_{\mathcal{Q}_{\mathcal{K}, \mathcal{K}^*}}} \int_{\mathcal{Q}_{\mathcal{K}, \mathcal{K}^*}} \eta(z) dz - \frac{1}{2} \text{Tr}({}^t \bar{\delta}^{\mathcal{D}} R^{\mathcal{D}}) \right) := \sin(\alpha_{\mathcal{D}}) b_1, \\ a_{\mathcal{L}} &= \sin(\alpha_{\mathcal{D}}) \left(-\tilde{p}_{\mathcal{Q}_{\mathcal{L}, \mathcal{K}^*}}^{\text{ex}} + \frac{\text{div}^{\mathcal{D}}(\mathbb{P}_{\mathcal{C}}^{\mathcal{T}} \mathbf{u})}{2m_{\mathcal{Q}_{\mathcal{L}, \mathcal{K}^*}}} \int_{\mathcal{Q}_{\mathcal{L}, \mathcal{K}^*}} \eta(z) dz \right) := \sin(\alpha_{\mathcal{D}}) b_2, \\ a_{\mathcal{K}} + a_{\mathcal{L}^*} &= \sin(\alpha_{\mathcal{D}}) \left(-\tilde{p}_{\mathcal{Q}_{\mathcal{K}, \mathcal{L}^*}}^{\text{ex}} + \frac{\text{div}^{\mathcal{D}}(\mathbb{P}_{\mathcal{C}}^{\mathcal{T}} \mathbf{u})}{2m_{\mathcal{Q}_{\mathcal{K}, \mathcal{L}^*}}} \int_{\mathcal{Q}_{\mathcal{K}, \mathcal{L}^*}} \eta(z) dz \right) := \sin(\alpha_{\mathcal{D}}) b_3, \\ a_{\mathcal{L}} + a_{\mathcal{L}^*} &= \sin(\alpha_{\mathcal{D}}) \left(-\tilde{p}_{\mathcal{Q}_{\mathcal{L}, \mathcal{L}^*}}^{\text{ex}} + \frac{\text{div}^{\mathcal{D}}(\mathbb{P}_{\mathcal{C}}^{\mathcal{T}} \mathbf{u})}{2m_{\mathcal{Q}_{\mathcal{L}, \mathcal{L}^*}}} \int_{\mathcal{Q}_{\mathcal{L}, \mathcal{L}^*}} \eta(z) dz \right) := \sin(\alpha_{\mathcal{D}}) b_4. \end{aligned}$$

Il vient que

$$a_{\mathcal{K}} = \sin(\alpha_{\mathcal{D}}) b_1, \quad a_{\mathcal{L}} = \sin(\alpha_{\mathcal{D}}) b_2, \quad a_{\mathcal{L}^*} = \sin(\alpha_{\mathcal{D}}) (b_3 - b_1).$$

Grâce à (VII.63), c'est-à-dire $b_1 - b_2 - b_3 + b_4 = 0$, on a également $a_{\mathcal{L}} = \sin(\alpha_{\mathcal{D}}) (b_1 - b_3 + b_4)$ et on peut choisir arbitrairement la dernière valeur, on prend $a_{\mathcal{K}^*} = 0$. On en déduit qu'il existe une constante $C > 0$, dépendant uniquement de $\text{reg}(\mathcal{T})$ et $\bar{\mathcal{C}}_{\eta}$, telle que

$$\sum_{\mathcal{Q} \in \mathcal{Q}_{\mathcal{D}}} m_{\mathcal{Q}} \|A_{\mathcal{Q}}\|_{\mathcal{F}}^2 \leq C \left(\sum_{\mathcal{Q} \in \mathcal{Q}_{\mathcal{D}}} m_{\mathcal{Q}} |\tilde{p}_{\text{ex}}^{\mathcal{Q}}|^2 + m_{\mathcal{D}} |\text{div}^{\mathcal{D}}(\mathbb{P}_{\mathcal{C}}^{\mathcal{T}} \mathbf{u})|^2 + m_{\mathcal{D}} |\text{Tr}({}^t \bar{\delta}^{\mathcal{D}} R^{\mathcal{D}})|^2 \right). \quad (\text{VII.65})$$

- **Cas** $\alpha_{\mathcal{K}} \neq \alpha_{\mathcal{L}}$: On choisit $\tilde{\mathbf{v}}_{\mathcal{K}}^{\mathcal{D}} = a_{\mathcal{K}} \tilde{\mathbf{n}}_{\sigma \mathcal{K}}$, $\tilde{\mathbf{v}}_{\mathcal{L}}^{\mathcal{D}} = a_{\mathcal{L}} \tilde{\mathbf{n}}_{\sigma \mathcal{K}}$, $\tilde{\mathbf{v}}_{\mathcal{K}^*}^{\mathcal{D}} = a_{\mathcal{K}^*} \tilde{\mathbf{r}}_{\sigma \mathcal{K} \mathcal{K}^*}$, $\tilde{\mathbf{v}}_{\mathcal{L}^*}^{\mathcal{D}} = a_{\mathcal{L}^*} \tilde{\mathbf{n}}_{\sigma \mathcal{K} \mathcal{K}^*}$. Il reste à fixer les valeurs des scalaires $a_{\mathcal{K}}$, $a_{\mathcal{L}}$, $a_{\mathcal{K}^*}$, $a_{\mathcal{L}^*}$, qui sont imposées par (VII.64), comme suit :

$$\begin{aligned} a_{\mathcal{K}} &= \sin(\alpha_{\mathcal{K}}) b_1, & a_{\mathcal{K}} + a_{\mathcal{L}^*} &= \sin(\alpha_{\mathcal{K}}) b_3, \\ a_{\mathcal{L}} + a_{\mathcal{K}^*} \sin(\alpha_{\mathcal{K}} - \alpha_{\mathcal{L}}) &= \sin(\alpha_{\mathcal{L}}) b_2, & a_{\mathcal{L}} + a_{\mathcal{L}^*} \cos(\alpha_{\mathcal{K}} - \alpha_{\mathcal{L}}) &= \sin(\alpha_{\mathcal{L}}) b_4. \end{aligned}$$

Il vient que

$$\begin{aligned} a_{\mathcal{K}} &= \sin(\alpha_{\mathcal{K}}) b_1, \quad a_{\mathcal{L}} = \sin(\alpha_{\mathcal{L}}) b_4 + \cos(\alpha_{\mathcal{K}} - \alpha_{\mathcal{L}}) \sin(\alpha_{\mathcal{K}}) (b_1 - b_3), \\ a_{\mathcal{K}^*} &= \frac{\sin(\alpha_{\mathcal{L}}) (b_2 - b_4) + \cos(\alpha_{\mathcal{K}} - \alpha_{\mathcal{L}}) \sin(\alpha_{\mathcal{K}}) (b_3 - b_1)}{\sin(\alpha_{\mathcal{K}} - \alpha_{\mathcal{L}})}, \quad a_{\mathcal{L}^*} = \sin(\alpha_{\mathcal{K}}) (b_3 - b_1). \end{aligned}$$

Dans ce cas, on a que $a_{\mathcal{K}^*}$ explose si les angles $\alpha_{\mathcal{K}}$, $\alpha_{\mathcal{L}}$ sont trop proches. Ainsi il existe une constante $C > 0$, dépendant uniquement de $\text{reg}(\mathcal{T})$, $\bar{\mathcal{C}}_{\eta}$ et $\sin(\epsilon_0)$, telle que

$$\sum_{\mathcal{Q} \in \mathcal{Q}_{\mathcal{D}}} m_{\mathcal{Q}} \|A_{\mathcal{Q}}\|_{\mathcal{F}}^2 \leq C \left(\sum_{\mathcal{Q} \in \mathcal{Q}_{\mathcal{D}}} m_{\mathcal{Q}} |\tilde{p}_{\text{ex}}^{\mathcal{Q}}|^2 + m_{\mathcal{D}} |\text{div}^{\mathcal{D}}(\mathbb{P}_{\mathcal{C}}^{\mathcal{T}} \mathbf{u})|^2 + m_{\mathcal{D}} |\text{Tr}({}^t \bar{\delta}^{\mathcal{D}} R^{\mathcal{D}})|^2 \right). \quad (\text{VII.66})$$

De (VII.65) ou de (VII.66), le Lemme VII.37 conduit à

$$\|\tilde{\mathbf{v}}_{\mathcal{D}}\|_{H^1(\mathcal{D})} \leq C (\|\tilde{p}_{\text{ex}}^{\mathcal{Q}_{\mathcal{D}}}\|_2 + \|\mathbf{D}\mathbf{u} - \mathbf{D}_{\mathcal{Q}}^{\mathcal{N}} \mathbb{P}_{\mathcal{C}}^{\mathcal{T}} \mathbf{u}\|_{\Omega_{\mathcal{D}}} + \sqrt{m_{\mathcal{D}}} |\text{Tr}({}^t \bar{\delta}^{\mathcal{D}} R^{\mathcal{D}})|). \quad (\text{VII.67})$$

De plus, le Lemme VII.11 implique que $m_{\mathcal{D}} \|B_{\mathcal{Q}} \bar{\delta}^{\mathcal{D}}\|_{\Omega_{\mathcal{D}}}^2 \leq C(\text{reg}(\mathcal{T}))$. Grâce à la Proposition VII.32, il vient que

$$m_{\mathcal{D}} |\text{Tr}({}^t \bar{\delta}^{\mathcal{D}} R^{\mathcal{D}})|^2 \leq C d_{\mathcal{D}}^2 \sum_{\mathcal{Q} \in \mathcal{Q}_{\mathcal{D}}} \int_{\mathcal{Q}} (\|\nabla \mathbf{u}(z)\|_{\mathcal{F}}^2 + |\nabla^2 \mathbf{u}(z)|^2 + |\nabla p(z)|^2) dz. \quad (\text{VII.68})$$

On a

$$\|\mathbf{D}\tilde{\mathbf{v}}_{\mathcal{D}} - \mathbf{D}_{\Omega}^{\mathcal{N}} \mathbb{P}_{\mathcal{C}}^{\mathcal{T}} \tilde{\mathbf{v}}_{\mathcal{D}}\|_{\Omega_{\mathcal{D}}} \leq \|\tilde{\mathbf{v}}_{\mathcal{D}}\|_{H^1(\mathcal{D})} + \|\mathbf{D}_{\Omega}^{\mathcal{N}} \mathbb{P}_{\mathcal{C}}^{\mathcal{T}} \tilde{\mathbf{v}}_{\mathcal{D}}\|_{\Omega_{\mathcal{D}}}.$$

On applique la Proposition VI.1 et le Lemme IV.22 pour obtenir

$$\|\mathbf{D}\tilde{\mathbf{v}}_{\mathcal{D}} - \mathbf{D}_{\Omega}^{\mathcal{N}} \mathbb{P}_{\mathcal{C}}^{\mathcal{T}} \tilde{\mathbf{v}}_{\mathcal{D}}\|_{\Omega_{\mathcal{D}}} \leq (1 + C_{17}) \|\tilde{\mathbf{v}}_{\mathcal{D}}\|_{H^1(\mathcal{D})}.$$

Puis les estimations (VII.67) et (VII.68) donnent

$$\|\mathbf{D}\tilde{\mathbf{v}}_{\mathcal{D}} - \mathbf{D}_{\Omega}^{\mathcal{N}} \mathbb{P}_{\mathcal{C}}^{\mathcal{T}} \tilde{\mathbf{v}}_{\mathcal{D}}\|_{\Omega_{\mathcal{D}}} \leq C (\|\tilde{p}_{\text{ex}}^{\mathcal{Q}_{\mathcal{D}}}\|_2 + \|\mathbf{D}\mathbf{u} - \mathbf{D}_{\mathcal{Q}}^{\mathcal{N}} \mathbb{P}_{\mathcal{C}}^{\mathcal{T}} \mathbf{u}\|_{\Omega_{\mathcal{D}}} + C d_{\mathcal{D}}).$$

De plus, on a

$$- \sum_{\mathfrak{Q} \in \Omega_{\mathcal{D}}} \int_{\mathfrak{Q}} \operatorname{div} \tilde{\mathbf{v}}_{\mathcal{D}} \tilde{p}_{\text{ex}}^{\mathfrak{Q}} dz \geq \|\tilde{p}_{\text{ex}}^{\Omega_{\mathcal{D}}}\|_2^2 - \operatorname{div}^{\mathcal{D}} \mathbb{P}_{\mathcal{C}}^{\mathcal{T}} \mathbf{u} \sum_{\mathfrak{Q} \in \Omega_{\mathcal{D}}} \int_{\mathfrak{Q}} \eta(z) dz \tilde{p}_{\text{ex}}^{\mathfrak{Q}} - m_{\mathfrak{Q}_{\mathcal{K}, \mathcal{K}^*}} \operatorname{Tr}({}^t \bar{\delta}^{\mathcal{D}} R^{\mathcal{D}}) \tilde{p}_{\mathfrak{Q}_{\mathcal{K}, \mathcal{K}^*}}^{\text{ex}}.$$

Grâce à $\operatorname{div} \mathbf{u} = 0$, il vient que

$$- \sum_{\mathfrak{Q} \in \Omega_{\mathcal{D}}} \int_{\mathfrak{Q}} \operatorname{div} \tilde{\mathbf{v}}_{\mathcal{D}} \tilde{p}_{\text{ex}}^{\mathfrak{Q}} dz \geq + \|\tilde{p}_{\text{ex}}^{\Omega_{\mathcal{D}}}\|_2^2 - C \|\mathbf{Du} - \mathbf{D}_{\mathfrak{Q}}^{\mathcal{N}} \mathbb{P}_{\mathcal{C}}^{\mathcal{T}} \mathbf{u}\|_{\Omega_{\mathcal{D}}} \|\tilde{p}_{\text{ex}}^{\Omega_{\mathcal{D}}}\|_2 - \sqrt{m_{\mathcal{D}}} |\operatorname{Tr}({}^t \bar{\delta}^{\mathcal{D}} R)| \|\tilde{p}_{\text{ex}}^{\Omega_{\mathcal{D}}}\|_2.$$

La Proposition VII.32 implique que

$$- \sum_{\mathfrak{Q} \in \Omega_{\mathcal{D}}} \int_{\mathfrak{Q}} \operatorname{div} \tilde{\mathbf{v}}_{\mathcal{D}} \tilde{p}_{\text{ex}}^{\mathfrak{Q}} dz \geq \|\tilde{p}_{\text{ex}}^{\Omega_{\mathcal{D}}}\|_2^2 - C \|\mathbf{Du} - \mathbf{D}_{\mathfrak{Q}}^{\mathcal{N}} \mathbb{P}_{\mathcal{C}}^{\mathcal{T}} \mathbf{u}\|_{\Omega_{\mathcal{D}}} \|\tilde{p}_{\text{ex}}^{\Omega_{\mathcal{D}}}\|_2 - C \operatorname{size}(\mathcal{T}) \|\tilde{p}_{\text{ex}}^{\Omega_{\mathcal{D}}}\|_2.$$

Finalement l'inégalité de Young conclut la démonstration. \blacksquare

On va montrer une estimation de consistance du tenseur des taux de déformation modifié $\mathbf{D}_{\Omega}^{\mathcal{N}}$. C'est la principale différence entre ces travaux et ceux des chapitres précédents car le tenseur des taux de déformation modifié dépend des sauts de la viscosité η dans chaque diamant. Ainsi, l'estimation ne peut pas s'obtenir de la manière classique en appliquant des formules de Taylor appropriées. On a besoin d'utiliser le couple (\mathbf{u}, p) solution du problème (VII.1) et le Lemme VII.11. Il faut également noter que l'on ne peut pas séparer l'estimation en vitesse de celle en pression, ainsi les deux estimations dépendent du couple (\mathbf{u}, p) .

Lemme VII.35

On suppose que (\mathbf{u}, p) est la solution du problème (VII.1). Il existe une constante $C_{22} > 0$, dépendant uniquement de \underline{C}_{η} , \bar{C}_{η} , C_{η} , $\operatorname{reg}(\mathcal{T})$ et $\sin(\epsilon_0)$, telle que pour tout $\mathcal{D} \in \mathfrak{D}$, on a

$$\|\mathbf{Du} - \mathbf{D}_{\Omega}^{\mathcal{N}} \mathbb{P}_{\mathcal{C}}^{\mathcal{T}} \mathbf{u}\|_{\Omega_{\mathcal{D}}}^2 + \|\tilde{p}_{\text{ex}}^{\Omega_{\mathcal{D}}}\|_2^2 \leq C_{22} d_{\mathcal{D}}^2 \sum_{\mathfrak{Q} \in \Omega_{\mathcal{D}}} \int_{\mathfrak{Q}} (\|\nabla \mathbf{u}\|_{\mathcal{F}}^2 + |\nabla^2 \mathbf{u}|^2 + |\nabla p(z)|^2) dz.$$

Démonstration : On fait la démonstration uniquement pour des diamants intérieurs $\mathcal{D} \in \mathfrak{D}_{\text{int}}$, ainsi on a $n_{\mathcal{D}} = 4$. Le cas des diamants du bord $\mathcal{D} \in \mathfrak{D}_{\text{ext}}$ peut se traiter de la même manière.

Etape 1 Pour $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in (H^2(\Omega))^2$, et $p^{\Omega}, q^{\Omega} \in \mathbb{R}^{\Omega}$, on définit une forme bilinéaire $\mathcal{B}_{\mathcal{D}}$ de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_{\mathcal{D}}(\mathbf{u}, p^{\Omega}, \mathbf{v}, q^{\Omega}) &= \sum_{\mathfrak{Q} \in \Omega_{\mathcal{D}}} 2 \int_{\mathfrak{Q}} \eta(z) (\mathbf{Du} - \mathbf{D}_{\mathfrak{Q}}^{\mathcal{N}} \mathbb{P}_{\mathcal{C}}^{\mathcal{T}} \mathbf{u} : \mathbf{Dv} - \mathbf{D}_{\mathfrak{Q}}^{\mathcal{N}} \mathbb{P}_{\mathcal{C}}^{\mathcal{T}} \mathbf{v}) dz \\ &\quad - \sum_{\mathfrak{Q} \in \Omega_{\mathcal{D}}} \int_{\mathfrak{Q}} \operatorname{Tr}(\mathbf{Dv} - \mathbf{D}_{\mathfrak{Q}}^{\mathcal{N}} \mathbb{P}_{\mathcal{C}}^{\mathcal{T}} \mathbf{v}) p^{\mathfrak{Q}} dz + \sum_{\mathfrak{Q} \in \Omega_{\mathcal{D}}} \int_{\mathfrak{Q}} \operatorname{Tr}(\mathbf{Du} - \mathbf{D}_{\mathfrak{Q}}^{\mathcal{N}} \mathbb{P}_{\mathcal{C}}^{\mathcal{T}} \mathbf{u}) q^{\mathfrak{Q}} dz. \end{aligned}$$

On a facilement que

$$\mathcal{B}_{\mathcal{D}}(\mathbf{u}, \tilde{p}_{\text{ex}}^{\Omega_{\mathcal{D}}}, \mathbf{u}, \tilde{p}_{\text{ex}}^{\Omega_{\mathcal{D}}}) \geq 2 \underline{C}_{\eta} \|\mathbf{Du} - \mathbf{D}_{\mathfrak{Q}}^{\mathcal{N}} \mathbb{P}_{\mathcal{C}}^{\mathcal{T}} \mathbf{u}\|_{\Omega_{\mathcal{D}}}^2. \quad (\text{VII.69})$$

On utilise la fonction $\tilde{\mathbf{v}}_{\mathcal{D}}$ introduite dans la Proposition VII.34. Grâce à l'inégalité de Cauchy-Schwarz, il vient que

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_{\mathcal{D}}(\mathbf{u}, \tilde{p}_{\text{ex}}^{\Omega_{\mathcal{D}}}, \tilde{\mathbf{v}}_{\mathcal{D}}, 0) &\geq -2 \bar{C}_{\eta} \|\mathbf{Du} - \mathbf{D}_{\mathfrak{Q}}^{\mathcal{N}} \mathbb{P}_{\mathcal{C}}^{\mathcal{T}} \mathbf{u}\|_{\Omega_{\mathcal{D}}} \|\mathbf{D}\tilde{\mathbf{v}}_{\mathcal{D}} - \mathbf{D}_{\mathfrak{Q}}^{\mathcal{N}} \mathbb{P}_{\mathcal{C}}^{\mathcal{T}} \tilde{\mathbf{v}}_{\mathcal{D}}\|_{\Omega_{\mathcal{D}}} \\ &\quad - \sum_{\mathfrak{Q} \in \Omega_{\mathcal{D}}} \int_{\mathfrak{Q}} \operatorname{div} \tilde{\mathbf{v}}_{\mathcal{D}} \tilde{p}_{\text{ex}}^{\mathfrak{Q}} dz + \sum_{\mathfrak{Q} \in \Omega_{\mathcal{D}}} m_{\mathfrak{Q}} \operatorname{Tr}(\mathbf{D}_{\mathfrak{Q}}^{\mathcal{N}} \mathbb{P}_{\mathcal{C}}^{\mathcal{T}} \tilde{\mathbf{v}}_{\mathcal{D}}) \tilde{p}_{\text{ex}}^{\mathfrak{Q}}. \end{aligned}$$

On va montrer que le dernier terme de l'estimation ci-dessus est nul. Comme on a imposé $\operatorname{Tr}(\mathbf{D}_{\mathfrak{Q}}^{\mathcal{N}} \mathbb{P}_{\mathcal{C}}^{\mathcal{T}} \tilde{\mathbf{v}}_{\mathcal{D}}) = \operatorname{div}^{\mathcal{D}}(\mathbb{P}_{\mathcal{C}}^{\mathcal{T}} \tilde{\mathbf{v}}_{\mathcal{D}})$ (voir (VII.17)), pour tout $\mathfrak{Q} \in \Omega_{\mathcal{D}}$, on a

$$\sum_{\mathfrak{Q} \in \Omega_{\mathcal{D}}} m_{\mathfrak{Q}} \operatorname{Tr}(\mathbf{D}_{\mathfrak{Q}}^{\mathcal{N}} \mathbb{P}_{\mathcal{C}}^{\mathcal{T}} \tilde{\mathbf{v}}_{\mathcal{D}}) \tilde{p}_{\text{ex}}^{\mathfrak{Q}} = \operatorname{div}^{\mathcal{D}}(\mathbb{P}_{\mathcal{C}}^{\mathcal{T}} \tilde{\mathbf{v}}_{\mathcal{D}}) \sum_{\mathfrak{Q} \in \Omega_{\mathcal{D}}} m_{\mathfrak{Q}} \tilde{p}_{\text{ex}}^{\mathfrak{Q}}.$$

De plus d'après la définition de $\tilde{p}_{\text{ex}}^{\mathfrak{Q}}$, on a $\sum_{\mathfrak{Q} \in \Omega_{\mathcal{D}}} m_{\mathfrak{Q}} \tilde{p}_{\text{ex}}^{\mathfrak{Q}} = 0$ (voir (VII.48)), on en déduit que

$$\sum_{\mathfrak{Q} \in \Omega_{\mathcal{D}}} m_{\mathfrak{Q}} \operatorname{Tr}(\mathbf{D}_{\mathfrak{Q}}^{\mathcal{N}} \mathbb{P}_{\mathcal{C}}^{\mathcal{T}} \tilde{\mathbf{v}}_{\mathcal{D}}) \tilde{p}_{\text{ex}}^{\mathfrak{Q}} = 0.$$

Finalement, l'estimation de $\tilde{\mathbf{v}}_{\mathcal{D}}$ dans la Proposition VII.34 et l'inégalité de Young conduisent à

$$\mathcal{B}_{\mathcal{D}}(\mathbf{u}, \tilde{p}_{\text{ex}}^{\Omega_{\mathcal{D}}}, \tilde{\mathbf{v}}_{\mathcal{D}}, 0) \geq -C \|\mathbf{D}\mathbf{u} - \mathbf{D}_{\mathcal{Q}}^{\mathcal{N}} \mathbb{P}_{\mathcal{C}}^{\mathcal{T}} \mathbf{u}\|_{\Omega_{\mathcal{D}}}^2 + \frac{1}{4} \|\tilde{p}_{\text{ex}}^{\Omega_{\mathcal{D}}}\|_2^2 - C \text{size}(\mathcal{T})^2. \quad (\text{VII.70})$$

La bilinéarité de $\mathcal{B}_{\mathcal{D}}$, les estimations (VII.69) et (VII.70) donnent pour tout nombre strictement positif $\xi > 0$:

$$\mathcal{B}_{\mathcal{D}}(\mathbf{u}, \tilde{p}_{\text{ex}}^{\Omega_{\mathcal{D}}}; \mathbf{u} + \xi \tilde{\mathbf{v}}_{\mathcal{D}}, \tilde{p}_{\text{ex}}^{\Omega_{\mathcal{D}}}) + \xi C \text{size}(\mathcal{T})^2 \geq (2\underline{C}_{\eta} - \xi C) \|\mathbf{D}\mathbf{u} - \mathbf{D}_{\mathcal{Q}}^{\mathcal{N}} \mathbb{P}_{\mathcal{C}}^{\mathcal{T}} \mathbf{u}\|_{\Omega_{\mathcal{D}}}^2 + \frac{\xi}{2} \|\tilde{p}_{\text{ex}}^{\Omega_{\mathcal{D}}}\|_2^2.$$

On choisit la valeur de $\xi > 0$ suffisamment petite (dépendant uniquement de $\text{reg}(\mathcal{T})$, \underline{C}_{η} et \overline{C}_{η}) telle que l'estimation ci-dessus conduit à l'estimation suivante pour $\tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{u} + \xi \tilde{\mathbf{v}}_{\mathcal{D}} \in (H^2(\Omega))^2$

$$\|\mathbf{D}\tilde{\mathbf{u}} - \mathbf{D}_{\mathcal{Q}}^{\mathcal{N}} \mathbb{P}_{\mathcal{C}}^{\mathcal{T}} \tilde{\mathbf{u}}\|_{\Omega_{\mathcal{D}}} \leq C (\|\mathbf{D}\mathbf{u} - \mathbf{D}_{\mathcal{Q}}^{\mathcal{N}} \mathbb{P}_{\mathcal{C}}^{\mathcal{T}} \mathbf{u}\|_{\Omega_{\mathcal{D}}} + \|\tilde{p}_{\text{ex}}^{\Omega_{\mathcal{D}}}\|_2 + d_{\mathcal{D}}), \quad (\text{VII.71})$$

et

$$\|\mathbf{D}\mathbf{u} - \mathbf{D}_{\mathcal{Q}}^{\mathcal{N}} \mathbb{P}_{\mathcal{C}}^{\mathcal{T}} \mathbf{u}\|_{\Omega_{\mathcal{D}}}^2 + \|\tilde{p}_{\text{ex}}^{\Omega_{\mathcal{D}}}\|_2^2 \leq C \mathcal{B}_{\mathcal{D}}(\mathbf{u}, \tilde{p}_{\text{ex}}^{\Omega_{\mathcal{D}}}; \tilde{\mathbf{u}}, \tilde{p}_{\text{ex}}^{\Omega_{\mathcal{D}}}) + C_3 \text{size}(\mathcal{T})^2. \quad (\text{VII.72})$$

L'estimation (VII.71) est obtenue en utilisant la Proposition VII.34.

Etape 2 On définit maintenant l'erreur de consistance de la projection $\mathbb{P}_{\mathcal{C}}^{\Omega}$ comme suit

$$T_{\mathcal{Q}, \tilde{\mathbf{u}}}(z) = \mathbf{D}\tilde{\mathbf{u}}(z) - \mathbf{D}\mathbb{P}_{\mathcal{C}}^{\Omega} \tilde{\mathbf{u}}, \quad \forall z \in \mathcal{Q}, \quad \forall \mathcal{Q} \in \Omega.$$

Ensuite, il faut remarquer que $2\mathbf{D}\mathbb{P}_{\mathcal{C}}^{\Omega} \tilde{\mathbf{u}} - 2\mathbf{D}^{\mathcal{D}} \mathbb{P}_{\mathcal{C}}^{\mathcal{T}} \tilde{\mathbf{u}}$ vérifie les conditions (VII.12) et (VII.13) si $\alpha_{\mathcal{K}} = \alpha_{\mathcal{L}}$, ainsi grâce à la Proposition VII.8, il existe un unique $\widetilde{\delta^{\mathcal{D}}} \in \mathcal{M}_{n_{\mathcal{D}}, 2}(\mathbb{R})$ tel que $(\widetilde{\delta^{\mathcal{D}}} : \delta_0) = 0$ (avec δ_0 défini dans la Proposition VII.7) et

$$\mathbf{D}\mathbb{P}_{\mathcal{C}}^{\Omega} \tilde{\mathbf{u}} - \mathbf{D}^{\mathcal{D}} \mathbb{P}_{\mathcal{C}}^{\mathcal{T}} \tilde{\mathbf{u}} = \frac{1}{2} (B_{\mathcal{Q}} \widetilde{\delta^{\mathcal{D}}} + {}^t \widetilde{\delta^{\mathcal{D}}} B_{\mathcal{Q}}), \quad \forall \mathcal{Q} \in \Omega_{\mathcal{D}}.$$

Puis en appliquant le Théorème VII.10 avec $(\mathbf{D}^{\mathcal{D}} \mathbb{P}_{\mathcal{C}}^{\mathcal{T}} \tilde{\mathbf{u}}, \mathbb{P}_{\mathcal{D}}^{\mathcal{D}} p)$, il existe un unique couple $(\overline{\delta^{\mathcal{D}}}, \overline{p^{\mathcal{D}}}) \in \mathcal{M}_{n_{\mathcal{D}}, 2}(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^{n_{\mathcal{D}}}$ vérifiant (VII.14). Ceci donne $\mathbf{D}_{\mathcal{Q}}^{\mathcal{N}} \mathbb{P}_{\mathcal{C}}^{\mathcal{T}} \tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{D}^{\mathcal{D}} \mathbb{P}_{\mathcal{C}}^{\mathcal{T}} \tilde{\mathbf{u}} + \frac{1}{2} (B_{\mathcal{Q}} \overline{\delta^{\mathcal{D}}} + {}^t \overline{\delta^{\mathcal{D}}} B_{\mathcal{Q}})$, avec $(\overline{\delta^{\mathcal{D}}} : \delta_0) = 0$. On note maintenant $\widehat{\delta^{\mathcal{D}}} = \widetilde{\delta^{\mathcal{D}}} - \overline{\delta^{\mathcal{D}}}$ qui vérifie $(\widehat{\delta^{\mathcal{D}}} : \delta_0) = 0$ et

$$\mathbf{D}\mathbb{P}_{\mathcal{C}}^{\Omega} \tilde{\mathbf{u}} - \mathbf{D}_{\mathcal{Q}}^{\mathcal{N}} \mathbb{P}_{\mathcal{C}}^{\mathcal{T}} \tilde{\mathbf{u}} = \frac{1}{2} (B_{\mathcal{Q}} \widehat{\delta^{\mathcal{D}}} + {}^t \widehat{\delta^{\mathcal{D}}} B_{\mathcal{Q}}), \quad \forall \mathcal{Q} \in \Omega_{\mathcal{D}}.$$

On remplace $\delta^{\mathcal{D}}$ par $\widehat{\delta^{\mathcal{D}}}$ dans la formule du Lemme VII.33 et on utilise le fait que

$$\frac{1}{2} (B_{\mathcal{Q}} \widehat{\delta^{\mathcal{D}}} + {}^t \widehat{\delta^{\mathcal{D}}} B_{\mathcal{Q}}) = \mathbf{D}\mathbb{P}_{\mathcal{C}}^{\Omega} \tilde{\mathbf{u}} - \mathbf{D}_{\mathcal{Q}}^{\mathcal{N}} \mathbb{P}_{\mathcal{C}}^{\mathcal{T}} \tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{D}\tilde{\mathbf{u}}(z) - \mathbf{D}_{\mathcal{Q}}^{\mathcal{N}} \mathbb{P}_{\mathcal{C}}^{\mathcal{T}} \tilde{\mathbf{u}} - T_{\mathcal{Q}, \tilde{\mathbf{u}}}(z), \quad (\text{VII.73})$$

pour déduire que

$$\begin{aligned} \text{Tr} \left({}^t \widehat{\delta^{\mathcal{D}}} R^{\mathcal{D}} \right) &= \sum_{\mathcal{Q} \in \Omega_{\mathcal{D}}} \int_{\mathcal{Q}} 2\eta(z) (\mathbf{D}\tilde{\mathbf{u}}(z) - \mathbf{D}_{\mathcal{Q}}^{\mathcal{N}} \mathbb{P}_{\mathcal{C}}^{\mathcal{T}} \tilde{\mathbf{u}} : \mathbf{D}\mathbf{u}(z) - \mathbf{D}_{\mathcal{Q}}^{\mathcal{N}} \mathbb{P}_{\mathcal{C}}^{\mathcal{T}} \mathbf{u}) \, dz + \sum_{\mathcal{Q} \in \Omega_{\mathcal{D}}} m_{\mathcal{Q}} \text{Tr} (T_{\mathcal{Q}, \tilde{\mathbf{u}}}(z)) \tilde{p}_{\text{ex}}^{\Omega} \\ &\quad - \sum_{\mathcal{Q} \in \Omega_{\mathcal{D}}} \int_{\mathcal{Q}} 2\eta(z) (T_{\mathcal{Q}, \tilde{\mathbf{u}}}(z) : \mathbf{D}\mathbf{u}(z) - \mathbf{D}_{\mathcal{Q}}^{\mathcal{N}} \mathbb{P}_{\mathcal{C}}^{\mathcal{T}} \mathbf{u}) \, dz - \sum_{\mathcal{Q} \in \Omega_{\mathcal{D}}} m_{\mathcal{Q}} \text{Tr} (\mathbf{D}\tilde{\mathbf{u}}(z) - \mathbf{D}_{\mathcal{Q}}^{\mathcal{N}} \mathbb{P}_{\mathcal{C}}^{\mathcal{T}} \tilde{\mathbf{u}}) \tilde{p}_{\text{ex}}^{\Omega}. \end{aligned}$$

On relie les deux quantités $R^{\mathcal{D}}$ et $\mathcal{B}_{\mathcal{D}}$ de la manière suivante

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_{\mathcal{D}}(\mathbf{u}, \tilde{p}_{\text{ex}}^{\Omega_{\mathcal{D}}}; \tilde{\mathbf{u}}, \tilde{p}_{\text{ex}}^{\Omega_{\mathcal{D}}}) &= \text{Tr} \left({}^t \widehat{\delta^{\mathcal{D}}} R^{\mathcal{D}} \right) - \sum_{\mathcal{Q} \in \Omega_{\mathcal{D}}} m_{\mathcal{Q}} \text{Tr} (T_{\mathcal{Q}, \tilde{\mathbf{u}}}(z)) \tilde{p}_{\text{ex}}^{\Omega} + \sum_{\mathcal{Q} \in \Omega_{\mathcal{D}}} m_{\mathcal{Q}} \text{Tr} (\mathbf{D}\mathbf{u}(z) - \mathbf{D}_{\mathcal{Q}}^{\mathcal{N}} \mathbb{P}_{\mathcal{C}}^{\mathcal{T}} \mathbf{u}) \tilde{p}_{\text{ex}}^{\Omega} \\ &\quad + \sum_{\mathcal{Q} \in \Omega_{\mathcal{D}}} \int_{\mathcal{Q}} 2\eta(z) (T_{\mathcal{Q}, \tilde{\mathbf{u}}}(z) : \mathbf{D}\mathbf{u}(z) - \mathbf{D}_{\mathcal{Q}}^{\mathcal{N}} \mathbb{P}_{\mathcal{C}}^{\mathcal{T}} \mathbf{u}) \, dz. \end{aligned}$$

En utilisant (VII.2) et l'inégalité de Cauchy-Schwarz, la Proposition VII.32 donne que

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_{\mathcal{D}}(\mathbf{u}, \tilde{p}_{\text{ex}}^{\Omega_{\mathcal{D}}}; \tilde{\mathbf{u}}, \tilde{p}_{\text{ex}}^{\Omega_{\mathcal{D}}}) &\leq C d_{\mathcal{D}} \|B_{\mathcal{Q}} \widehat{\delta^{\mathcal{D}}}\|_{\Omega_{\mathcal{D}}} \left(\sum_{\mathcal{Q} \in \Omega_{\mathcal{D}}} \int_{\mathcal{Q}} (\|\nabla \mathbf{u}(z)\|_{\mathcal{F}}^2 + |\nabla^2 \mathbf{u}(z)|^2 + |\nabla p(z)|^2) \, dz \right)^{\frac{1}{2}} + \|T_{\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\mathbf{u}}}\|_{\Omega_{\mathcal{D}}} \|\tilde{p}_{\text{ex}}^{\Omega_{\mathcal{D}}}\|_2 \\ &\quad + \|\mathbf{D}\mathbf{u} - \mathbf{D}_{\mathcal{Q}}^{\mathcal{N}} \mathbb{P}_{\mathcal{C}}^{\mathcal{T}} \mathbf{u}\|_{\Omega_{\mathcal{D}}} \|\tilde{p}_{\text{ex}}^{\Omega_{\mathcal{D}}}\|_2 + 2\overline{C}_{\eta} \|\mathbf{D}\mathbf{u} - \mathbf{D}_{\Omega}^{\mathcal{N}} \mathbb{P}_{\mathcal{C}}^{\mathcal{T}} \mathbf{u}\|_{\Omega_{\mathcal{D}}} \|T_{\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\mathbf{u}}}\|_{\Omega_{\mathcal{D}}}. \end{aligned}$$

De plus, le Lemme VII.11 et la définition de $\widehat{\delta^{\mathcal{D}}}$ donnée par (VII.73) impliquent

$$\sum_{\mathcal{Q} \in \Omega_{\mathcal{D}}} m_{\mathcal{Q}} \|B_{\mathcal{Q}} \widehat{\delta^{\mathcal{D}}} \|_{\mathcal{F}}^2 \leq C (\|D\bar{\mathbf{u}} - D_{\Omega}^{\mathcal{N}} \mathbb{P}_{\mathcal{C}}^{\mathcal{T}} \bar{\mathbf{u}} \|_{\Omega_{\mathcal{D}}}^2 + \|T_{\bar{\mathbf{u}}, \bar{\mathbf{u}}} \|_{\Omega_{\mathcal{D}}}^2).$$

Finalement, on obtient en utilisant la Proposition VII.29 et la définition de $\bar{\mathbf{u}}$

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_{\mathcal{D}}(\mathbf{u}, \tilde{p}_{\text{ex}}^{\Omega_{\mathcal{D}}}; \bar{\mathbf{u}}, \tilde{p}_{\text{ex}}^{\Omega_{\mathcal{D}}}) &\leq C d_{\mathcal{D}} \left[\|D\bar{\mathbf{u}} - D_{\Omega}^{\mathcal{N}} \mathbb{P}_{\mathcal{C}}^{\mathcal{T}} \bar{\mathbf{u}} \|_{\Omega_{\mathcal{D}}} + C d_{\mathcal{D}} \left(\sum_{\mathcal{Q} \in \Omega_{\mathcal{D}}} \int_{\mathcal{Q}} |\nabla^2 \mathbf{u}(z)|^2 dz \right)^{\frac{1}{2}} \right] \\ &\quad \left(\sum_{\mathcal{Q} \in \Omega_{\mathcal{D}}} \int_{\mathcal{Q}} (\|\nabla \mathbf{u}(z)\|_{\mathcal{F}}^2 + |\nabla^2 \mathbf{u}(z)|^2 + |\nabla p(z)|^2) dz \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\quad + C d_{\mathcal{D}} \|\tilde{p}_{\text{ex}}^{\Omega_{\mathcal{D}}}\|_2 \left(\sum_{\mathcal{Q} \in \Omega_{\mathcal{D}}} \int_{\mathcal{Q}} |\nabla^2 \mathbf{u}(z)|^2 dz \right)^{\frac{1}{2}} + \|D\mathbf{u} - D_{\Omega}^{\mathcal{N}} \mathbb{P}_{\mathcal{C}}^{\mathcal{T}} \mathbf{u} \|_{\Omega_{\mathcal{D}}} \|\tilde{p}_{\text{ex}}^{\Omega_{\mathcal{D}}}\|_2 \\ &\quad + C d_{\mathcal{D}} \|D\mathbf{u} - D_{\Omega}^{\mathcal{N}} \mathbb{P}_{\mathcal{C}}^{\mathcal{T}} \mathbf{u} \|_{\Omega_{\mathcal{D}}} \left(\sum_{\mathcal{Q} \in \Omega_{\mathcal{D}}} \int_{\mathcal{Q}} |\nabla^2 \mathbf{u}(z)|^2 dz \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

En utilisant (VII.71) et (VII.72), on en déduit

$$\begin{aligned} \|D\mathbf{u} - D_{\Omega}^{\mathcal{N}} \mathbb{P}_{\mathcal{C}}^{\mathcal{T}} \mathbf{u} \|_{\Omega_{\mathcal{D}}}^2 + \|\tilde{p}_{\text{ex}}^{\Omega_{\mathcal{D}}}\|_2^2 &\leq C d_{\mathcal{D}}^2 \sum_{\mathcal{Q} \in \Omega_{\mathcal{D}}} \int_{\mathcal{Q}} (\|\nabla \mathbf{u}(z)\|_{\mathcal{F}}^2 + |\nabla^2 \mathbf{u}(z)|^2 + |\nabla p(z)|^2) dz + \|D\mathbf{u} - D_{\Omega}^{\mathcal{N}} \mathbb{P}_{\mathcal{C}}^{\mathcal{T}} \mathbf{u} \|_{\Omega_{\mathcal{D}}} \|\tilde{p}_{\text{ex}}^{\Omega_{\mathcal{D}}}\|_2 \\ &\quad + C d_{\mathcal{D}} (\|D\mathbf{u} - D_{\Omega}^{\mathcal{N}} \mathbb{P}_{\mathcal{C}}^{\mathcal{T}} \mathbf{u} \|_{\Omega_{\mathcal{D}}} + \|\tilde{p}_{\text{ex}}^{\Omega_{\mathcal{D}}}\|_2) \left(\sum_{\mathcal{Q} \in \Omega_{\mathcal{D}}} \int_{\mathcal{Q}} (\|\nabla \mathbf{u}(z)\|_{\mathcal{F}}^2 + |\nabla^2 \mathbf{u}(z)|^2 + |\nabla p(z)|^2) dz \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Finalement, l'inégalité de Young conclut le résultat

$$\|D\mathbf{u} - D_{\Omega}^{\mathcal{N}} \mathbb{P}_{\mathcal{C}}^{\mathcal{T}} \mathbf{u} \|_{\Omega_{\mathcal{D}}}^2 + \|\tilde{p}_{\text{ex}}^{\Omega_{\mathcal{D}}}\|_2^2 \leq C d_{\mathcal{D}}^2 \sum_{\mathcal{Q} \in \Omega_{\mathcal{D}}} \int_{\mathcal{Q}} (\|\nabla \mathbf{u}(z)\|_{\mathcal{F}}^2 + |\nabla^2 \mathbf{u}(z)|^2 + |\nabla p(z)|^2) dz.$$

■

Remarque VII.36

On a immédiatement l'estimation sur les normes

$$\|D\mathbf{u} - D_{\Omega}^{\mathcal{N}} \mathbb{P}_{\mathcal{C}}^{\mathcal{T}} \mathbf{u} \|_2^2 + \|\tilde{p}_{\text{ex}}^{\Omega}\|_2^2 \leq C_{22} \text{size}(\mathcal{T})^2 (\|\mathbf{u}\|_{(H^2(\Omega))^2}^2 + \|p\|_{H^1(\Omega)}^2). \quad (\text{VII.74})$$

Lemme VII.37

On suppose que (\mathbf{u}, p) est la solution du problème (VII.1). Il existe une constante $C_{23} > 0$, dépendant uniquement de \underline{C}_{η} , \bar{C}_{η} , C_{η} , $\text{reg}(\mathcal{T})$ et $\sin(\epsilon_0)$, telle que

$$\begin{aligned} m_{\mathcal{D}} |\text{div}^{\mathcal{D}} \mathbb{P}_{\mathcal{C}}^{\mathcal{T}} \mathbf{u}|^2 &\leq \|D_{\Omega}^{\mathcal{N}} \mathbb{P}_{\mathcal{C}}^{\mathcal{T}} \mathbf{u} - D\mathbf{u}\|_{\Omega_{\mathcal{D}}}^2, \quad \forall \mathcal{D} \in \mathfrak{D}, \\ \|\text{div}^{\mathcal{D}} \mathbb{P}_{\mathcal{C}}^{\mathcal{T}} \mathbf{u}\|_2 &\leq C_{23} \text{size}(\mathcal{T}) (\|\mathbf{u}\|_{(H^2(\Omega))^2} + \|p\|_{H^1(\Omega)}). \end{aligned}$$

Démonstration : Grâce à $\text{div}^{\mathcal{D}}(\mathbb{P}_{\mathcal{C}}^{\mathcal{T}} \mathbf{u}) = \text{Tr}(D^{\mathcal{D}} \mathbb{P}_{\mathcal{C}}^{\mathcal{T}} \mathbf{u})$ et $\text{div} \mathbf{u} = \text{Tr}(D\mathbf{u}) = 0$, la relation (VII.6) donne

$$\text{div}^{\mathcal{D}}(\mathbb{P}_{\mathcal{C}}^{\mathcal{T}} \mathbf{u}) = \text{div}^{\mathcal{D}}(\mathbb{P}_{\mathcal{C}}^{\mathcal{T}} \mathbf{u}) - \text{div} \mathbf{u} = \frac{1}{m_{\mathcal{D}}} \sum_{\mathcal{Q} \in \Omega_{\mathcal{D}}} \int_{\mathcal{Q}} \text{Tr}(D_{\mathcal{Q}}^{\mathcal{N}} \mathbb{P}_{\mathcal{C}}^{\mathcal{T}} \mathbf{u} - D\mathbf{u}(z)) dz.$$

L'inégalité de Cauchy-Schwarz implique

$$m_{\mathcal{D}} |\text{div}^{\mathcal{D}}(\mathbb{P}_{\mathcal{C}}^{\mathcal{T}} \mathbf{u})|^2 \leq \sum_{\mathcal{Q} \in \Omega_{\mathcal{D}}} \int_{\mathcal{Q}} \|D_{\mathcal{Q}}^{\mathcal{N}} \mathbb{P}_{\mathcal{C}}^{\mathcal{T}} \mathbf{u} - D\mathbf{u}(z)\|_{\mathcal{F}}^2 dz.$$

Ceci donne la première estimation. On somme sur les diamants $\mathcal{D} \in \mathfrak{D}$ et grâce à (VII.74), on obtient la seconde estimation avec $C_{23} = \sqrt{C_{22}}$. ■

Maintenant on peut contrôler $\mathbf{R}_{s,\mathcal{Q}}^{\mathbf{u}}$, comme suit.

Lemme VII.38

On suppose que (\mathbf{u}, p) est la solution du problème (VII.1). Il existe une constante $C_{24} > 0$, dépendant uniquement de C_η , \underline{C}_η , \overline{C}_η , $\text{reg}(\mathcal{T})$ et $\sin(\epsilon_0)$, telle que

$$\|\mathbf{R}_{s,\Omega}^{\mathbf{u}}\|_2 \leq C_{24} \text{size}(\mathcal{T}) (\|\mathbf{u}\|_{(H^2(\Omega))^2} + \|p\|_{H^1(\Omega)}).$$

Démonstration : Grâce à (VII.59), on obtient

$$\|\mathbf{R}_{s,\Omega}^{\mathbf{u}}\|_2^2 \leq \sum_{\mathcal{Q} \in \Omega} m_{\mathcal{Q}} \sum_{s \in \mathcal{E}_{\mathcal{Q}}} \left(|\mathbf{R}_{s,\mathcal{Q}}^{\mathbf{u},\eta}|^2 + \|R_{\Omega}^{\mathbf{u},\text{Du}}\|_2^2 \right).$$

Premièrement, l'inégalité (VII.2) donne

$$\|R_{\Omega}^{\mathbf{u},\text{Du}}\|_2^2 \leq \overline{C}_\eta^2 \sum_{\mathcal{Q} \in \Omega} \int_{\mathcal{Q}} \|\text{Du}(x) - \text{D}_{\mathcal{Q}}^{\mathcal{N}} \mathbb{P}_{\mathcal{C}}^{\mathcal{T}} \mathbf{u}\|_{\mathcal{F}}^2 dx.$$

Puis le Lemme VII.35 conduit à

$$\|R_{\Omega}^{\mathbf{u},\text{Du}}\|_2^2 \leq \overline{C}_\eta^2 C_{22} \text{size}(\mathcal{T})^2 \sum_{\mathcal{Q} \in \Omega} \int_{\mathcal{Q}} (\|\nabla \mathbf{u}(x)\|_{\mathcal{F}}^2 + |\nabla^2 \mathbf{u}(x)|^2 + |\nabla p|^2) dx.$$

Ensuite, le Lemme VII.30 implique

$$\sum_{\mathcal{Q} \in \Omega} \sum_{s \in \mathcal{E}_{\mathcal{Q}}} m_{\mathcal{Q}} |\mathbf{R}_{s,\mathcal{Q}}^{\mathbf{u},\eta}|^2 \leq C_{19} \text{size}(\mathcal{T})^2 \sum_{\mathcal{Q} \in \Omega} \int_{\mathcal{Q}} (\|\nabla \mathbf{u}\|_{\mathcal{F}}^2 + |\nabla^2 \mathbf{u}|^2) dz.$$

On conclut en posant $C_{24} = \sqrt{\overline{C}_\eta^2 C_{22} + C_{19}}$. ■

VII.6.3 Les sauts de pression entre quarts de diamant

Lemme VII.39

On suppose que (\mathbf{u}, p) est la solution du problème (VII.1). Il existe une constante $C_{25} > 0$, dépendant uniquement de \underline{C}_η , \overline{C}_η , C_η , $\text{reg}(\mathcal{T})$ et $\sin(\epsilon_0)$, telle que

$$\sum_{s=\mathcal{Q}|\mathcal{Q}'=\mathcal{D}|\mathcal{D}' \in \mathfrak{S}} (p_{\text{ex}}^{\mathcal{Q}'} - p_{\text{ex}}^{\mathcal{Q}})^2 \leq C_{25} (\|\mathbf{u}\|_{(H^2(\Omega))^2}^2 + \|p\|_{H^1(\Omega)}^2).$$

Démonstration : Pour simplifier, on note $\mathbb{P}_m^s p := \frac{1}{m_s} \int_s p(y) dy$, pour tout $s \in \mathfrak{S}$. On ajoute $0 = \mathbb{P}_m^s p - \mathbb{P}_m^s p$ pour obtenir

$$\sum_{s=\mathcal{Q}|\mathcal{Q}'=\mathcal{D}|\mathcal{D}' \in \mathfrak{S}} (p_{\text{ex}}^{\mathcal{Q}'} - p_{\text{ex}}^{\mathcal{Q}})^2 \leq 2 \sum_{s=\mathcal{Q}|\mathcal{Q}'=\mathcal{D}|\mathcal{D}' \in \mathfrak{S}} (p_{\text{ex}}^{\mathcal{Q}'} - \mathbb{P}_m^s p)^2 + 2 \sum_{s=\mathcal{Q}|\mathcal{Q}'=\mathcal{D}|\mathcal{D}' \in \mathfrak{S}} (\mathbb{P}_m^s p - p_{\text{ex}}^{\mathcal{Q}})^2$$

Ensuite, on réorganise la somme sur les diamants $\mathcal{D} \in \mathfrak{D}$

$$\sum_{s=\mathcal{Q}|\mathcal{Q}'=\mathcal{D}|\mathcal{D}' \in \mathfrak{S}} (p_{\text{ex}}^{\mathcal{Q}'} - p_{\text{ex}}^{\mathcal{Q}})^2 \leq 4 \sum_{\mathcal{D} \in \mathfrak{D}} \sum_{\mathcal{Q} \in \Omega_{\mathcal{D}}} \sum_{s \in \partial \mathcal{Q} \cap \partial \mathcal{D}} |p_{\text{ex}}^{\mathcal{Q}} - \mathbb{P}_m^s p|^2.$$

Maintenant on ajoute $0 = \mathbb{P}_m^{\mathcal{Q}} p - \mathbb{P}_m^{\mathcal{Q}} p$ pour déduire

$$\sum_{s=\mathcal{Q}|\mathcal{Q}'=\mathcal{D}|\mathcal{D}' \in \mathfrak{S}} (p_{\text{ex}}^{\mathcal{Q}'} - p_{\text{ex}}^{\mathcal{Q}})^2 \leq 8 \sum_{\mathcal{D} \in \mathfrak{D}} \sum_{\mathcal{Q} \in \Omega_{\mathcal{D}}} |p_{\text{ex}}^{\mathcal{Q}} - \mathbb{P}_m^{\mathcal{Q}} p|^2 + 8 \sum_{\mathcal{D} \in \mathfrak{D}} \sum_{\mathcal{Q} \in \Omega_{\mathcal{D}}} \sum_{s \in \partial \mathcal{Q} \cap \partial \mathcal{D}} |\mathbb{P}_m^{\mathcal{Q}} p - \mathbb{P}_m^s p|^2.$$

Comme on a $p \in H^1(\mathcal{Q})$, le Lemme I.12, appliqué à un quart de diamant \mathcal{Q} et à un de ses côté, donne

$$|\mathbb{P}_m^{\mathcal{Q}} p - \mathbb{P}_m^s p|^2 \leq C_1 \text{reg}(\mathcal{T})^3 \int_{\mathcal{Q}} |\nabla p(z)|^2 dz. \quad (\text{VII.75})$$

On rappelle que $\tilde{p}_{\text{ex}}^{\mathcal{Q}} = \mathbb{P}_m^{\mathcal{Q}} p - p_{\text{ex}}^{\mathcal{Q}}$, ainsi le Lemme VII.35 et (VII.75) impliquent

$$\sum_{s=\mathcal{Q}|\mathcal{Q}'=\mathcal{D}|\mathcal{D}'\in\mathcal{G}} (p_{\text{ex}}^{\mathcal{Q}'} - p_{\text{ex}}^{\mathcal{Q}})^2 \leq 8C_{22}\text{size}(\mathcal{T})^2 (\|\mathbf{u}\|_{(H^2(\Omega))^2}^2 + \|p\|_{H^1(\Omega)}^2) + 8C_1\text{reg}(\mathcal{T})^3 \|p\|_{H^1(\Omega)}^2.$$

Ceci conclut la preuve avec $C_{25} = 8(C_{22} + C_1\text{reg}(\mathcal{T})^3)$. ■

VII.6.4 Fin de la démonstration du Théorème VII.25

Nous pouvons maintenant rassembler tous les résultats précédents en vue de conclure la démonstration du Théorème VII.25, commencée au début de la Section VII.6.

Démonstration : On a noté $\mathbf{e}^{\mathcal{T}} = \mathbb{P}_{\mathcal{C}}^{\mathcal{T}} \mathbf{u} - \mathbf{u}^{\mathcal{T}}$ et $e^{\mathcal{D}} = \mathbb{P}_m^{\mathcal{D}} p - p^{\mathcal{D}}$, et obtenu l'estimation suivante (VII.58)

$$\begin{aligned} \|\nabla_{\Omega}^{\mathcal{N}} \mathbf{e}^{\mathcal{T}}\|_2^2 + \|e^{\mathcal{D}}\|_2^2 &\leq \tilde{C}_1 (\|\nabla_{\Omega}^{\mathcal{N}} \mathbf{e}^{\mathcal{T}}\|_2 + \|e^{\mathcal{D}}\|_2) (\|\mathbf{R}_{s,\Omega}\|_2 + \|\text{div}^{\mathcal{D}} \mathbb{P}_{\mathcal{C}}^{\mathcal{T}} \mathbf{u}\|_2) \\ &\quad + \tilde{C}_2 \text{size}(\mathcal{T}) (\|\nabla_{\Omega}^{\mathcal{N}} \mathbf{e}^{\mathcal{T}}\|_2 + \|e^{\mathcal{D}}\|_2) \left(\sum_{s=\mathcal{Q}|\mathcal{Q}'=\mathcal{D}|\mathcal{D}'\in\mathcal{G}} (p_{\text{ex}}^{\mathcal{Q}'} - p_{\text{ex}}^{\mathcal{Q}})^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

En utilisant l'estimation $\|\mathbf{R}_{s,\Omega}\|_2 \leq 2\|\mathbf{R}_{s,\Omega}^{\mathbf{u}}\|_2 + \|\mathbf{R}_{s,\Omega}^p\|_2 + \|\tilde{p}_{\text{ex}}^{\mathcal{D}}\|_2$, le Lemme VII.26, l'estimation (VII.74), le Lemme VII.38 et le Lemme VII.37 impliquent

$$\|\mathbf{R}_{s,\Omega}\|_2 + \|\text{div}^{\mathcal{D}} \mathbb{P}_{\mathcal{C}}^{\mathcal{T}} \mathbf{u}\|_2 \leq C \text{size}(\mathcal{T}).$$

Finalement, le Lemme VII.39 conduit à

$$\|\nabla_{\Omega}^{\mathcal{N}} \mathbf{e}^{\mathcal{T}}\|_2 \leq C \text{size}(\mathcal{T}) \quad \text{et} \quad \|e^{\mathcal{D}}\|_2 \leq C \text{size}(\mathcal{T}). \quad (\text{VII.76})$$

Estimation de $\|\mathbf{u} - \mathbf{u}^{\mathcal{T}}\|_2$: On a

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}^{\mathcal{T}}\|_2 \leq \|\mathbf{u} - \mathbb{P}_{\mathcal{C}}^{\mathcal{T}} \mathbf{u}\|_2 + \|\mathbb{P}_{\mathcal{C}}^{\mathcal{T}} \mathbf{u} - \mathbf{u}^{\mathcal{T}}\|_2.$$

Le Lemme VII.27 et l'inégalité de Poincaré (Théorème IV.15) donnent

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}^{\mathcal{T}}\|_2 \leq C \text{size}(\mathcal{T}) + C \|\nabla^{\mathcal{D}} \mathbb{P}_{\mathcal{C}}^{\mathcal{T}} \mathbf{u} - \nabla^{\mathcal{D}} \mathbf{u}^{\mathcal{T}}\|_2.$$

Finalement, le Lemme VII.20 et (VII.76) conclut l'estimation de $\|\mathbf{u} - \mathbf{u}^{\mathcal{T}}\|_2$.

Estimation de $\|\mathbf{Du} - \mathbf{D}_{\Omega}^{\mathcal{N}} \mathbf{u}^{\mathcal{T}}\|_2$: On a

$$\|\mathbf{Du} - \mathbf{D}_{\Omega}^{\mathcal{N}} \mathbf{u}^{\mathcal{T}}\|_2 \leq \|\mathbf{Du} - \mathbf{D}_{\Omega}^{\mathcal{N}} \mathbb{P}_{\mathcal{C}}^{\mathcal{T}} \mathbf{u}\|_2 + \|\mathbf{D}_{\Omega}^{\mathcal{N}} \mathbb{P}_{\mathcal{C}}^{\mathcal{T}} \mathbf{u} - \mathbf{D}_{\Omega}^{\mathcal{N}} \mathbf{u}^{\mathcal{T}}\|_2.$$

Finalement, les estimations (VII.74) et (VII.76) impliquent l'estimation de $\|\mathbf{Du} - \mathbf{D}_{\Omega}^{\mathcal{N}} \mathbf{u}^{\mathcal{T}}\|_2$.

Estimation de $\|p - p^{\mathcal{D}}\|_2$: L'estimation (VII.76) conduit à

$$\|\mathbb{P}_m^{\mathcal{D}} p - p^{\mathcal{D}}\|_2 \leq C \text{size}(\mathcal{T}).$$

On conclut grâce au Lemme VII.26. ■

Il faut noter que l'on peut améliorer l'estimation sur la vitesse. Pour cela, on a besoin de faire une hypothèse sur le maillage. En effet, on a besoin que les deux angles α_{κ} et α_{ε} de la Figure VII.1 soient suffisamment éloignés. Pour chaque diamant $\mathcal{D}_{\sigma,\sigma^*}$, on choisit le point x_{σ} sur l'arête σ tel quel les angles vérifient $|\alpha_{\kappa} - \alpha_{\varepsilon}| > \epsilon_0$. Cette hypothèse n'est que théorique, en fait numériquement on n'a jamais besoin d'utiliser le critère ϵ_0 .

Corollaire VII.40

Si pour tout $\mathcal{D} \in \mathcal{D}$, on a $|\alpha_{\kappa} - \alpha_{\varepsilon}| > \epsilon_0$. On suppose que les hypothèses du Théorème VII.25 sont vérifiées. Il existe une constante $C_{26} > 0$ dépendant uniquement on $\text{reg}(\mathcal{T})$, λ , $\sin(\epsilon_0)$, C_{η} , \underline{C}_{η} , \overline{C}_{η} , $\|\mathbf{u}\|_{(H^2(\Omega))^2}$ et $\|p\|_{H^1(\Omega)}$, telle que :

$$\|\nabla \mathbf{u} - \nabla_{\Omega}^{\mathcal{N}} \mathbf{u}^{\mathcal{T}}\|_2 \leq C_{26} \text{size}(\mathcal{T}).$$

Démonstration : La difficulté de cette démonstration repose sur l'existence d'une constante $C_{27} > 0$, telle que

$$\|\nabla \mathbf{u} - \nabla_{\Omega}^{\mathcal{N}} \mathbb{P}_{\mathcal{C}}^{\mathcal{T}} \mathbf{u}\|_2 \leq C_{27} \text{size}(\mathcal{T}) (\|\mathbf{u}\|_{(H^2(\Omega))^2} + \|p\|_{H^1(\Omega)}).$$

En effet avec cette estimation, on a

$$\|\nabla \mathbf{u} - \nabla_{\Omega}^{\mathcal{N}} \mathbf{u}^{\mathcal{T}}\|_2 \leq C_{27} \text{size}(\mathcal{T}) (\|\mathbf{u}\|_{(H^2(\Omega))^2} + \|p\|_{H^1(\Omega)}) + \|\nabla_{\Omega}^{\mathcal{N}} \mathbb{P}_{\mathcal{C}}^{\mathcal{T}} \mathbf{u} - \nabla_{\Omega}^{\mathcal{N}} \mathbf{u}^{\mathcal{T}}\|_2.$$

Et finalement, (VII.76) implique l'estimation de $\|\nabla \mathbf{u} - \nabla_{\Omega}^{\mathcal{N}} \mathbf{u}^{\mathcal{T}}\|_2$. Il faut donc montrer l'existence de C_{27} . Soit $\mathcal{D} \in \mathfrak{D}$. Grâce à la condition (VII.47), il existe $\delta_{\text{ex}}^{\mathcal{D}} \in \mathcal{M}_{n\mathcal{D},2}(\mathbb{R})$ tel que $(\delta_{\text{ex}}^{\mathcal{D}} : \delta_0) = 0$ et $\mathbb{D}_{\mathcal{Q}}^{\mathcal{N}} \mathbb{P}_{\mathcal{C}}^{\mathcal{T}} \mathbf{u} = \mathbb{D}^{\mathcal{D}} \mathbb{P}_{\mathcal{C}}^{\mathcal{T}} \mathbf{u} + \frac{1}{2}(B_{\mathcal{Q}} \delta_{\text{ex}}^{\mathcal{D}} + {}^t \delta_{\text{ex}}^{\mathcal{D}} {}^t B_{\mathcal{Q}})$ pour tout $\mathcal{Q} \in \Omega_{\mathcal{D}}$. Ainsi on peut écrire $\nabla_{\mathcal{Q}}^{\mathcal{N}} \mathbb{P}_{\mathcal{C}}^{\mathcal{T}} \mathbf{u} = \nabla^{\mathcal{D}} \mathbb{P}_{\mathcal{C}}^{\mathcal{T}} \mathbf{u} + {}^t \delta_{\text{ex}}^{\mathcal{D}} {}^t B_{\mathcal{Q}}$ pour tout $\mathcal{Q} \in \Omega_{\mathcal{D}}$. En utilisant la discussion de la Section VII.1.1, on remarque qu'il existe $\widetilde{\delta}^{\mathcal{D}} \in \mathcal{M}_{n\mathcal{D},2}(\mathbb{R})$ tel que $\nabla \mathbb{P}_{\mathcal{C}}^{\mathcal{Q}} \mathbf{u} = \nabla^{\mathcal{D}} \mathbb{P}_{\mathcal{C}}^{\mathcal{T}} \mathbf{u} + {}^t \widetilde{\delta}^{\mathcal{D}} {}^t B_{\mathcal{Q}}$, en utilisant la fonction affine $\Pi_{\mathcal{D}} \mathbb{P}_{\mathcal{C}}^{\mathcal{T}} \mathbf{u}$ (voir la Figure VII.2) on a même les valeurs :

$$\begin{aligned} \widetilde{\delta}_{\mathcal{K}} &= \mathbf{u}(x_{\sigma_{\mathcal{K}}}) - \Pi_{\mathcal{D}} \mathbb{P}_{\mathcal{C}}^{\mathcal{T}} \mathbf{u}(x_{\sigma_{\mathcal{K}}}) & \widetilde{\delta}_{\mathcal{L}} &= \mathbf{u}(x_{\sigma_{\mathcal{L}}}) - \Pi_{\mathcal{D}} \mathbb{P}_{\mathcal{C}}^{\mathcal{T}} \mathbf{u}(x_{\sigma_{\mathcal{L}}}) \\ \widetilde{\delta}_{\mathcal{K}^*} &= \mathbf{u}(x_{\sigma_{\mathcal{K}^*}}) - \Pi_{\mathcal{D}} \mathbb{P}_{\mathcal{C}}^{\mathcal{T}} \mathbf{u}(x_{\sigma_{\mathcal{K}^*}}) & \widetilde{\delta}_{\mathcal{L}^*} &= \mathbf{u}(x_{\sigma_{\mathcal{L}^*}}) - \Pi_{\mathcal{D}} \mathbb{P}_{\mathcal{C}}^{\mathcal{T}} \mathbf{u}(x_{\sigma_{\mathcal{L}^*}}). \end{aligned} \quad (\text{VII.77})$$

On pose $\widehat{\delta}^{\mathcal{D}} = \widetilde{\delta}^{\mathcal{D}} - \delta_{\text{ex}}^{\mathcal{D}}$, on en déduit que $\nabla \mathbb{P}_{\mathcal{C}}^{\mathcal{Q}} \mathbf{u} - \nabla_{\mathcal{Q}}^{\mathcal{N}} \mathbb{P}_{\mathcal{C}}^{\mathcal{T}} \mathbf{u} = {}^t \widehat{\delta}^{\mathcal{D}} {}^t B_{\mathcal{Q}}$ et $\mathbb{D} \mathbb{P}_{\mathcal{C}}^{\mathcal{Q}} \mathbf{u} - \mathbb{D}_{\mathcal{Q}}^{\mathcal{N}} \mathbb{P}_{\mathcal{C}}^{\mathcal{T}} \mathbf{u} = \frac{1}{2}(B_{\mathcal{Q}} \widehat{\delta}^{\mathcal{D}} + {}^t \widehat{\delta}^{\mathcal{D}} {}^t B_{\mathcal{Q}})$.

Comme dans le cas $\alpha_{\mathcal{K}} \neq \alpha_{\mathcal{L}}$, δ_0 est nul, on a forcément $(\widehat{\delta}^{\mathcal{D}} : \delta_0) = 0$ et ainsi le Lemme VII.11 implique

$$\sum_{\mathcal{Q} \in \Omega_{\mathcal{D}}} m_{\mathcal{Q}} \|B_{\mathcal{Q}} \widehat{\delta}^{\mathcal{D}}\|_{\mathcal{F}}^2 \leq C_5 \sum_{\mathcal{Q} \in \Omega_{\mathcal{D}}} m_{\mathcal{Q}} \|\mathbb{D} \mathbb{P}_{\mathcal{C}}^{\mathcal{Q}} \mathbf{u} - \mathbb{D}_{\mathcal{Q}}^{\mathcal{N}} \mathbb{P}_{\mathcal{C}}^{\mathcal{T}} \mathbf{u}\|_{\mathcal{F}}^2.$$

Puis le Lemme VII.35 donne

$$\sum_{\mathcal{Q} \in \Omega_{\mathcal{D}}} m_{\mathcal{Q}} \|B_{\mathcal{Q}} \widehat{\delta}^{\mathcal{D}}\|_{\mathcal{F}}^2 \leq C_5 C_{22} d_{\mathcal{D}}^2 \sum_{\mathcal{Q} \in \Omega_{\mathcal{D}}} \int_{\mathcal{Q}} (\|\nabla \mathbf{u}(z)\|_{\mathcal{F}}^2 + |\nabla^2 \mathbf{u}(z)|^2 + |\nabla p(z)|^2) dz. \quad (\text{VII.78})$$

La Proposition VII.29 et (VII.78) concluent le résultat. ■

Remarque VII.41

Dans le cas où $\alpha_{\mathcal{K}} = \alpha_{\mathcal{L}}$, on écrit $\widehat{\delta}^{\mathcal{D}} = \widehat{\delta}^{\mathcal{D}}_{\perp} + \widehat{\delta}^{\mathcal{D}}_{\parallel}$ avec $(\widehat{\delta}^{\mathcal{D}}_{\perp} : \delta_0) = 0$. On en déduit que

$$\sum_{\mathcal{Q} \in \Omega_{\mathcal{D}}} m_{\mathcal{Q}} \|B_{\mathcal{Q}} \widehat{\delta}^{\mathcal{D}}\|_{\mathcal{F}}^2 \leq 2 \sum_{\mathcal{Q} \in \Omega_{\mathcal{D}}} m_{\mathcal{Q}} \|B_{\mathcal{Q}} (\widehat{\delta}^{\mathcal{D}}_{\perp} - \delta_{\text{ex}}^{\mathcal{D}})\|_{\mathcal{F}}^2 + 2 \sum_{\mathcal{Q} \in \Omega_{\mathcal{D}}} m_{\mathcal{Q}} \|B_{\mathcal{Q}} (\widehat{\delta}^{\mathcal{D}}_{\parallel})\|_{\mathcal{F}}^2.$$

On obtient $(\widehat{\delta}^{\mathcal{D}}_{\perp} - \delta_{\text{ex}}^{\mathcal{D}} : \delta_0) = 0$. On remarque que $B_{\mathcal{Q}} (\widehat{\delta}^{\mathcal{D}}_{\perp} - \delta_{\text{ex}}^{\mathcal{D}}) + {}^t (\widehat{\delta}^{\mathcal{D}}_{\perp} - \delta_{\text{ex}}^{\mathcal{D}}) {}^t B_{\mathcal{Q}} = 2\mathbb{D} \mathbb{P}_{\mathcal{C}}^{\mathcal{Q}} \mathbf{u} - 2\mathbb{D}_{\mathcal{Q}}^{\mathcal{N}} \mathbb{P}_{\mathcal{C}}^{\mathcal{T}} \mathbf{u}$. Par conséquent, les Lemmes VII.11 et VII.35 impliquent

$$\sum_{\mathcal{Q} \in \Omega_{\mathcal{D}}} m_{\mathcal{Q}} \|B_{\mathcal{Q}} (\widehat{\delta}^{\mathcal{D}}_{\perp} - \delta_{\text{ex}}^{\mathcal{D}})\|_{\mathcal{F}}^2 \leq C_5 C_{22} d_{\mathcal{D}}^2 \int_{\mathcal{Q}} (\|\nabla \mathbf{u}(z)\|_{\mathcal{F}}^2 + |\nabla^2 \mathbf{u}(z)|^2 + |\nabla p(z)|^2) dz.$$

De plus dans la démonstration du Lemme VII.11, on a montré que

$$\sum_{\mathcal{Q} \in \Omega_{\mathcal{D}}} m_{\mathcal{Q}} \|B_{\mathcal{Q}} (\widehat{\delta}^{\mathcal{D}}_{\parallel})\|_{\mathcal{F}}^2 \leq C \|\widehat{\delta}^{\mathcal{D}}_{\parallel}\|_2^2 \leq C \|\widehat{\delta}^{\mathcal{D}}\|_2^2.$$

On obtient en utilisant (VII.77) que

$$\|\widehat{\delta}^{\mathcal{D}}\|_2^2 \leq C \sum_{\mathcal{Q} \in \Omega_{\mathcal{D}}} \int_{\mathcal{Q}} (\|\nabla \mathbf{u}(z)\|_{\mathcal{F}}^2 + |\nabla^2 \mathbf{u}(z)|^2) dz.$$

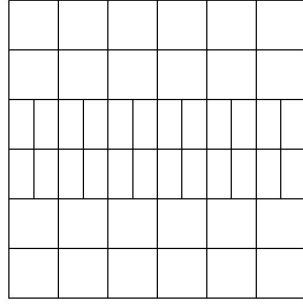
Finalement, on en déduit que

$$\sum_{\mathcal{Q} \in \Omega_{\mathcal{D}}} m_{\mathcal{Q}} \|B_{\mathcal{Q}} \widehat{\delta}^{\mathcal{D}}\|_{\mathcal{F}}^2 \leq C(d_{\mathcal{D}}^2 + 1) \sum_{\mathcal{Q} \in \Omega_{\mathcal{D}}} \int_{\mathcal{Q}} (\|\nabla \mathbf{u}(z)\|_{\mathcal{F}}^2 + |\nabla^2 \mathbf{u}(z)|^2 + |\nabla p(z)|^2) dz.$$

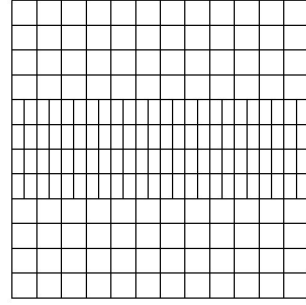
VII.7 Tests numériques

On présente quelques résultats numériques obtenus sur le domaine $\Omega =]0, 1[^2$. Dans toutes les simulations numériques le paramètre de stabilisation est fixé à $\lambda = 10^{-3}$.

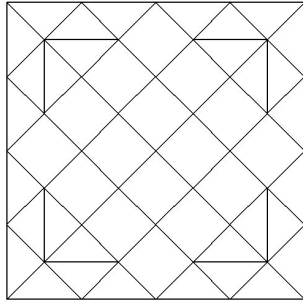
On rappelle que pour illustrer l'estimation d'erreur, la famille de maillages est obtenue en raffinant successivement et uniformément le maillage original. Afin de mettre en évidence le processus de raffinement choisi, on présente sur les Figures VII.8(a), VII.8(c) et VII.8(e) le maillage primal original et sur les Figures VII.8(b), VII.8(d) et VII.8(f) le maillage primal obtenu après le processus de raffinement. Plus précisément, la famille de maillages, correspondant à la Figure VII.8, est obtenue en divisant chaque arête primale en deux. On précise que les centres $(x_\kappa)_\kappa$ sont les barycentres des mailles primales.



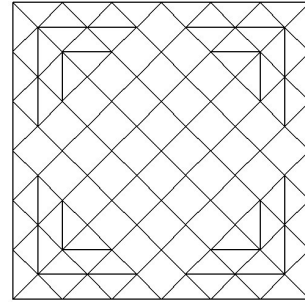
(a) Maillage des quadrangles non-conformes grossier.



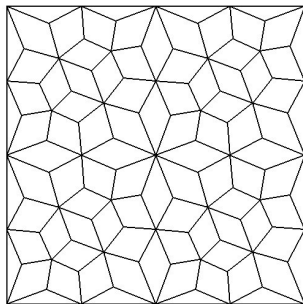
(b) Maillage des quadrangles non-conformes raffiné.



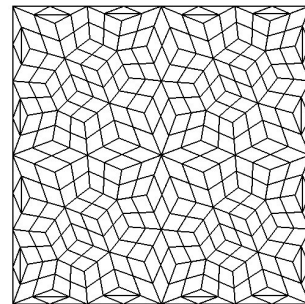
(c) Maillage de losanges et triangles grossier.



(d) Maillage de losanges et triangles raffiné.



(e) Maillage de quadrangles et triangles grossier.



(f) Maillage de quadrangles et triangles raffiné.

FIG. VII.8 – Maillages utilisés.

On rappelle que pour toute la théorie développée ici, pour chaque diamant $\mathcal{D} \in \mathfrak{D}$, on a supposé que les deux angles α_κ et $\alpha_\mathcal{L}$ de la Figure VII.1 sont soit les mêmes, soit suffisamment éloignés, c'est-à-dire $|\alpha_\kappa - \alpha_\mathcal{L}| > \epsilon_0$. Cette restriction n'est pas nécessaire sur le plan numérique. En effet, pour tous les tests numériques de cette section, on obtient les mêmes résultats qu'on utilise le maillage dual direct ou le maillage dual barycentrique. De même, on observe que dans tous les tests numériques l'ordre de convergence du gradient de vitesse en norme L^2 est bien 1 voire plus grand, même pour le maillage dual direct, exclu par les hypothèses du Corollaire VII.40.

Pour chaque cas test, on donne l'expression de la solution exacte (\mathbf{u}, p) et la viscosité η desquelles on déduit le terme source \mathbf{f} et la condition aux bords \mathbf{g} pour que (\mathbf{u}, p) soit la solution du problème (VII.1).

On définit une projection centrée sur Ω :

$$\mathbb{P}_c^\Omega p = (p(x_\varrho))_{\varrho \in \Omega}.$$

Dans les Figures VII.9, VII.10 et VII.11, on compare les trois schémas suivants : le schéma DDFV (VI.4), le schéma m-DDFV (VII.34) et le schéma m-DDFV- Δ^D (VII.34) avec le terme de stabilisation $-\lambda d_\Omega^2 \Delta^\Omega p^\Omega$ au lieu de $-\lambda d_\Omega^2 \Delta^\Omega p^\Omega$. Cette comparaison est faite en terme de la norme L^2 pour la pression $\frac{\|\mathbb{P}_c^\Omega p - p^\Omega\|_2}{\|\mathbb{P}_c^\Omega p\|_2}$, pour le gradient de vitesse $\frac{\|\mathbb{P}_c^\Omega \nabla \mathbf{u} - \nabla_\Omega^\Omega \mathbf{u}^\Omega\|_2}{\|\mathbb{P}_c^\Omega \nabla \mathbf{u}\|_2}$ et pour la vitesse $\frac{\|\mathbb{P}_c^\Omega \mathbf{u} - \mathbf{u}^\Omega\|_2}{\|\mathbb{P}_c^\Omega \mathbf{u}\|_2}$ respectivement, en fonction du pas du maillage $\text{size}(\mathcal{T})$ en échelle logarithmique. Les ordres de convergence donnés sur les Figures VII.9, VII.10 et VII.11 sont calculés à l'aide d'une approximation par les moindres carrés des résultats obtenus.

VII.7.1 Test 1 - Viscosité discontinue et pression régulière

On reprend le cas test de la Section VI.6.3 du chapitre précédent. On rappelle que la vitesse, la pression et la viscosité valent $\mathbf{u}(x, y) = \begin{pmatrix} u(x, y) \\ 0 \end{pmatrix}$, avec :

$$u(x, y) = \begin{cases} y^2 - 0.5y & \text{si } y > 0.5 \\ 10^4(y^2 - 0.5y) & \text{sinon.} \end{cases}, \quad p(x, y) = 2x - 1 \quad \text{et} \quad \eta(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } y > 0.5 \\ 10^{-4} & \text{sinon.} \end{cases}$$

Ainsi, \mathbf{Du} et η sont discontinues à travers l'interface Γ localisée en $\{y = 0.5\}$. On utilise le maillage primal non-conforme de la Figure VII.8(a), localement raffiné le long de la discontinuité. Ce maillage primal respecte la discontinuité de la viscosité. Comme on l'a vu dans la Section VI.6.3, le schéma DDFV converge encore

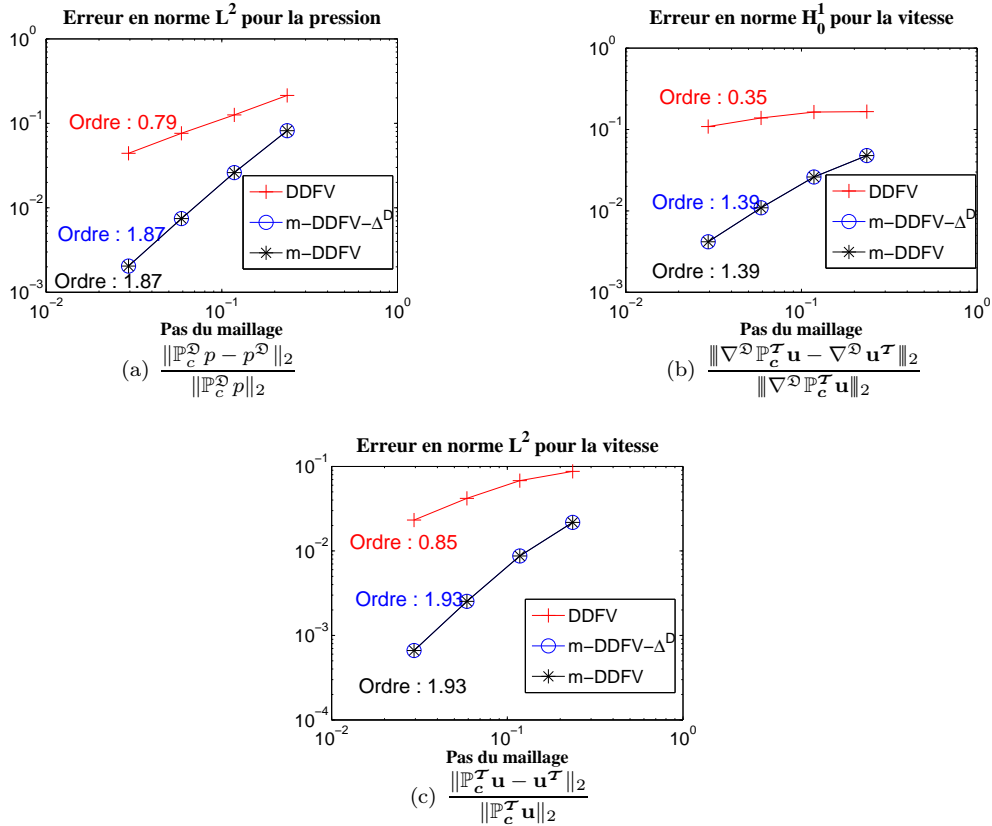


FIG. VII.9 – Test 1, viscosité discontinue sur le maillage primal de la Figure VII.8(a).

mais il n'est plus d'ordre 1 (voir la Figure VII.9). Le schéma m-DDFV est quant à lui d'ordre 1.9 en vitesse

et en pression en norme L^2 et d'ordre 1.4 en vitesse en norme H_0^1 . On remarque que les ordres de convergence obtenus sont meilleurs que ceux prédit par la théorie donnés par le Théorème VII.25. Ceci est lié à une certaine uniformité des mailles loin de la zone de raffinement. En outre, on souligne que le taux de convergence n'est pas sensible à la présence de volumes de contrôle non conformes. Avec l'approche m-DDFV, on a amélioré non seulement l'ordre de convergence mais aussi la précision du schéma sur le maillage grossier. En effet, l'erreur (pour toutes les normes considérées) du schéma m-DDFV obtenue sur le maillage grossier est plus petite que celle du schéma DDFV obtenue sur le maillage le plus fin lorsque l'on considère la vitesse et que celle du schéma DDFV obtenue sur le maillage deux fois raffiné lorsque l'on considère la pression.

La Figure VII.9 montre également que dans ce cas les erreurs obtenues en utilisant le schéma m-DDFV- Δ^D sont essentiellement les mêmes que celles obtenues en utilisant le schéma m-DDFV. Ceci nous amène à croire que le nouveau terme de stabilisation $\underline{\Delta}^{\mathfrak{D}}$, un peu plus technique à programmer, n'est pas forcément utile.

On compare également le nombre d'éléments non nuls des matrices correspondant aux trois schémas (voir le Tableau VII.1) pour les cinq maillages successivement raffinés, c'est-à-dire la première ligne du Tableau VII.1 correspond au maillage grossier, la seconde correspond au maillage raffiné une fois, la troisième correspond au maillage raffiné deux fois, Ainsi le nouveau terme de stabilisation $\underline{\Delta}^{\mathfrak{D}}$ ajoute très peu d'éléments comparé

Nombre total d'inconnues	Nombre d'éléments non nul		
	le schéma DDFV	le schéma m-DDFV- Δ^D	le schéma m-DDFV
392	3 863	3 863	3 959
1 358	14 421	14 421	14 613
5 018	55 551	55 551	55 935
19 250	217 881	217 881	218 645
75 362	862 847	862 847	864 373

TAB. VII.1 – Nombre d'éléments non nuls dans la matrice pour les trois différents schémas.

aux deux autres schémas moins d'un pourcent d'éléments en plus. Comme les erreurs obtenues pour le schéma m-DDFV et le schéma m-DDFV- Δ^D sont équivalentes, l'ajout de ces éléments dans la matrice ne semble pas améliorer les résultats ici. Par contre, la différence entre le schéma m-DDFV- Δ^D et le schéma DDFV se situe dans le tenseur des contraintes visqueuses. On a vu que l'ordre de convergence est nettement amélioré ainsi que la précision de l'erreur alors qu'on observe que les matrices ont exactement le même nombre d'éléments non nuls. Ainsi les inconnues intermédiaires dans le tenseur des contraintes visqueuses améliore la précision des solutions discrètes sans changer le profil de la matrice du système dans ce cas. De plus, le stencil moyen, c'est-à-dire le rapport entre le nombre d'éléments non nuls de la matrice et le nombre de lignes de la matrice, est semblable pour les trois schémas, il est compris entre 10 et 11.

Si on considère maintenant le maillage primal de la Figure VII.8(c). Dans ce cas, c'est le maillage diamant qui respecte la discontinuité de la viscosité. Comme la viscosité est constante sur chaque diamant, le schéma DDFV, le schéma m-DDFV et le schéma m-DDFV- Δ^D sont exactement les mêmes. En effet, dans ce cas là, les inconnues artificielles $\delta^{\mathfrak{D}}$ sont nulles et les pressions $p^{\mathfrak{D}}$ valent $p^{\mathfrak{D}}$. Ainsi le gradient modifié $\nabla_{\Omega}^{\mathfrak{N}}$ vaut le gradient discret $\nabla^{\mathfrak{D}}$, de même pour le tenseur des taux de déformation modifié $D_{\Omega}^{\mathfrak{N}}$ qui vaut $D^{\mathfrak{D}}$, et le nouveau terme de stabilisation $\underline{\Delta}^{\mathfrak{D}} p^{\mathfrak{D}}$ vaut $\Delta^{\mathfrak{D}} p^{\mathfrak{D}}$. On observe les ordres de convergence suivants 1.6, 1.5 pour le gradient de vitesse et la pression en norme L^2 . On constate la super convergence en norme L^2 pour la vitesse.

VII.7.2 Test 2 - Viscosité discontinue et pression discontinue

On considère maintenant un cas test avec une viscosité et une pression discontinue à travers l'interface Γ localisée en $\{x = 0.5\}$. On prend la viscosité discontinue suivante :

$$\eta(x, y) = \begin{cases} \eta_1 := 10^2 & \text{si } x \leq 0.5 \\ \eta_2 := 10^{-2} & \text{sinon.} \end{cases}$$

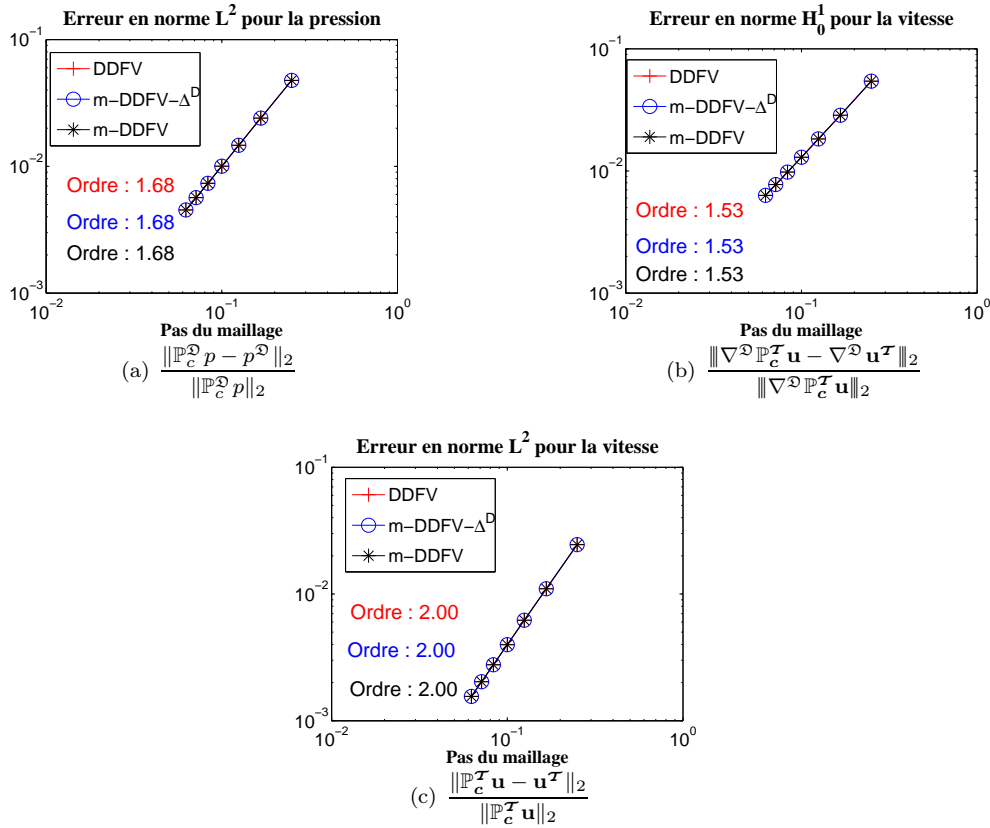


FIG. VII.10 – Test 1, viscosité discontinue sur le maillage primal de la Figure VII.8(c).

On pose $c = -\frac{\eta_2 \pi}{\eta_1 + 0.5 \eta_2 \pi}$. La solution exacte est donnée par

$$\mathbf{u}(x, y) = \begin{pmatrix} \begin{cases} (x - 0.5)(cx + \sin(5.0\pi x)) \frac{4.0\pi \cos(4.0\pi y)}{0.5c + 1}, & \text{si } x \leq 0.5 \\ (x - 0.5)(\cos(\pi x) + 1)4.0\pi \cos(4.0\pi y), & \text{sinon.} \end{cases} \\ \begin{cases} -(cx + \sin(5.0\pi x) + (x - 0.5)(c + 5.0\pi \cos(5.0\pi x))) \frac{\sin(4.0\pi y)}{0.5c + 1}, & \text{si } x \leq 0.5 \\ -(\cos(\pi x) + 1 - \pi(x - 0.5) \sin(\pi x)) \sin(4.0\pi y), & \text{sinon.} \end{cases} \end{pmatrix},$$

$$p(x, y) = \begin{cases} 8.0\pi(\eta_1 - \eta_2) \cos(4\pi y) + \cos(4\pi x) \sin(4\pi y), & \text{si } x \leq 0.5 \\ \cos(4\pi x) \sin(4\pi y), & \text{sinon.} \end{cases}$$

On utilise le maillage des quadrangles et triangles de la Figure VII.8(e). Dans ce cas, c'est le maillage dual qui respecte la discontinuité de la viscosité.

Comme le prédit le Théorème VII.25, on observe, sur la Figure VII.11, que seulement le schéma m-DDFV est d'ordre 1 en norme L^2 pour le gradient de vitesse et pour la pression, ceci semble optimal dans ce cas. On constate la super convergence en norme L^2 pour la vitesse pour le schéma m-DDFV. Pour ce cas test, on observe que le schéma m-DDFV- Δ^D est encore un peu meilleur que le schéma DDFV qui converge encore, et que le schéma m-DDFV- Δ^D converge également mais il n'est plus d'ordre 1. Par conséquent le schéma m-DDFV- Δ^D n'est plus équivalent au schéma m-DDFV. On a donc vraiment besoin de travailler avec le terme de stabilisation $\underline{\Delta}^D$.

On compare également le nombre d'éléments non nuls des matrices correspondant aux trois schémas (voir le Tableau VII.2) pour les cinq maillages successivement raffinés, c'est-à-dire la première ligne du Tableau VII.2 correspond au maillage grossier, la seconde correspond au maillage raffiné une fois, la troisième correspond au maillage raffiné deux fois, Pour ce cas test, les matrices du schéma m-DDFV- Δ^D et du schéma DDFV ne possèdent plus exactement le même nombre d'éléments non nuls. L'ajout de ces éléments améliore un peu la précision des erreurs obtenues. D'autre part, le nouveau terme de stabilisation $\underline{\Delta}^D$ ajoute également très peu d'éléments comparé aux deux autres schémas : moins d'un pour cent d'éléments en plus. Néanmoins l'ajout de ces éléments dans la matrice augmente l'ordre de convergence du schéma m-DDFV. En fait, pour les trois schémas, les nombres d'éléments non nuls sont équivalents. Pourtant l'approche m-DDFV dans le tenseur des

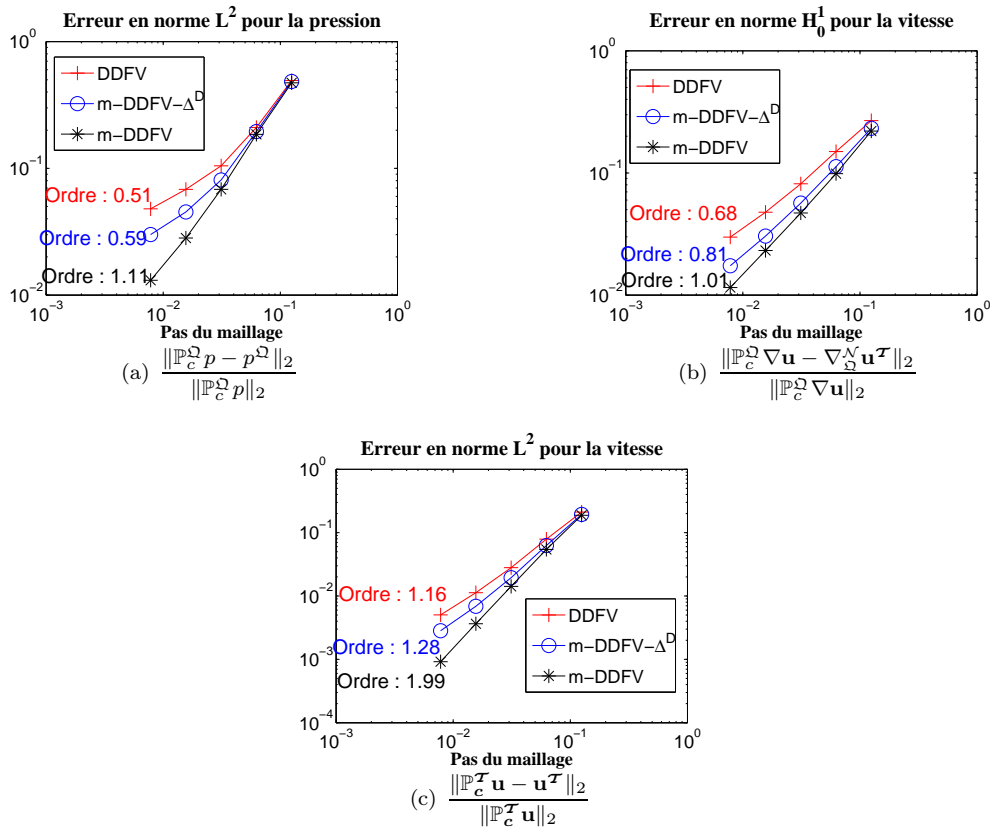


FIG. VII.11 – Test 2, viscosité discontinue et pression discontinue sur le maillage primal de la Figure VII.8(e).

contraintes visqueuses et le terme de stabilisation améliore la précision des solutions discrètes et l'ordre de convergence du schéma en changeant très peu le profil de la matrice du système. De plus, le stencil moyen, c'est-à-dire le rapport entre le nombre d'éléments non nuls de la matrice et le nombre de lignes de la matrice, est semblable pour les trois schémas, il est compris entre 17 et 19.

Nombre total d'inconnues	Nombre d'éléments non nul		
	le schéma DDFV	le schéma m-DDFV- Δ^D	le schéma m-DDFV
2 226	39 363	39 379	39 443
8 674	159 763	159 797	159 927
34 242	644 019	644 093	644 363
136 066	2 586 355	2 586 495	2 587 120
542 466	10 366 323	10 366 645	10 368 019

TAB. VII.2 – Nombre d'éléments non nuls dans la matrice pour les trois différents schémas.

VII.7.3 Quelques remarques sur l'implémentation

Comme dans la Section VI.6.4, on écrit le schéma (VII.34) de la manière suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } \mathbf{u}^\tau \in \mathbb{E}_0 \text{ et } p^\mathfrak{D} \in \mathbb{R}^\mathfrak{D} \text{ tels que,} \\ \forall \kappa \in \mathfrak{M}, \quad \sum_{\mathcal{D}_{\sigma,\sigma^*} \in \mathfrak{D}_\kappa} \mathbf{F}_{\kappa,\mathcal{D}_{\sigma,\sigma^*}}(\mathbf{u}^\tau, p^\mathfrak{D}) = m_\kappa \mathbf{f}_\kappa, \\ \forall \kappa^* \in \mathfrak{M}^*, \quad \sum_{\mathcal{D}_{\sigma,\sigma^*} \in \mathfrak{D}_{\kappa^*}} \mathbf{F}_{\kappa^*,\mathcal{D}_{\sigma,\sigma^*}}(\mathbf{u}^\tau, p^\mathfrak{D}) = m_{\kappa^*} \mathbf{f}_{\kappa^*}, \\ \quad \text{avec } \mathbf{F}_{\kappa,\mathcal{D}_{\sigma,\sigma^*}}(\mathbf{u}^\tau, p^\mathfrak{D}) = m_\sigma (-2D_{\mathfrak{D}}^{\eta,\mathcal{N}} \mathbf{u}^\tau + p^\mathfrak{D} \text{Id}) \cdot \tilde{\mathbf{n}}_{\sigma\kappa}, \quad \text{si } \mathcal{D}_{\sigma,\sigma^*} \in \mathfrak{D}_\kappa, \\ \quad \text{avec } \mathbf{F}_{\kappa^*,\mathcal{D}_{\sigma,\sigma^*}}(\mathbf{u}^\tau, p^\mathfrak{D}) = m_{\sigma^*} (-2D_{\mathfrak{D}}^{\eta,\mathcal{N}} \mathbf{u}^\tau + p^\mathfrak{D} \text{Id}) \cdot \tilde{\mathbf{n}}_{\sigma^*\kappa^*}, \quad \text{si } \mathcal{D}_{\sigma,\sigma^*} \in \mathfrak{D}_{\kappa^*}, \\ \forall \mathcal{D} \in \mathfrak{D}, \quad \text{div}^\mathcal{D}(\mathbf{u}^\tau) - \lambda d_{\mathcal{D}}^2 \underline{\Delta}^\mathcal{D} p^\mathfrak{D} = 0, \\ \sum_{\mathcal{D} \in \mathfrak{D}} m_{\mathcal{D}} p^\mathfrak{D} = 0. \end{array} \right. \quad (\text{VII.79})$$

La différence avec l'implémentation du schéma de la Section VI.6.4 se situe dans le calcul des flux numériques et dans l'équation du bilan de masse sur les diamants. Tout d'abord, on rappelle la définition du tenseur des contraintes visqueuses $D_{\mathfrak{D}}^{\eta,\mathcal{N}} \mathbf{u}^\tau$, pour tout $\mathcal{D} \in \mathfrak{D}$:

$$2D_{\mathfrak{D}}^{\eta,\mathcal{N}} \mathbf{u}^\tau = \frac{1}{m_{\mathcal{D}}} \sum_{\mathcal{Q} \in \Omega_{\mathcal{D}}} m_{\mathcal{Q}} \eta_{\mathcal{Q}} \left(2D^{\mathcal{D}} \mathbf{u}^\tau + {}^t\delta^{\mathcal{D}t} B_{\mathcal{Q}} + B_{\mathcal{Q}} \delta^{\mathcal{D}} \right).$$

Il faut donc évaluer les termes $D^{\mathcal{D}} \mathbf{u}^\tau \cdot \tilde{\mathbf{n}}_{\sigma\kappa}$ et $({}^t\delta^{\mathcal{D}t} B_{\mathcal{Q}} + B_{\mathcal{Q}} \delta^{\mathcal{D}}) \cdot \tilde{\mathbf{n}}_{\sigma\kappa}$ pour les flux normaux des mailles primales.

Le terme $2D^{\mathcal{D}} \mathbf{u}^\tau \cdot \tilde{\mathbf{n}}_{\sigma\kappa}$: grâce à la Définition IV.5 du tenseur des taux de déformation discret, pour chaque diamant, on peut écrire

$$\begin{aligned} 2D^{\mathcal{D}} \mathbf{u}^\tau \cdot \tilde{\mathbf{n}}_{\sigma\kappa} &= \text{Du_N} \cdot V, \\ 2D^{\mathcal{D}} \mathbf{u}^\tau \cdot \tilde{\mathbf{n}}_{\sigma^*\kappa^*} &= \text{Du_NS} \cdot V, \end{aligned} \quad (\text{VII.80})$$

avec le vecteur V dans \mathbb{R}^5 suivant

$$V = \begin{pmatrix} \mathbf{u}_\kappa - \mathbf{u}_{\mathcal{L}} \\ \mathbf{u}_{\kappa^*} - \mathbf{u}_{\mathcal{L}^*} \\ p^\mathfrak{D} \end{pmatrix},$$

et Du_N , Du_NS les matrices 2×5 suivantes

$$\begin{aligned} \text{Du_N} &= \begin{pmatrix} \frac{m_\sigma}{2m_{\mathcal{D}}} (\text{Id} + \tilde{\mathbf{n}}_{\sigma\kappa} \otimes \tilde{\mathbf{n}}_{\sigma\kappa}) & \frac{m_{\sigma^*}}{2m_{\mathcal{D}}} (\text{Id} + \tilde{\mathbf{n}}_{\sigma^*\kappa^*} \otimes \tilde{\mathbf{n}}_{\sigma\kappa}) & 0 \end{pmatrix}, \\ \text{Du_NS} &= \begin{pmatrix} \frac{m_\sigma}{2m_{\mathcal{D}}} (\text{Id} + \tilde{\mathbf{n}}_{\sigma\kappa} \otimes \tilde{\mathbf{n}}_{\sigma^*\kappa^*}) & \frac{m_{\sigma^*}}{2m_{\mathcal{D}}} (\text{Id} + \tilde{\mathbf{n}}_{\sigma^*\kappa^*} \otimes \tilde{\mathbf{n}}_{\sigma^*\kappa^*}) & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Reste à exprimer $\frac{1}{m_{\mathcal{D}}} \sum_{\mathcal{Q} \in \Omega_{\mathcal{D}}} m_{\mathcal{Q}} \eta_{\mathcal{Q}} \left({}^t\delta^{\mathcal{D}t} B_{\mathcal{Q}} + B_{\mathcal{Q}} \delta^{\mathcal{D}} \right) \cdot \tilde{\mathbf{n}}_{\sigma\kappa}$ en fonction de V . Pour cela, on calcule d'abord les inconnues intermédiaires $(\delta^{\mathcal{D}}, p^{\mathfrak{D}})$.

Calcul des inconnues intermédiaires $(\delta^{\mathcal{D}}, p^{\mathfrak{D}})$: on commence par expliquer l'implémentation du calcul des inconnues intermédiaires $(\delta^{\mathcal{D}}, p^{\mathfrak{D}})$ pour chaque diamant. En effet avant d'implémenter la matrice correspondant au système (VII.79), on résout pour chaque diamant $\mathcal{D} \in \mathfrak{D}$ le système (VII.14) vérifié par $(\delta^{\mathcal{D}}, p^{\mathfrak{D}}) \in \mathcal{M}_{n_{\mathcal{D}},2}(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^{n_{\mathcal{D}}}$. On présente le cas d'un diamant intérieur $\mathcal{D} \in \mathfrak{D}_{\text{int}}$, ainsi on a $n_{\mathcal{D}} = 4$. On écrit le système (VII.14) comme un système linéaire rectangle $\overline{A}X = b$ avec $\overline{A} \in \mathcal{M}_{14,12}(\mathbb{R})$ et $b \in \mathbb{R}^{14}$, donnés par :

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} A & C \\ B & 0 \\ 0 & D \\ E & 0 \end{pmatrix},$$

avec $A \in \mathcal{M}_{8,8}(\mathbb{R})$, dépendant de $\eta_{\mathcal{Q}}$, de $m_{\mathcal{Q}}$, de $\tilde{\mathbf{n}}_{\sigma\kappa}$, de $\tilde{\mathbf{n}}_{\sigma\kappa\kappa^*}$ et de $\tilde{\mathbf{n}}_{\sigma_{\mathcal{L}}\kappa^*}$, $C \in \mathcal{M}_{8,4}(\mathbb{R})$, dépendant de $\tilde{\mathbf{n}}_{\sigma\kappa}$, de $\tilde{\mathbf{n}}_{\sigma\kappa\kappa^*}$ et de $\tilde{\mathbf{n}}_{\sigma_{\mathcal{L}}\kappa^*}$, $B \in \mathcal{M}_{4,8}(\mathbb{R})$, dépendant de $m_{\mathcal{Q}}$, de $\tilde{\mathbf{n}}_{\sigma\kappa}$, de $\tilde{\mathbf{n}}_{\sigma\kappa\kappa^*}$ et de $\tilde{\mathbf{n}}_{\sigma_{\mathcal{L}}\kappa^*}$, $D \in \mathcal{M}_{1,4}(\mathbb{R})$,

dépendant de $m_{\mathcal{Q}}$, $E \in \mathcal{M}_{1,8}(\mathbb{R})$, dépendant de $m_{\mathcal{Q}}$, de $\vec{\mathbf{n}}_{\sigma\kappa}$, de $\vec{\mathbf{n}}_{\sigma\kappa\kappa^*}$ et de $\vec{\mathbf{n}}_{\sigma\mathcal{L}\kappa^*}$ et

$$b = \begin{pmatrix} 2(\eta_{\mathcal{Q}\kappa,\kappa^*} - \eta_{\mathcal{Q}\mathcal{L},\kappa^*})D^{\mathcal{D}}\mathbf{u}^{\mathcal{T}}.\vec{\mathbf{n}}_{\sigma\kappa} \\ 2(\eta_{\mathcal{Q}\kappa,\mathcal{L}^*} - \eta_{\mathcal{Q}\mathcal{L},\mathcal{L}^*})D^{\mathcal{D}}\mathbf{u}^{\mathcal{T}}.\vec{\mathbf{n}}_{\sigma\kappa} \\ 2(\eta_{\mathcal{Q}\kappa,\kappa^*} - \eta_{\mathcal{Q}\kappa,\mathcal{L}^*})D^{\mathcal{D}}\mathbf{u}^{\mathcal{T}}.\vec{\mathbf{n}}_{\sigma\kappa\kappa^*} \\ 2(\eta_{\mathcal{Q}\mathcal{L},\kappa^*} - \eta_{\mathcal{Q}\mathcal{L},\mathcal{L}^*})D^{\mathcal{D}}\mathbf{u}^{\mathcal{T}}.\vec{\mathbf{n}}_{\sigma\mathcal{L}\kappa^*} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ m_{\mathcal{D}}p^{\mathcal{D}} \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{14}.$$

Grâce à la relation (VII.80), on peut écrire b sous la forme $\bar{b}.V$ avec \bar{b} la matrice de taille 14×5 dont ses 8 premières lignes sont données par :

$$\begin{pmatrix} (\eta_{\mathcal{Q}\kappa,\kappa^*} - \eta_{\mathcal{Q}\mathcal{L},\kappa^*})\text{Du_N} \\ (\eta_{\mathcal{Q}\kappa,\mathcal{L}^*} - \eta_{\mathcal{Q}\mathcal{L},\mathcal{L}^*})\text{Du_N} \\ (\eta_{\mathcal{Q}\kappa,\kappa^*} - \eta_{\mathcal{Q}\kappa,\mathcal{L}^*})\text{Du_NS} \\ (\eta_{\mathcal{Q}\mathcal{L},\kappa^*} - \eta_{\mathcal{Q}\mathcal{L},\mathcal{L}^*})\text{Du_NS} \end{pmatrix},$$

ses lignes 9 à 12 et 14 sont nulles, sa treizième ligne vaut

$$(0 \quad m_{\mathcal{D}}).$$

Ainsi le système $\bar{A}X = b$ s'écrit $\bar{A}X = \bar{b}.V$, on pose $X = \bar{X}.V$ avec \bar{X} une matrice de taille 12×5 . Pour chaque diamant $\mathcal{D} \in \mathcal{D}$, on résout $\bar{A} \bar{X} = \bar{b}$.

Le terme $\frac{1}{m_{\mathcal{D}}} \sum_{\mathcal{Q} \in \Omega_{\mathcal{D}}} m_{\mathcal{Q}} \eta_{\mathcal{Q}} \left({}^t\delta^{\mathcal{D}^t} B_{\mathcal{Q}} + B_{\mathcal{Q}} \delta^{\mathcal{D}} \right) . \vec{\mathbf{n}}_{\sigma\kappa}$: on veut écrire ce terme comme $\text{BQ_N}.V$ avec BQ_N une matrice 2×5 . Cette écriture est possible car $\delta^{\mathcal{D}}$ est donnée par les 8 premières lignes de la matrice \bar{X} multipliées par V , ainsi la matrice BQ_N dépend des 8 premières lignes de la matrice \bar{X} noté $\bar{X}_{1:8}$. Par conséquent, on a

$$\text{BQ_N} = \text{MB}.\bar{X}_{1:8},$$

où la matrice MB 2×8 dépend des valeurs $\eta_{\mathcal{Q}}$ et des normales $\vec{\mathbf{n}}_{\sigma\kappa}$, $\vec{\mathbf{n}}_{\sigma^*\kappa^*}$. De même, on peut écrire

$$\frac{1}{m_{\mathcal{D}}} \sum_{\mathcal{Q} \in \Omega_{\mathcal{D}}} m_{\mathcal{Q}} \eta_{\mathcal{Q}} \left({}^t\delta^{\mathcal{D}^t} B_{\mathcal{Q}} + B_{\mathcal{Q}} \delta^{\mathcal{D}} \right) . \vec{\mathbf{n}}_{\sigma^*\kappa^*} = \text{BQ_NS}.V,$$

avec BQ_NS la matrice 2×5 dépendant de $\bar{X}_{1:8}$.

Les flux : On peut maintenant réécrire les flux en fonction de V :

$$\mathbf{F}_{\kappa,\mathcal{D},\sigma^*}(\mathbf{u}^{\mathcal{T}}, p^{\mathcal{D}}) = \text{flux_N}.V,$$

$$\mathbf{F}_{\kappa^*,\mathcal{D},\sigma}(\mathbf{u}^{\mathcal{T}}, p^{\mathcal{D}}) = \text{flux_NS}.V,$$

avec flux_N , flux_NS les matrices 2×5 suivantes

$$\begin{aligned} \text{flux_N} &= -m_{\sigma} \frac{1}{m_{\mathcal{D}}} \left(\sum_{\mathcal{Q} \in \Omega_{\mathcal{D}}} m_{\mathcal{Q}} \eta_{\mathcal{Q}} \right) \text{Du_N} - m_{\sigma} \text{BQ_N} + (0 \quad m_{\sigma} \vec{\mathbf{n}}_{\sigma\kappa}), \\ \text{flux_NS} &= -m_{\sigma^*} \frac{1}{m_{\mathcal{D}}} \left(\sum_{\mathcal{Q} \in \Omega_{\mathcal{D}}} m_{\mathcal{Q}} \eta_{\mathcal{Q}} \right) \text{Du_NS} - m_{\sigma^*} \text{BQ_NS} + (0 \quad m_{\sigma^*} \vec{\mathbf{n}}_{\sigma^*\kappa^*}). \end{aligned}$$

Pour l'équation de conservation de la masse sur les diamants, on peut également exprimer le terme $\text{div}^{\mathcal{D}} \mathbf{u}^{\mathcal{T}}$ de la manière suivante

$$\text{div}^{\mathcal{D}} \mathbf{u}^{\mathcal{T}} = \frac{1}{2m_{\mathcal{D}}} \text{terme_N} \cdot (\mathbf{u}_{\kappa} - \mathbf{u}_{\mathcal{L}}) + \frac{1}{2m_{\mathcal{D}}} \text{terme_NS} \cdot (\mathbf{u}_{\kappa^*} - \mathbf{u}_{\mathcal{L}^*}).$$

Le terme de stabilisation nécessite des informations supplémentaires sur les quarts de diamant pour implémenter le terme :

$$-\lambda d_{\mathcal{D}}^2 \underline{\Delta}^{\mathcal{D}} p^{\Omega} = \frac{2\lambda \text{size}(\mathcal{T})^2}{m_{\mathcal{D}}} \sum_{\substack{\mathfrak{s}=\mathcal{Q}|\mathcal{Q}' \\ =\mathcal{D}|\mathcal{D}' \in \mathcal{E}_{\mathcal{D}}}} (p^{\mathcal{Q}} - p^{\mathcal{Q}'}).$$

Dans un diamant $\mathcal{D} = (x_{\kappa}, x_{\kappa^*}, x_{\mathcal{L}}, x_{\mathcal{L}^*})$, chaque quart de diamant \mathcal{Q} est uniquement défini par un centre x_{κ} ou $x_{\mathcal{L}}$ et par un sommet x_{κ^*} ou $x_{\mathcal{L}^*}$. On construit un tableau tab_Q qui contient les 6 informations suivantes :

- le numéro de son sommet correspondant au centre de la maille primale,
- le numéro de son sommet correspondant au centre de la maille duale,
- un numéro `num` entre 1 et 4 correspondant à $\mathcal{Q}_{\mathcal{K},\mathcal{K}^*}$ si 1, $\mathcal{Q}_{\mathcal{K},\mathcal{L}^*}$ si 2, ...
- le numéro du diamant qui le contient,
- le numéro de l'autre centre de maille primale du diamant,
- le numéro de l'autre centre de maille duale du diamant.

VII.8 Conclusions et perspectives

Dans ce chapitre, on a considéré le problème de Stokes avec une viscosité discontinue et ce, toujours pour des conditions aux bords de type Dirichlet. Le schéma m-DDFV (VII.34), présenté ici, prend en compte les sauts de la viscosité et de la pression. On a montré que ce schéma était bien posé pour des maillages généraux. On a obtenu des estimations d'erreurs d'ordre 1 pour la vitesse, le gradient de vitesse et pour la pression en norme L^2 grâce à la stabilisation de type Brezzi-Pitkäranta qui prend en compte les sauts de pression.

Numériquement, on a comparé les trois schémas : le schéma DDFV (VI.4), le schéma m-DDFV avec le terme de stabilisation par quart de diamant et le schéma m-DDFV- Δ^D avec le terme de stabilisation par diamant. Dans certains cas, le seul schéma d'ordre 1 est le schéma m-DDFV (VII.34).

Une hypothèse importante de notre analyse est que \mathcal{T} le maillage DDFV doit respecter les discontinuités de la viscosité. Cette hypothèse suppose que l'on sache identifier les discontinuités. Dans le cas, plus réaliste, d'une interface mobile qui n'est pas nécessairement alignée avec le maillage à chaque instant du calcul, il serait intéressant de voir comment on pourrait coupler l'approche développée ici avec des méthodes de suivi d'interface.

Le travail présenté ici pour le problème de Stokes peut vraisemblablement être adapté à l'étude de problèmes d'élasticité linéaire pour des matériaux composites car les opérateurs différentiels mis en jeu ainsi que les conditions de saut à prendre en compte sont de même nature mathématique. Dans ce nouveau cadre, le fait de mailler le domaine en respectant les sauts de coefficients de Lamé semble tout à fait raisonnable.

Chapitre VIII

Le problème de Navier-Stokes instationnaire

L'intérêt pour la discrétisation des équations de Navier-Stokes par des méthodes volumes finis s'est développé au cours de ces dernières années, on réfère à [PBH04, EHL07, EH07, Del07, CEH08, DE09, EGHL07, EHLP09] pour la description et l'analyse de certains schémas disponibles jusqu'à présent.

On présente dans ce chapitre¹ un travail préliminaire sur le problème de Navier-Stokes instationnaire avec une viscosité variable :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } \mathbf{u} : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^2 \text{ et } p : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R} \text{ tels que} \\ \partial_t \mathbf{u} + \operatorname{div}(-2\eta(x)\mathbf{D}\mathbf{u} + p\operatorname{Id}) + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} = \mathbf{f}, \text{ dans } \Omega \times]0, T[, \\ \operatorname{div}(\mathbf{u}) = 0, \text{ dans } \Omega \times]0, T[, \\ \mathbf{u} = 0, \text{ sur } \partial\Omega \times]0, T[, \\ \mathbf{u}(\cdot, 0) = \mathbf{u}_{\text{ini}}, \text{ dans } \Omega, \\ \int_{\Omega} p(x, t) dx = 0, \text{ pour tout } t \in [0, T], \end{array} \right. \quad (\text{VIII.1})$$

où Ω est un domaine ouvert borné polygonal de \mathbb{R}^2 , $T > 0$, \mathbf{f} appartient à $(L^2(\Omega \times [0, T]))^2$, \mathbf{u}_{ini} appartient à $(L^\infty(\Omega))^2$, $\mathbf{D}\mathbf{u} = \frac{1}{2}(\nabla\mathbf{u} + {}^t\nabla\mathbf{u})$ est la partie symétrique du gradient de vitesse \mathbf{u} et la viscosité η appartient à $W^{1,\infty}(\Omega)$ avec $\inf_{\Omega} \eta > 0$. On rappelle que $(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u}$ vaut $\sum_{i=1}^2 \mathbf{u}_i \partial_i \mathbf{u}$ pour $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{u}_2 \end{pmatrix}$.

Par souci de simplicité, on restreint notre étude à des conditions de Dirichlet homogène. On se place dans le cas d'une viscosité variable mais régulière comme dans le Chapitre VI. Le principe du schéma proposé est exposé dans la Section VIII.1. La difficulté de la construction d'un tel schéma réside dans l'approximation du terme non-linéaire qui fait l'objet de la Section VIII.2. On va utiliser l'idée déjà présentée dans [EGHL07, EHLP09] qui est d'utiliser les flux de masse (prenant en compte la stabilisation) pour définir le terme d'inertie, ceci assure la bonne propriété qui est la Proposition VIII.4. Dans la dernière section, on montre le caractère bien posé du schéma pour des maillages généraux (voir Théorème VIII.5).

VIII.1 Principe du schéma DDFV pour le problème de Navier-Stokes

Soit $N \in \mathbb{N}^*$ donné. On note $\delta t = \frac{T}{N}$ et $t_n = n\delta t$ pour $n \in \{0, \dots, N\}$. Pour obtenir notre schéma DDFV, on fait une méthode d'Euler implicite pour la discrétisation en temps et on utilise les méthodes présentées dans le Chapitre VI pour la discrétisation en espace. Le terme non-linéaire est approché par une méthode semi-implicite.

¹Un aide mémoire rassemblant les notations de ce chapitre est disponible page 244.

C'est pourquoi, on souhaite avoir la propriété $\operatorname{div}^{\mathfrak{D}}(\mathbf{u}^n) - \lambda d_{\mathfrak{D}}^2 \Delta^{\mathfrak{D}} p^n = 0$ pour tout $n \in \{0, \dots, N\}$, même pour l'instant initial. Notre schéma DDFV correspondant au problème (VIII.1) s'écrit de la manière suivante :

Trouver $\mathbf{u}^{\tau, [0, T]} = (\mathbf{u}^n)_{n \in \{0, \dots, N\}} \in \left((\mathbb{R}^2)^{\tau} \right)^{N+1}$ et $p^{\mathfrak{D}, [0, T]} = (p^n)_{n \in \{0, \dots, N\}} \in (\mathbb{R}^{\mathfrak{D}})^{N+1}$ tels que
 – on initialise avec

$$\begin{cases} \mathbf{u}^0 = \mathfrak{P}_{m,0} \mathbb{P}_m^{\tau} \mathbf{u}_{\text{ini}} \in \mathbb{E}_0, \\ p^0 \in \mathbb{R}^{\mathfrak{D}}, \text{ tel que } \Delta^{\mathfrak{D}} p^0 = \frac{1}{\lambda d_{\mathfrak{D}}^2} \operatorname{div}^{\mathfrak{D}}(\mathfrak{P}_{m,0} \mathbb{P}_m^{\tau} \mathbf{u}_{\text{ini}}) \text{ avec } \sum_{\mathcal{D} \in \mathfrak{D}} m_{\mathcal{D}} p_{\mathcal{D}}^0 = 0. \end{cases} \quad (\text{VIII.2})$$

Le vecteur p^0 est bien défini car c'est la solution d'un système linéaire carré, dont la matrice est inversible. En effet, si $\Delta^{\mathfrak{D}} p^0 = 0$, alors la Remarque IV.12 implique que p^0 est constant comme son intégrale est nulle, on en déduit que $p^0 = 0$. Avec ce choix de (\mathbf{u}^0, p^0) , on assure bien la propriété suivante $\operatorname{div}^{\mathfrak{D}}(\mathbf{u}^0) - \lambda d_{\mathfrak{D}}^2 \Delta^{\mathfrak{D}} p^0 = 0$ à l'instant initial.

– Ensuite étant donné $n \in \{0, \dots, N-1\}$ et $(\mathbf{u}^n, p^n) \in \mathbb{E}_0 \times \mathbb{R}^{\mathfrak{D}}$ vérifiant $\operatorname{div}^{\mathfrak{D}}(\mathbf{u}^n) - \lambda d_{\mathfrak{D}}^2 \Delta^{\mathfrak{D}} p^n = 0$,

$$\begin{cases} \text{il faut trouver } \mathbf{u}^{n+1} \in \mathbb{E}_0 \text{ et } p^{n+1} \in \mathbb{R}^{\mathfrak{D}} \text{ tels que,} \\ \forall \kappa \in \mathfrak{M}, \quad \frac{\mathbf{u}_{\kappa}^{n+1} - \mathbf{u}_{\kappa}^n}{\delta t} + \operatorname{div}^{\kappa}(-2\eta^{\mathfrak{D}} \mathbf{D}^{\mathfrak{D}} \mathbf{u}^{n+1} + p^{n+1} \operatorname{Id}) + \mathbf{b}_{\kappa}(\mathbf{u}^n, p^n, \mathbf{u}^{n+1}) = \mathbf{f}_{\kappa}^{n+1}, \\ \forall \kappa^* \in \mathfrak{M}^*, \quad \frac{\mathbf{u}_{\kappa^*}^{n+1} - \mathbf{u}_{\kappa^*}^n}{\delta t} + \operatorname{div}^{\kappa^*}(-2\eta^{\mathfrak{D}} \mathbf{D}^{\mathfrak{D}} \mathbf{u}^{n+1} + p^{n+1} \operatorname{Id}) + \mathbf{b}_{\kappa^*}(\mathbf{u}^n, p^n, \mathbf{u}^{n+1}) = \mathbf{f}_{\kappa^*}^{n+1}, \\ \operatorname{div}^{\mathfrak{D}}(\mathbf{u}^{n+1}) - \lambda d_{\mathfrak{D}}^2 \Delta^{\mathfrak{D}} p^{n+1} = 0, \\ \sum_{\mathcal{D} \in \mathfrak{D}} m_{\mathcal{D}} p_{\mathcal{D}}^{n+1} = 0, \end{cases} \quad (\text{VIII.3})$$

avec $\eta^{\mathfrak{D}} = (\eta_{\mathcal{D}})_{\mathcal{D} \in \mathfrak{D}}$, avec $\eta_{\mathcal{D}} = \int_{\mathcal{D}} \eta(s) d\mu_{\mathcal{D}}(s)$, où $\mu_{\mathcal{D}}$ est une mesure de probabilité sur \mathcal{D} , pour tout $\mathcal{D} \in \mathfrak{D}$,
 (voir (VI.5)), $\mathbf{f}_{\kappa}^{n+1} = \frac{1}{\delta t m_{\kappa}} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_{\kappa} \mathbf{f}(x, t) dx dt$ pour tout $\kappa \in \mathfrak{M}$ et $\mathbf{f}_{\kappa^*}^{n+1} = \frac{1}{\delta t m_{\kappa^*}} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_{\kappa^*} \mathbf{f}(x, t) dx dt$ pour tout $\kappa^* \in \mathfrak{M}^*$, le paramètre de stabilisation λ est choisi strictement positif. La définition de l'approximation du terme non-linéaire $\int_{\kappa} (\mathbf{u}^n \cdot \nabla) \mathbf{u}^{n+1} dx$ par \mathbf{b}_{κ} et $\int_{\kappa^*} (\mathbf{u}^n \cdot \nabla) \mathbf{u}^{n+1} dx$ par \mathbf{b}_{κ^*} est présentée dans la section suivante.

VIII.2 Approximation du terme de convection non-linéaire

On rappelle tout d'abord que

$$\mathcal{E}_{\mathfrak{D}} = \{\mathfrak{s}, \mathfrak{s} \in \partial \mathcal{D} \text{ et } \mathfrak{s} \not\subset \partial \Omega\}, \quad \forall \mathcal{D} \in \mathfrak{D}, \quad \text{et} \quad \mathfrak{S} = \{\mathfrak{s} \in \mathcal{E}_{\mathfrak{D}}, \forall \mathcal{D} \in \mathfrak{D}\},$$

et on introduit deux sous-ensembles de \mathfrak{S} suivants :

$$\mathfrak{S}_{\kappa} = \{\mathfrak{s} \in \mathfrak{S}, \text{ tel que } \mathfrak{s} \subset \kappa\}, \quad \forall \kappa \in \mathfrak{M}, \quad \text{et} \quad \mathfrak{S}_{\kappa^*} = \{\mathfrak{s} \in \mathfrak{S}, \text{ tel que } \mathfrak{s} \subset \kappa^*\}, \quad \forall \kappa^* \in \mathfrak{M}^*.$$

VIII.2.1 Approximation des flux normaux de la vitesse

On cherche à approcher $\int_{\kappa} (\mathbf{u}^n \cdot \nabla) \mathbf{u}^{n+1} dx = \sum_{\sigma \in \partial \kappa} \int_{\sigma} (\mathbf{u}^n \cdot \tilde{\mathbf{n}}_{\sigma \kappa}) \mathbf{u}^{n+1} ds$. On veut pour cela approcher $\int_{\sigma} \mathbf{u}^n \cdot \tilde{\mathbf{n}}_{\sigma \kappa} ds$. Remarquons qu'en intégrant l'équation de bilan de masse sur le demi-diamant $\tilde{\mathcal{D}}_{\kappa}$ de sommets x_{κ} , x_{κ^*} et $x_{\mathcal{L}^*}$ (voir la Figure VIII.1), on a :

$$0 = \int_{\tilde{\mathcal{D}}_{\kappa}} \operatorname{div}(\mathbf{u}^n) dx = \int_{\sigma} \mathbf{u}^n \cdot \tilde{\mathbf{n}}_{\sigma \kappa} ds + \sum_{\mathfrak{s} \in \mathfrak{S}_{\kappa} \cap \mathcal{E}_{\mathfrak{D}}} \int_{\mathfrak{s}} \mathbf{u}^n \cdot \tilde{\mathbf{n}}_{\mathfrak{s} \mathcal{D}} ds.$$

Ceci permet d'exprimer $\int_{\sigma} \mathbf{u}^n \cdot \tilde{\mathbf{n}}_{\sigma \kappa} ds$ à l'aide des flux normaux sur les côtés \mathfrak{s} des diamants $-\int_{\mathfrak{s}} \mathbf{u}^n \cdot \tilde{\mathbf{n}}_{\mathfrak{s} \mathcal{D}} ds$. Ces flux interviennent également lorsqu'on intègre l'équation de bilan de masse sur chaque diamant \mathcal{D} :

$$\int_{\mathcal{D}} \operatorname{div}(\mathbf{u}^n) dx = \int_{\partial \mathcal{D}} \mathbf{u}^n \cdot \tilde{\mathbf{n}}_{\mathfrak{s} \mathcal{D}} ds = \sum_{\mathfrak{s} \in \partial \mathcal{D}} \int_{\mathfrak{s}} \mathbf{u}^n \cdot \tilde{\mathbf{n}}_{\mathfrak{s} \mathcal{D}} ds.$$

Au niveau discret, cette relation s'écrit de la manière suivante :

$$m_{\mathcal{D}} \operatorname{div}^{\mathcal{D}}(\mathbf{u}^n) - \lambda d_{\mathcal{D}}^2 m_{\mathcal{D}} \Delta^{\mathcal{D}} p^n = \sum_{\mathfrak{s}=\mathcal{D}|\mathcal{D}' \in \mathcal{E}_{\mathcal{D}}} G_{\mathfrak{s},\mathcal{D}}(\mathbf{u}^n, p^n),$$

ainsi $\int_{\mathfrak{s}} \mathbf{u}^n \cdot \vec{\mathbf{n}}_{\mathfrak{s}\mathcal{D}} ds$ est approchée par $G_{\mathfrak{s},\mathcal{D}}(\mathbf{u}^n, p^n) = m_{\mathfrak{s}} \frac{\mathbf{u}_{\mathcal{K}^*}^n + \mathbf{u}_{\mathcal{K}}^n}{2} \cdot \vec{\mathbf{n}}_{\mathfrak{s}\mathcal{D}} - \lambda(d_{\mathcal{D}}^2 + d_{\mathcal{D}'}^2)(p_{\mathcal{D}'}^n - p_{\mathcal{D}}^n)$ qui tient compte de la stabilisation. La discrétisation $F_{\mathcal{K},\sigma}$ de $\int_{\sigma} \mathbf{u} \cdot \vec{\mathbf{n}}_{\sigma\mathcal{K}} ds$ est obtenue à l'aide de $G_{\mathfrak{s},\mathcal{D}}(\mathbf{u}^{\tau}, p^{\mathcal{D}})$ pour $\mathfrak{s} \in \mathfrak{S}_{\mathcal{K}} \cap \mathcal{E}_{\mathcal{D}}$.

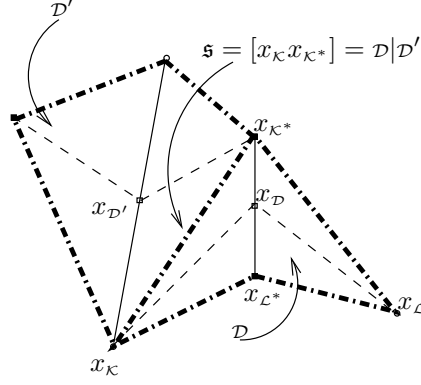


FIG. VIII.1 – Un diamant \mathcal{D} et un diamant voisin \mathcal{D}' .

On définit les opérateurs $G^{\mathfrak{S}}$, $F_{\mathcal{K},\sigma}$ et $F_{\mathcal{K}^*,\sigma^*}$ de la manière suivante.

Définition VIII.1

On définit l'opérateur suivant $G^{\mathfrak{S}} : (\mathbf{u}^{\tau}, p^{\mathcal{D}}) \in (\mathbb{R}^2)^{\tau} \times \mathbb{R}^{\mathcal{D}} \mapsto (G_{\mathfrak{s},\mathcal{D}}(\mathbf{u}^{\tau}, p^{\mathcal{D}}))_{\mathfrak{s} \in \mathcal{E}_{\mathcal{D}}, \mathcal{D} \in \mathcal{D}} \in \mathbb{R}^N$, où $N = \sum_{\mathcal{D} \in \mathcal{D}} \operatorname{card}(\mathcal{E}_{\mathcal{D}})$. Pour un côté $\mathfrak{s} \in \mathfrak{S}$, on désigne par \mathcal{D} et \mathcal{D}' les deux diamants voisins qui ont pour côté commun \mathfrak{s} et on désigne par $x_{\mathcal{K}}$ et $x_{\mathcal{K}^*}$ les sommets du côté \mathfrak{s} (voir la Figure VIII.1), ainsi le terme $G_{\mathfrak{s},\mathcal{D}}(\mathbf{u}^{\tau}, p^{\mathcal{D}})$ est donné par :

$$G_{\mathfrak{s},\mathcal{D}}(\mathbf{u}^{\tau}, p^{\mathcal{D}}) = m_{\mathfrak{s}} \frac{\mathbf{u}_{\mathcal{K}} + \mathbf{u}_{\mathcal{K}^*}}{2} \cdot \vec{\mathbf{n}}_{\mathfrak{s}\mathcal{D}} - \lambda(d_{\mathcal{D}}^2 + d_{\mathcal{D}'}^2)(p^{\mathcal{D}'} - p^{\mathcal{D}}).$$

Les flux de masse $F_{\mathcal{K},\sigma}$ et $F_{\mathcal{K}^*,\sigma^*}$ sont alors définis par :

$$\begin{aligned} F_{\mathcal{K},\sigma}(\mathbf{u}^{\tau}, p^{\mathcal{D}}) &= - \sum_{\mathfrak{s} \in \mathfrak{S}_{\mathcal{K}} \cap \mathcal{E}_{\mathcal{D}}} G_{\mathfrak{s},\mathcal{D}}(\mathbf{u}^{\tau}, p^{\mathcal{D}}), \quad \forall \mathcal{K} \in \mathfrak{M}, \mathcal{D}_{\sigma,\sigma^*} \in \mathcal{D}_{\mathcal{K}}, \\ F_{\mathcal{K}^*,\sigma^*}(\mathbf{u}^{\tau}, p^{\mathcal{D}}) &= - \sum_{\mathfrak{s} \in \mathfrak{S}_{\mathcal{K}^*} \cap \mathcal{E}_{\mathcal{D}}} G_{\mathfrak{s},\mathcal{D}}(\mathbf{u}^{\tau}, p^{\mathcal{D}}), \quad \forall \mathcal{K}^* \in \mathfrak{M}^*, \mathcal{D}_{\sigma,\sigma^*} \in \mathcal{D}_{\mathcal{K}^*}. \end{aligned}$$

On remarque que si $(\mathbf{u}^{\tau}, p^{\mathcal{D}}) \in (\mathbb{R}^2)^{\tau} \times \mathbb{R}^{\mathcal{D}}$ vérifie $\operatorname{div}^{\mathcal{D}}(\mathbf{u}^{\tau}) - \lambda d_{\mathcal{D}}^2 \Delta^{\mathcal{D}} p^{\mathcal{D}} = 0$, on a bien conservativité des flux $F_{\mathcal{K},\sigma}$ et $F_{\mathcal{K}^*,\sigma^*}$ à savoir :

$$F_{\mathcal{K},\sigma}(\mathbf{u}^{\tau}, p^{\mathcal{D}}) = -F_{\mathcal{L},\sigma}(\mathbf{u}^{\tau}, p^{\mathcal{D}}), \quad \forall \sigma = \mathcal{K}|\mathcal{L} \quad \text{et} \quad F_{\mathcal{K}^*,\sigma^*}(\mathbf{u}^{\tau}, p^{\mathcal{D}}) = -F_{\mathcal{L}^*,\sigma^*}(\mathbf{u}^{\tau}, p^{\mathcal{D}}), \quad \forall \sigma^* = \mathcal{K}^*|\mathcal{L}^*.$$

Proposition VIII.2

Soit \mathcal{T} un maillage DDFV associé à Ω . Pour tout $(\mathbf{u}^{\tau}, p^{\mathcal{D}}) \in (\mathbb{R}^2)^{\tau} \times \mathbb{R}^{\mathcal{D}}$, on a

$$\forall \mathcal{K} \in \mathfrak{M}, \quad \sum_{\mathcal{D} \in \mathcal{D}_{\mathcal{K}}} F_{\mathcal{K},\sigma}(\mathbf{u}^{\tau}, p^{\mathcal{D}}) = 0 \quad \text{et} \quad \forall \mathcal{K}^* \in \mathfrak{M}^*, \quad \sum_{\mathcal{D} \in \mathcal{D}_{\mathcal{K}^*}} F_{\mathcal{K}^*,\sigma^*}(\mathbf{u}^{\tau}, p^{\mathcal{D}}) = 0.$$

Démonstration : En fait, en réorganisant la somme sur les côtés des diamants $\mathfrak{s} \in \mathfrak{S}_{\mathcal{K}}$ appartenant à la maille primaire \mathcal{K} , on obtient

$$- \sum_{\mathcal{D} \in \mathcal{D}_{\mathcal{K}}} \sum_{\mathfrak{s} \in \mathfrak{S}_{\mathcal{K}} \cap \mathcal{E}_{\mathcal{D}}} m_{\mathfrak{s}} \frac{\mathbf{u}_{\mathcal{K}} + \mathbf{u}_{\mathcal{K}^*}}{2} \cdot \vec{\mathbf{n}}_{\mathfrak{s}\mathcal{D}} = - \sum_{\mathfrak{s} \in \mathfrak{S}_{\mathcal{K}}} m_{\mathfrak{s}} \frac{\mathbf{u}_{\mathcal{K}} + \mathbf{u}_{\mathcal{K}^*}}{2} \cdot (\vec{\mathbf{n}}_{\mathfrak{s}\mathcal{D}} + \vec{\mathbf{n}}_{\mathfrak{s}\mathcal{D}'}) = 0,$$

car $\vec{\mathbf{n}}_{\mathfrak{s}\mathcal{D}} = -\vec{\mathbf{n}}_{\mathfrak{s}\mathcal{D}'}$ et en rappelant que pour un côté $\mathfrak{s} \in \mathfrak{S}$, on désigne par \mathcal{D} et \mathcal{D}' les deux diamants voisins qui ont pour côté commun \mathfrak{s} et on désigne par $x_{\mathcal{K}}$ et $x_{\mathcal{K}^*}$ les sommets du côté \mathfrak{s} . On fait de même pour

$$- \sum_{\mathcal{D} \in \mathcal{D}_{\mathcal{K}}} \sum_{\mathfrak{s} \in \mathfrak{S}_{\mathcal{K}} \cap \mathcal{E}_{\mathcal{D}}} (d_{\mathcal{D}}^2 + d_{\mathcal{D}'}^2)(p^{\mathcal{D}'} - p^{\mathcal{D}}) = - \sum_{\mathfrak{s} \in \mathfrak{S}_{\mathcal{K}}} (d_{\mathcal{D}}^2 + d_{\mathcal{D}'}^2)(p^{\mathcal{D}'} - p^{\mathcal{D}} + p^{\mathcal{D}} - p^{\mathcal{D}'}) = 0,$$

on en déduit que $\sum_{\mathcal{D} \in \mathcal{D}_{\mathcal{K}}} F_{\mathcal{K},\sigma}(\mathbf{u}^{\mathcal{T}}, p^{\mathcal{D}}) = 0$. On procède de la même manière pour $\mathcal{K}^* \in \mathfrak{M}^*$. ■

VIII.2.2 Discrétisation du terme non-linéaire

Le terme non-linéaire est discrétisé par une méthode upwind.

Définition VIII.3

On définit $\mathbf{b}^{\mathcal{T}} : (\mathbf{u}^{\mathcal{T}}, p^{\mathcal{D}}, \mathbf{v}^{\mathcal{T}}) \in (\mathbb{R}^2)^{\mathcal{T}} \times \mathbb{R}^{\mathcal{D}} \times (\mathbb{R}^2)^{\mathcal{T}} \mapsto \mathbf{b}^{\mathcal{T}}(\mathbf{u}^{\mathcal{T}}, p^{\mathcal{D}}, \mathbf{v}^{\mathcal{T}}) \in (\mathbb{R}^2)^{\mathcal{T}}$, comme suit :

$$\mathbf{b}_{\mathcal{K}}(\mathbf{u}^{\mathcal{T}}, p^{\mathcal{D}}, \mathbf{v}^{\mathcal{T}}) = \frac{1}{m_{\mathcal{K}}} \sum_{\sigma \in \partial \mathcal{K}} F_{\mathcal{K},\sigma}(\mathbf{u}^{\mathcal{T}}, p^{\mathcal{D}}) \mathbf{v}_{\sigma+}, \quad \forall \mathcal{K} \in \mathfrak{M},$$

$$\mathbf{b}_{\mathcal{K}^*}(\mathbf{u}^{\mathcal{T}}, p^{\mathcal{D}}, \mathbf{v}^{\mathcal{T}}) = \frac{1}{m_{\mathcal{K}^*}} \sum_{\sigma^* \in \partial \mathcal{K}^*} F_{\mathcal{K}^*,\sigma^*}(\mathbf{u}^{\mathcal{T}}, p^{\mathcal{D}}) \mathbf{v}_{\sigma^{*+}}, \quad \forall \mathcal{K}^* \in \mathfrak{M}^*,$$

où

$$\mathbf{v}_{\sigma+} = \begin{cases} \mathbf{v}_{\mathcal{K}} & \text{si } F_{\mathcal{K},\sigma}(\mathbf{u}^{\mathcal{T}}, p^{\mathcal{D}}) \geq 0, \\ \mathbf{v}_{\mathcal{L}} & \text{sinon.} \end{cases} \quad \mathbf{v}_{\sigma^{*+}} = \begin{cases} \mathbf{v}_{\mathcal{K}^*} & \text{si } F_{\mathcal{K}^*,\sigma^*}(\mathbf{u}^{\mathcal{T}}, p^{\mathcal{D}}) \geq 0, \\ \mathbf{v}_{\mathcal{L}^*} & \text{sinon.} \end{cases}$$

Proposition VIII.4

Soit \mathcal{T} un maillage DDFV associé à Ω . Pour tout $(\mathbf{u}^{\mathcal{T}}, p^{\mathcal{D}}, \mathbf{v}^{\mathcal{T}}) \in \mathbb{E}_0 \times \mathbb{R}^{\mathcal{D}} \times \mathbb{E}_0$ tels que $\operatorname{div}^{\mathcal{D}}(\mathbf{u}^{\mathcal{T}}) - \lambda d_{\mathcal{D}}^2 \Delta^{\mathcal{D}} p^{\mathcal{D}} = 0$, on a la propriété suivante

$$\llbracket \mathbf{b}^{\mathcal{T}}(\mathbf{u}^{\mathcal{T}}, p^{\mathcal{D}}, \mathbf{v}^{\mathcal{T}}), \mathbf{v}^{\mathcal{T}} \rrbracket_{\mathcal{T}} \geq 0.$$

Démonstration : On décompose ce produit scalaire sur le maillage primal et le maillage dual :

$$\llbracket \mathbf{b}^{\mathcal{T}}(\mathbf{u}^{\mathcal{T}}, p^{\mathcal{D}}, \mathbf{v}^{\mathcal{T}}), \mathbf{v}^{\mathcal{T}} \rrbracket_{\mathcal{T}} = \frac{1}{2}P + \frac{1}{2}D,$$

où $P := \sum_{\mathcal{K} \in \mathfrak{M}} \mathbf{v}_{\mathcal{K}} \cdot \sum_{\mathcal{D} \in \mathcal{D}_{\mathcal{K}}} F_{\mathcal{K},\sigma}(\mathbf{u}^{\mathcal{T}}, p^{\mathcal{D}}) \mathbf{v}_{\sigma+}$ et $D := \sum_{\mathcal{K}^* \in \mathfrak{M}^* \cup \partial \mathfrak{M}^*} \mathbf{v}_{\mathcal{K}^*} \cdot \sum_{\mathcal{D} \in \mathcal{D}_{\mathcal{K}^*}} F_{\mathcal{K}^*,\sigma^*}(\mathbf{u}^{\mathcal{T}}, p^{\mathcal{D}}) \mathbf{v}_{\sigma^{*+}}$. On va se concentrer sur la minoration de P , sachant que l'estimation de D se traitera exactement de la même façon. On réorganise la somme sur les diamants

$$\sum_{\mathcal{K} \in \mathfrak{M}} \mathbf{v}_{\mathcal{K}} \cdot \sum_{\mathcal{D} \in \mathcal{D}_{\mathcal{K}}} F_{\mathcal{K},\sigma}(\mathbf{u}^{\mathcal{T}}, p^{\mathcal{D}}) \mathbf{v}_{\sigma+} = \sum_{\mathcal{D}, \sigma, \sigma^* \in \mathcal{D}} F_{\mathcal{K},\sigma}(\mathbf{u}^{\mathcal{T}}, p^{\mathcal{D}}) \mathbf{v}_{\sigma+} \cdot (\mathbf{v}_{\mathcal{K}} - \mathbf{v}_{\mathcal{L}}),$$

en utilisant le fait que $F_{\mathcal{K},\sigma}(\mathbf{u}^{\mathcal{T}}, p^{\mathcal{D}}) = -F_{\mathcal{L},\sigma}(\mathbf{u}^{\mathcal{T}}, p^{\mathcal{D}})$. De plus, le terme $F_{\mathcal{K},\sigma}(\mathbf{u}^{\mathcal{T}}, p^{\mathcal{D}})(\mathbf{v}_{\mathcal{K}} - \mathbf{v}_{\mathcal{L}})$ peut s'écrire de la façon suivante $|F_{\mathcal{K},\sigma}(\mathbf{u}^{\mathcal{T}}, p^{\mathcal{D}})|(\mathbf{v}_{\sigma+} - \mathbf{v}_{\sigma-})$, avec

$$\mathbf{v}_{\sigma-} = \begin{cases} \mathbf{v}_{\mathcal{L}} & \text{si } F_{\mathcal{K},\sigma}(\mathbf{u}^{\mathcal{T}}, p^{\mathcal{D}}) \geq 0, \\ \mathbf{v}_{\mathcal{K}} & \text{sinon.} \end{cases}$$

On en déduit que

$$P = \sum_{\mathcal{D}, \sigma, \sigma^* \in \mathcal{D}} |F_{\mathcal{K},\sigma}(\mathbf{u}^{\mathcal{T}}, p^{\mathcal{D}})| (\mathbf{v}_{\sigma+} - \mathbf{v}_{\sigma-}) \cdot \mathbf{v}_{\sigma+}.$$

En utilisant l'égalité suivante $(a - b)a = \frac{1}{2}((a - b)^2 + a^2 - b^2)$, on a

$$P = \frac{1}{2} \sum_{\mathcal{D}, \sigma, \sigma^* \in \mathcal{D}} |F_{\mathcal{K},\sigma}(\mathbf{u}^{\mathcal{T}}, p^{\mathcal{D}})| ((\mathbf{v}_{\sigma+} - \mathbf{v}_{\sigma-})^2 + (\mathbf{v}_{\sigma+}^2 - \mathbf{v}_{\sigma-}^2)).$$

Comme le premier terme du membre de droite est positif, le terme P est minoré par

$$P \geq \frac{1}{2} \sum_{\mathcal{D}_{\sigma, \sigma^*} \in \mathcal{D}} |F_{\kappa, \sigma}(\mathbf{u}^\tau, p^\mathcal{D})| (\mathbf{v}_{\sigma^+}^2 - \mathbf{v}_{\sigma^-}^2).$$

De même que précédemment, on a l'égalité suivante $|F_{\kappa, \sigma}(\mathbf{u}^\tau, p^\mathcal{D})| (\mathbf{v}_{\sigma^+}^2 - \mathbf{v}_{\sigma^-}^2) = F_{\kappa, \sigma}(\mathbf{u}^\tau, p^\mathcal{D}) (\mathbf{v}_\kappa^2 - \mathbf{v}_\mathcal{L}^2)$. Il vient que

$$P \geq \frac{1}{2} \sum_{\mathcal{D}_{\sigma, \sigma^*} \in \mathcal{D}} F_{\kappa, \sigma}(\mathbf{u}^\tau, p^\mathcal{D}) (\mathbf{v}_\kappa^2 - \mathbf{v}_\mathcal{L}^2).$$

En réordonnant la somme sur les mailles primales $\kappa \in \mathfrak{M}$, on obtient

$$P \geq \frac{1}{2} \sum_{\kappa \in \mathfrak{M}} \mathbf{v}_\kappa^2 \sum_{\mathcal{D} \in \mathcal{D}_\kappa} F_{\kappa, \sigma}(\mathbf{u}^\tau, p^\mathcal{D}).$$

On conclut en appliquant la Proposition VIII.2 que $P \geq 0$. ■

VIII.3 Propriété du schéma DDFV pour le problème de Navier-Stokes

On commence par montrer le caractère bien posé du schéma linéaire (VIII.2)-(VIII.3). Ensuite on présente les premières estimations d'énergie.

Théorème VIII.5

On suppose que η est bornée, voir (VI.2). Soit \mathcal{T} un maillage DDFV associé à Ω . Le schéma (VIII.2)-(VIII.3) admet une unique solution $(\mathbf{u}^\tau, [0, T], p^\mathcal{D}, [0, T]) \in \left((\mathbb{R}^2)^\tau\right)^{N+1} \times (\mathbb{R}^\mathcal{D})^{N+1}$.

Démonstration : Soit $n \in \{0, \dots, N\}$. Il faut noter que le schéma (VIII.3) est un système linéaire en $(\mathbf{u}^{n+1}, p^{n+1})$. On note N la dimension de $(\mathbb{R}^2)^\tau \times \mathbb{R}^\mathcal{D}$. Le schéma (VIII.3) peut s'écrire avec $q^\mathcal{D} = 0$, $\mathbf{g}^{\partial\mathfrak{M}} = 0$, $\mathbf{g}^{\partial\mathfrak{M}^*} = 0$ et $\alpha = 0$ comme suit

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } \mathbf{u}^{n+1} \in (\mathbb{R}^2)^\tau \text{ et } p^{n+1} \in \mathbb{R}^\mathcal{D} \text{ tels que,} \\ \forall \kappa \in \mathfrak{M}, \quad \frac{\mathbf{u}_\kappa^{n+1}}{\delta t} + \operatorname{div}^\kappa(-2\eta^\mathcal{D} \mathbf{D}^\mathcal{D} \mathbf{u}^{n+1} + p^{n+1} \operatorname{Id}) + \mathbf{b}_\kappa(\mathbf{u}^n, p^n, \mathbf{u}^{n+1}) = \mathbf{f}_\kappa^{n+1} + \frac{\mathbf{u}_\kappa^n}{\delta t}, \\ \forall \kappa^* \in \mathfrak{M}^*, \quad \frac{\mathbf{u}_{\kappa^*}^{n+1}}{\delta t} + \operatorname{div}^{\kappa^*}(-2\eta^\mathcal{D} \mathbf{D}^\mathcal{D} \mathbf{u}^{n+1} + p^{n+1} \operatorname{Id}) + \mathbf{b}_{\kappa^*}(\mathbf{u}^n, p^n, \mathbf{u}^{n+1}) = \mathbf{f}_{\kappa^*}^{n+1} + \frac{\mathbf{u}_{\kappa^*}^n}{\delta t}, \\ \operatorname{div}^\mathcal{D}(\mathbf{u}^{n+1}) - \lambda d_\mathcal{D}^2 \Delta^\mathcal{D} p^{n+1} = q^\mathcal{D}, \\ \mathbf{u}_\kappa^{n+1} = \mathbf{g}_\kappa, \quad \forall \kappa \in \partial\mathfrak{M}, \\ \mathbf{u}_{\kappa^*}^{n+1} = \mathbf{g}_{\kappa^*}, \quad \forall \kappa^* \in \partial\mathfrak{M}^*, \\ \sum_{\mathcal{D} \in \mathcal{D}} m_\mathcal{D} p_\mathcal{D}^{n+1} = \alpha. \end{array} \right.$$

C'est un système linéaire : $Av = b$ avec une matrice rectangle $A \in \mathcal{M}_{N+1, N}(\mathbb{R})$, $v \in \mathbb{R}^N$ et le second membre $b = {}^t(\mathbf{f}^\mathfrak{M}, \mathbf{f}^{\mathfrak{M}^*}, q^\mathcal{D}, \mathbf{g}^{\partial\mathfrak{M}}, \mathbf{g}^{\partial\mathfrak{M}^*}, \alpha) \in \mathbb{R}^{N+1}$. Soit X l'ensemble suivant

$$X = \left\{ (\mathbf{f}^\mathfrak{M}, \mathbf{f}^{\mathfrak{M}^*}, q^\mathcal{D}, \mathbf{g}^{\partial\mathfrak{M}}, \mathbf{g}^{\partial\mathfrak{M}^*}, \alpha)' \in \mathbb{R}^{N+1}, \quad \sum_{\mathcal{D}_{\sigma, \sigma^*} \in \mathcal{D}_{ext}} m_\sigma \gamma^\tau(\mathbf{g}^\tau) \cdot \vec{\mathbf{n}}_{\sigma\kappa} = \sum_{\mathcal{D} \in \mathcal{D}} m_\mathcal{D} q^\mathcal{D} \right\},$$

la dimension de X vaut N . On a que ${}^t(\mathbf{f}^\mathfrak{M}, \mathbf{f}^{\mathfrak{M}^*}, 0, 0, 0, 0)$ appartient à X et que $\operatorname{Im} A \subset X$ car on a une relation entre l'équation de la conservation de la masse et la condition aux bords de Dirichlet grâce à la formule de Green (Théorème IV.9). Si on montre que la matrice A est injective, on conclut que $\dim \operatorname{Im} A = N$ et ainsi $\operatorname{Im} A = X$. Etudions donc le noyau de la matrice A . Soit $(\mathbf{u}^{n+1}, p^{n+1}) \in \mathbb{E}_0 \times \mathbb{R}^\mathcal{D}$ appartenant au noyau pour la donnée (\mathbf{u}^n, p^n) , on a ainsi :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{\delta t} \llbracket \mathbf{u}^{n+1}, \mathbf{v}^\tau \rrbracket_\tau + \llbracket \operatorname{div}^\tau(-2\eta^\mathcal{D} \mathbf{D}^\mathcal{D} \mathbf{u}^{n+1} + p^{n+1} \operatorname{Id}), \mathbf{v}^\tau \rrbracket_\tau + \llbracket \mathbf{b}^\tau(\mathbf{u}^n, p^n, \mathbf{u}^{n+1}), \mathbf{v}^\tau \rrbracket_\tau = 0, \quad \forall \mathbf{v}^\tau \in \mathbb{E}_0, \\ (\operatorname{div}^\mathcal{D}(\mathbf{u}^{n+1}) - \lambda d_\mathcal{D}^2 \Delta^\mathcal{D} p^{n+1}, q^\mathcal{D})_\mathcal{D} = 0, \quad \forall q^\mathcal{D} \in \mathbb{R}^\mathcal{D}, \\ \sum_{\mathcal{D} \in \mathcal{D}} m_\mathcal{D} p_\mathcal{D}^{n+1} = 0. \end{array} \right.$$

On prend $\mathbf{v}^\tau = \mathbf{u}^{n+1}$ et $q^\mathfrak{D} = p^{n+1}$. Il vient

$$\frac{1}{\delta t} \llbracket \mathbf{u}^{n+1}, \mathbf{u}^{n+1} \rrbracket_{\mathcal{T}} + \llbracket \mathbf{div}^\tau (-2\eta^\mathfrak{D} \mathbf{D}^\mathfrak{D} \mathbf{u}^{n+1} + p^{n+1} \text{Id}), \mathbf{u}^{n+1} \rrbracket_{\mathcal{T}} + \llbracket \mathbf{b}^\tau(\mathbf{u}^n, p^n, \mathbf{u}^{n+1}), \mathbf{u}^{n+1} \rrbracket_{\mathcal{T}} = 0.$$

En utilisant le fait que $\text{div}^\mathfrak{D}(\mathbf{u}^n) - \lambda d_\mathfrak{D}^2 \Delta^\mathfrak{D} p^n = 0$, la Proposition VIII.4 implique que

$$\frac{1}{\delta t} \|\mathbf{u}^{n+1}\|_2^2 + \llbracket \mathbf{div}^\tau (-2\eta^\mathfrak{D} \mathbf{D}^\mathfrak{D} \mathbf{u}^{n+1} + p^{n+1} \text{Id}), \mathbf{u}^{n+1} \rrbracket_{\mathcal{T}} \leq 0.$$

Par conséquent, en ajoutant le terme nul $(\text{div}^\mathfrak{D}(\mathbf{u}^{n+1}) - \lambda d_\mathfrak{D}^2 \Delta^\mathfrak{D} p^{n+1}, p^{n+1})_\mathfrak{D}$, on a

$$\frac{1}{\delta t} \|\mathbf{u}^{n+1}\|_2^2 + \llbracket \mathbf{div}^\tau (-2\eta^\mathfrak{D} \mathbf{D}^\mathfrak{D} \mathbf{u}^{n+1} + p^{n+1} \text{Id}), \mathbf{u}^{n+1} \rrbracket_{\mathcal{T}} + (\text{div}^\mathfrak{D}(\mathbf{u}^{n+1}) - \lambda d_\mathfrak{D}^2 \Delta^\mathfrak{D} p^{n+1}, p^{n+1})_\mathfrak{D} \leq 0.$$

De plus, on rappelle l'estimation (VI.13) faite dans le Chapitre VI :

$$\begin{aligned} & \llbracket \mathbf{div}^\tau (-2\eta^\mathfrak{D} \mathbf{D}^\mathfrak{D} \mathbf{u}^{n+1} + p^{n+1} \text{Id}), \mathbf{u}^{n+1} \rrbracket_{\mathcal{T}} + (\text{div}^\mathfrak{D}(\mathbf{u}^{n+1}) - \lambda d_\mathfrak{D}^2 \Delta^\mathfrak{D} p^{n+1}, p^{n+1})_\mathfrak{D} \\ & \geq \underline{C}_\eta \|\nabla^\mathfrak{D} \mathbf{u}^{n+1}\|_2^2 + \lambda |p^{n+1}|_h^2. \end{aligned} \quad (\text{VIII.4})$$

On en déduit que

$$\frac{1}{\delta t} \|\mathbf{u}^{n+1}\|_2^2 + \underline{C}_\eta \|\nabla^\mathfrak{D} \mathbf{u}^{n+1}\|_2^2 + \lambda |p^{n+1}|_h^2 \leq 0.$$

Par conséquent, on a $\mathbf{u}^{n+1} = 0$ et p^{n+1} est constant. Comme p^{n+1} vérifie $\sum_{\mathfrak{D} \in \mathfrak{D}} m_\mathfrak{D} p_\mathfrak{D}^{n+1} = 0$, on a $p^{n+1} = 0$ et $\mathbf{u}^{n+1} = 0$. ■

Proposition VIII.6 (Estimations d'énergie discrètes)

Soit \mathcal{T} un maillage DDFV associé à Ω . Soit $(\mathbf{u}^{\tau, [0, T]}, p^{\mathfrak{D}, [0, T]}) \in ((\mathbb{R}^2)^\tau)^{N+1} \times (\mathbb{R}^\mathfrak{D})^{N+1}$ la solution du schéma DDFV (VIII.2)-(VIII.3). Pour $N > 1$, il existe une constante $C > 0$ dépendant uniquement de Ω , λ , \underline{C}_η , \mathbf{u}_{ini} et \mathbf{f} , telle que :

$$\sum_{n=1}^N \delta t \|\nabla^\mathfrak{D} \mathbf{u}^n\|_2^2 \leq C, \quad \sum_{n=1}^N 2\delta t \lambda |p^n|_h^2 \leq C, \quad \sum_{n=0}^{N-1} \|\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n\|_2^2 \leq C \quad \text{et} \quad \|\mathbf{u}^N\|_2^2 \leq C.$$

Démonstration : Comme $(\mathbf{u}^{n+1}, p^{n+1}) \in \mathbb{E}_0 \times \mathbb{R}^\mathfrak{D}$ vérifie (VIII.3), on a

$$\begin{cases} \frac{1}{\delta t} \llbracket \mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n, \mathbf{v}^\tau \rrbracket_{\mathcal{T}} + \llbracket \mathbf{div}^\tau (-2\eta^\mathfrak{D} \mathbf{D}^\mathfrak{D} \mathbf{u}^{n+1} + p^{n+1} \text{Id}), \mathbf{v}^\tau \rrbracket_{\mathcal{T}} + \llbracket \mathbf{b}^\tau(\mathbf{u}^n, p^n, \mathbf{u}^{n+1}), \mathbf{v}^\tau \rrbracket_{\mathcal{T}} \\ \quad = \llbracket \mathbf{f}^{n+1}, \mathbf{v}^\tau \rrbracket_{\mathcal{T}}, \quad \forall \mathbf{v}^\tau \in \mathbb{E}_0, \\ (\text{div}^\mathfrak{D}(\mathbf{u}^{n+1}) - \lambda d_\mathfrak{D}^2 \Delta^\mathfrak{D} p^{n+1}, q^\mathfrak{D})_\mathfrak{D} = 0, \quad \forall q^\mathfrak{D} \in \mathbb{R}^\mathfrak{D}, \\ \sum_{\mathfrak{D} \in \mathfrak{D}} m_\mathfrak{D} p_\mathfrak{D}^{n+1} = 0, \end{cases}$$

avec $\mathbf{f}^{n+1} = ((\mathbf{f}_\kappa^{n+1})_{\kappa \in \mathfrak{M}}, (0)_{\kappa \in \partial \mathfrak{M}}, (\mathbf{f}_{\kappa^*}^{n+1})_{\kappa^* \in \mathfrak{M}^*}, (0)_{\kappa^* \in \partial \mathfrak{M}^*})$. On prend $\mathbf{v}^\tau = \mathbf{u}^{n+1}$ et $q^\mathfrak{D} = p^{n+1}$:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\delta t} \llbracket \mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n, \mathbf{u}^{n+1} \rrbracket_{\mathcal{T}} + \llbracket \mathbf{div}^\tau (-2\eta^\mathfrak{D} \mathbf{D}^\mathfrak{D} \mathbf{u}^{n+1} + p^{n+1} \text{Id}), \mathbf{u}^{n+1} \rrbracket_{\mathcal{T}} + \llbracket \mathbf{b}^\tau(\mathbf{u}^n, p^n, \mathbf{u}^{n+1}), \mathbf{u}^{n+1} \rrbracket_{\mathcal{T}} \\ & = \llbracket \mathbf{f}^{n+1}, \mathbf{u}^{n+1} \rrbracket_{\mathcal{T}}. \end{aligned}$$

En utilisant le fait que $\text{div}^\mathfrak{D}(\mathbf{u}^n) - \lambda d_\mathfrak{D}^2 \Delta^\mathfrak{D} p^n = 0$, la Proposition VIII.4 et la relation (VIII.4) impliquent que

$$\frac{1}{\delta t} \llbracket \mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n, \mathbf{u}^{n+1} \rrbracket_{\mathcal{T}} + \underline{C}_\eta \|\nabla^\mathfrak{D} \mathbf{u}^{n+1}\|_2^2 + \lambda |p^{n+1}|_h^2 \leq \llbracket \mathbf{f}^{n+1}, \mathbf{u}^{n+1} \rrbracket_{\mathcal{T}}.$$

En remarquant l'égalité suivante $2\llbracket \mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n, \mathbf{u}^{n+1} \rrbracket_{\mathcal{T}} = \|\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n\|_2^2 + \|\mathbf{u}^{n+1}\|_2^2 - \|\mathbf{u}^n\|_2^2$, on en déduit

$$\frac{1}{2\delta t} \|\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n\|_2^2 + \frac{1}{2\delta t} \|\mathbf{u}^{n+1}\|_2^2 + \underline{C}_\eta \|\nabla^\mathfrak{D} \mathbf{u}^{n+1}\|_2^2 + \lambda |p^{n+1}|_h^2 \leq \llbracket \mathbf{f}^{n+1}, \mathbf{u}^{n+1} \rrbracket_{\mathcal{T}} + \frac{1}{2\delta t} \|\mathbf{u}^n\|_2^2.$$

On applique l'inégalité de Cauchy-Schwarz sur le terme $\llbracket \mathbf{f}^{n+1}, \mathbf{u}^{n+1} \rrbracket_{\mathcal{T}}$

$$\frac{1}{2\delta t} \|\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n\|_2^2 + \frac{1}{2\delta t} \|\mathbf{u}^{n+1}\|_2^2 + \underline{C}_\eta \|\nabla^{\mathfrak{D}} \mathbf{u}^{n+1}\|_2^2 + \lambda |p^{n+1}|_h^2 \leq \|\mathbf{f}^{n+1}\|_2 \|\mathbf{u}^{n+1}\|_2 + \frac{1}{2\delta t} \|\mathbf{u}^n\|_2^2.$$

Ensuite l'inégalité de Poincaré (Théorème IV.15) donne

$$\frac{1}{2\delta t} \|\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n\|_2^2 + \frac{1}{2\delta t} \|\mathbf{u}^{n+1}\|_2^2 + \underline{C}_\eta \|\nabla^{\mathfrak{D}} \mathbf{u}^{n+1}\|_2^2 + \lambda |p^{n+1}|_h^2 \leq C \|\mathbf{f}^{n+1}\|_2 \|\nabla^{\mathfrak{D}} \mathbf{u}^{n+1}\|_2 + \frac{1}{2\delta t} \|\mathbf{u}^n\|_2^2.$$

L'inégalité de Young avec le paramètre $\epsilon = C^2/\underline{C}_\eta$ implique en multipliant par $2\delta t$:

$$\|\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n\|_2^2 + \|\mathbf{u}^{n+1}\|_2^2 + \underline{C}_\eta \delta t \|\nabla^{\mathfrak{D}} \mathbf{u}^{n+1}\|_2^2 + 2\delta t \lambda |p^{n+1}|_h^2 \leq \delta t \frac{C^2}{\underline{C}_\eta} \|\mathbf{f}^{n+1}\|_2^2 + \|\mathbf{u}^n\|_2^2.$$

On termine en sommant sur n de 0 à $N-1 > 0$ pour obtenir

$$\sum_{n=0}^{N-1} \|\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n\|_2^2 + \|\mathbf{u}^N\|_2^2 + \sum_{n=0}^{N-1} \underline{C}_\eta \delta t \|\nabla^{\mathfrak{D}} \mathbf{u}^{n+1}\|_2^2 + \sum_{n=0}^{N-1} 2\delta t \lambda |p^{n+1}|_h^2 \leq \frac{C^2}{\underline{C}_\eta} \sum_{n=0}^{N-1} \delta t \|\mathbf{f}^{n+1}\|_2^2 + \|\mathbf{u}^0\|_2^2.$$

■

Cette proposition implique que la solution $(\mathbf{u}^{\mathcal{T},[0,T]}, p^{\mathfrak{D},[0,T]}) \in \left((\mathbb{R}^2)^{\mathcal{T}}\right)^{N+1} \times (\mathbb{R}^{\mathfrak{D}})^{N+1}$ du schéma DDFV (VIII.2)-(VIII.3) vérifie

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^{\mathcal{T},[0,T]} &\text{ est bornée dans } L^2([0,T], H_0^1(\Omega)), \\ \mathbf{u}^{\mathcal{T},[0,T]} &\text{ est bornée dans } L^\infty([0,T], L_2(\Omega)). \end{aligned}$$

VIII.4 Conclusions et perspectives

Ce chapitre est un travail en cours. On a proposé un schéma DDFV stabilisé (VIII.2)-(VIII.3) pour le problème de Navier-Stokes avec une viscosité régulière sur tout le domaine et des conditions aux bord de type Dirichlet. Ce schéma est bien posé pour des maillages généraux. L'étude de ce schéma reste à compléter par l'établissement de la convergence du schéma et par des tests numériques. En perspective, on pourrait également s'intéresser à sa généralisation à des domaines 3D (voir la partie 3 du manuscrit).

Partie 3

Problème de Stokes sur des maillages 3D

Chapitre IX

Introduction aux méthodes DDFV en 3D

On a vu qu'en 2D, le problème de diffusion scalaire anisotrope nécessite un deuxième jeu d'inconnues en plus des inconnues primales. Ce double jeu d'inconnues permet de définir un gradient discret à partir de deux de ses composantes dans deux directions complémentaires. En 3D¹, la reconstruction d'un gradient a besoin de trois directions complémentaires. Il est intéressant de noter que le passage 2D-3D dans le cas de la diffusion scalaire a conduit à trois formulations DDFV différentes proposées dans [CPT08, ABK08], dans [Her07] et dans [CH09]. En effet, comme en 2D, toutes ces approches font intervenir outre le maillage initial, le maillage des mailles duales construites autour des sommets du maillage primal. On a naturellement deux directions, la direction des centres des mailles primales et la direction des sommets des mailles primales. Le choix de la troisième direction diffère selon les approches.

Dans le cas où les interfaces du maillage primal sont des triangles ou des quadrilatères, dans [CPT08], les auteurs définissent un gradient discret par faces du maillage primal, avec la direction des centres et deux directions complémentaires données grâce aux sommets de la face. Une extension à des polyèdres généraux mais conformes est proposée dans [ABK08]. Dans la seconde approche [Her07], un nouveau jeu d'inconnues est formellement introduit aux faces et aux arêtes du maillage primal afin de reconstruire un gradient discret pour chaque couple face-arête, ces inconnues sont ensuite éliminées algébriquement. Le schéma obtenu pour des maillages polyédraux généraux conduit à des opérateurs linéaires non-symétriques, ceci rend l'analyse théorique de ces schémas plus difficile. Dans la troisième approche [CH09], des degrés de liberté similaires sont introduits, ils vont jouer un rôle analogue aux inconnues localisées aux centres et aux sommets du maillage primal. On travaille alors avec un triplet de maillages $\mathcal{T} := (\mathfrak{M}^{\mathcal{P}}, \mathfrak{M}^{\mathcal{V}}, \mathfrak{M}^{\mathcal{EF}})$, composé du maillage primal $\mathfrak{M}^{\mathcal{P}}$, du maillage "sommets" $\mathfrak{M}^{\mathcal{V}}$ et du maillage "face-arête" $\mathfrak{M}^{\mathcal{EF}}$, et avec le *maillage diamant* \mathfrak{D} associé à chaque couple face-arête. Ainsi l'équation de diffusion est intégrée sur toutes les mailles intérieures de ce maillage \mathcal{T} . Dans ce chapitre on décrit ces maillages $\mathcal{T} := (\mathfrak{M}^{\mathcal{P}}, \mathfrak{M}^{\mathcal{V}}, \mathfrak{M}^{\mathcal{EF}})$. Puis, on construit un opérateur gradient discret $\nabla^{\mathfrak{D}} : u^{\mathcal{T}} \in \mathbb{R}^{\mathcal{T}} \rightarrow (\nabla^{\mathcal{P}} u^{\mathcal{T}})_{\mathfrak{p} \in \mathfrak{D}} \in (\mathbb{R}^3)^{\mathfrak{D}}$ (voir Définition IX.1), cet opérateur est en dualité avec l'opérateur divergence discrète $\text{div}^{\mathcal{T}} : (\mathbb{R}^3)^{\mathfrak{D}} \rightarrow \mathbb{R}^{\mathcal{T}}$ (voir Définition IX.2).

IX.1 Construction des maillages

Revenons sur la construction de \mathcal{T} et de \mathfrak{D} . La construction des maillages commence par \mathfrak{M} , une partition du domaine de calcul Ω , elle est formée par $N_{\mathcal{P}}$ polyèdres, $N_{\mathcal{F}}$ faces planaires, $N_{\mathcal{E}}$ arêtes, et $N_{\mathcal{V}}$ sommets. Nous notons :

- \mathcal{P} l'ensemble des polyèdres, \mathfrak{p} un polyèdre, $m_{\mathfrak{p}}$ son volume, \mathbf{P} son barycentre ; on a $\overline{\Omega} = \bigcup_{\mathfrak{p} \in \mathcal{P}} \overline{\mathfrak{p}}$;
- \mathcal{F} l'ensemble des faces, \mathfrak{f} une face, $|\mathfrak{f}|$ son aire, \mathbf{F} son barycentre ; chaque face d'un polyèdre est soit une interface entre deux polyèdres distincts soit une face du bord du domaine ; par conséquent, si \mathfrak{f} est une

¹Un aide mémoire rassemblant les notations de ce chapitre est disponible pages 245 et 246.

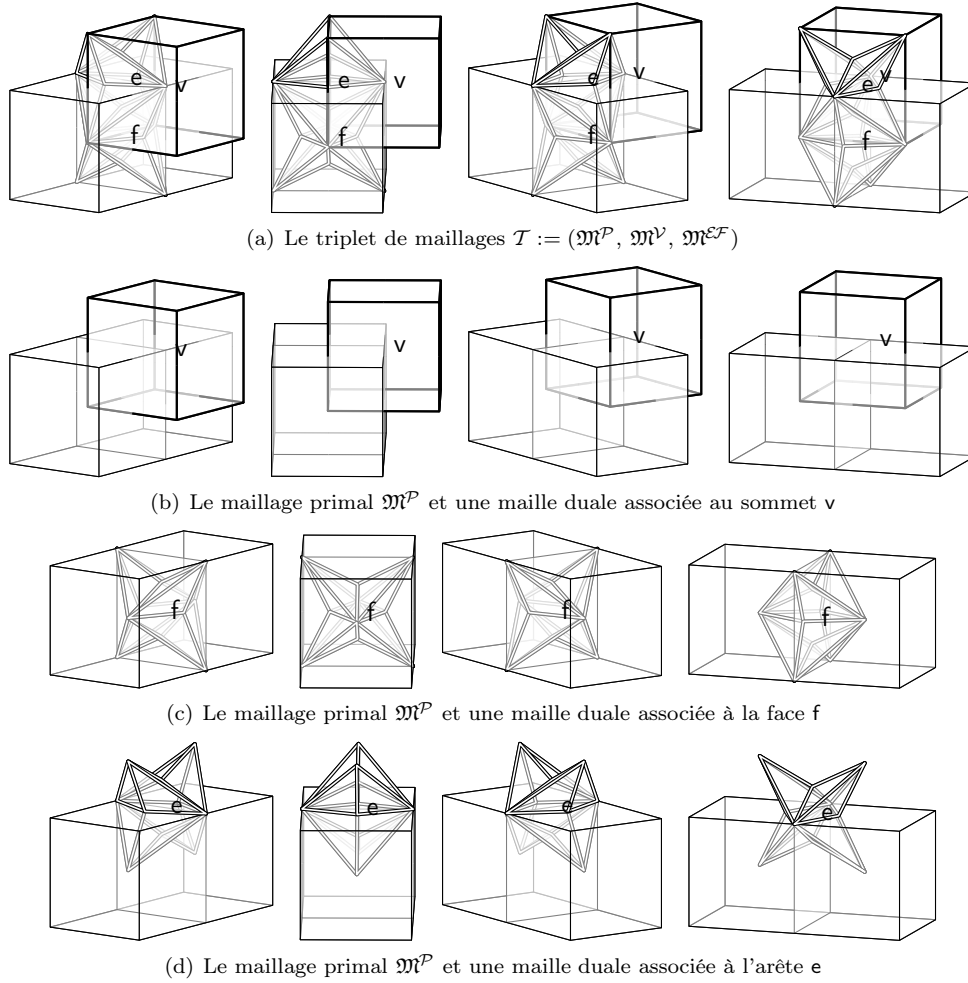


FIG. IX.1 – Vue 3D du triplet de maillages \mathcal{T} associé à une grille cartésienne.

face de \mathcal{F} soit il existe deux polyèdres \mathbf{p}_K et \mathbf{p}_L dans \mathcal{P} tels que $f = \overline{\mathbf{p}_K} \cap \overline{\mathbf{p}_L}$, soit il existe un polyèdre \mathbf{p}_K dans \mathcal{P} tel que $f = \partial \mathbf{p}_K \cap \partial \Omega$;

- \mathcal{E} l'ensemble des arêtes, \mathbf{e} une arête, $|\mathbf{e}|$ sa longueur, E son milieu; chaque arête d'une face de \mathcal{F} est une arête de \mathcal{E} ;
- \mathcal{V} l'ensemble des sommets, \mathbf{v} un sommet et $\mathbf{x}_\mathbf{v}$ ses coordonnées; chaque sommet d'une face de \mathcal{F} est un sommet de \mathcal{V} .

Les mailles du maillage $\mathcal{M}^\mathcal{P}$ sont associées aux polyèdres de \mathcal{P} , les mailles du maillage $\mathcal{M}^\mathcal{V}$ sont associées aux sommets de \mathcal{V} , tandis que les mailles du maillage $\mathcal{M}^{\mathcal{EF}}$ sont associées aux arêtes de \mathcal{E} et aux faces de \mathcal{F} . Nous les appelons respectivement *mailles primales*, *mailles de type sommet*, et *mailles de type face-arête*. Comme il y a une correspondance entre les sommets du maillage et les mailles de type sommet, nous allons utiliser le même symbole sommet \mathbf{v} pour les représenter et le volume d'une maille sommet \mathbf{v} est désigné par $m_\mathbf{v}$. Nous notons génériquement \mathbf{s} les mailles de type face-arête, qui interviennent dans la définition du maillage $\mathcal{M}^{\mathcal{EF}}$; et $m_\mathbf{s}$ représente le volume d'une maille générique $\mathbf{s} \in \mathcal{M}^{\mathcal{EF}}$. Les symboles \mathbf{p} , \mathbf{v} , \mathbf{s} peuvent être commodément notés pour représenter différents cas, par exemple, \mathbf{p}_K , \mathbf{p}_L , \mathbf{v}_A , \mathbf{v}_B , etc. Nous notons $\text{size}(\mathcal{T})$ le pas du maillage, c'est-à-dire, une longueur caractéristique du maillage, et défini par $\text{size}(\mathcal{T}) = \max_{\mathbf{e} \in \mathcal{E}} |\mathbf{e}|$.

Construction de \mathcal{D}

Le maillage diamant est composé de volumes de contrôle associés à un couple face-arête. Pour une arête \mathbf{e} d'une face f avec $\mathbf{e} \subset \partial f$, on considère les sept points géométriques suivants (voir la Figure IX.2) :

- F , le barycentre de la face f ;
- E , le point milieu de l'arête \mathbf{e} ;
- A , le premier sommet de l'arête \mathbf{e} ;
- B , le second sommet de l'arête \mathbf{e} ;
- K , le barycentre de la première maille qui a pour face f ;
- L , le barycentre de la seconde maille qui a pour face f quand f est une face intérieure; Si f est une face du bord, on prend $L = F$;
- D , le barycentre du triangle dont les sommets sont les points F , A et B .

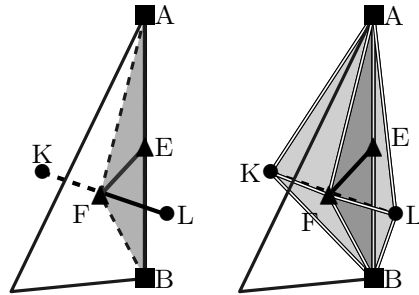


FIG. IX.2 – La construction d'un diamant

A l'aide de ces sept points, on peut définir un diamant $\mathcal{D}_{(\mathbf{e},f)}$ ou \mathcal{D} associé à chaque couple face-arête (\mathbf{e}, f) avec $\mathbf{e} \subset \partial f$ (voir la Figure IX.3) comme la réunion de huit tétraèdres ayant D comme sommet commun, avec trois autres sommets choisis dans les couples (A, B) , (K, L) et (E, F) , ce qu'on représente par

$$\mathcal{D} = \text{HULL} \left\{ D, \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} E \\ F \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} K \\ L \end{pmatrix} \right\},$$

où $\text{HULL}\{\star\}$ représente l'enveloppe convexe de l'ensemble des points représenté par \star . Si $f \in \partial \Omega$, alors le diamant dégénère en seulement quatre tétraèdres, car $L = F$, à savoir

$$\mathcal{D} = \text{HULL} \left\{ D, \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} E \\ F \end{pmatrix}, K \right\}.$$

Pour chaque diamant $\mathcal{D} \in \mathcal{D}$ on note son volume $m_\mathcal{D}$ et une longueur caractéristique $d_\mathcal{D}$, qui est de l'ordre du pas du maillage $\text{size}(\mathcal{T})$, par exemple $d_\mathcal{D} = \text{diam}(\mathcal{D})$.

On choisit l'orientation suivante. Quand f est une face du bord, le vecteur unitaire \mathbf{n}_f orthogonal à f sort toujours du domaine Ω , tandis que, si f est une face intérieure, \mathbf{n}_f est orienté du point K vers le point L . De

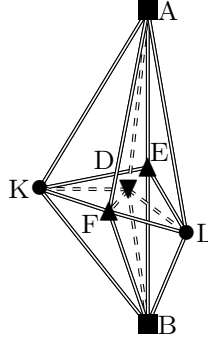


FIG. IX.3 – Le diamant et les sept points géométriques associés

même, on suppose que le vecteur unitaire parallèle à la direction de l'arête \mathbf{e} est orienté du sommet A vers le sommet B. Une fois que l'orientation des faces et des arêtes a été fixée dans le maillage primal \mathfrak{M}^P , les sept points A, B, D, E, F, K, et L sont déterminés de manière unique pour chaque couple admissible (\mathbf{e}, \mathbf{f}) .

Dans la suite, le symbole $T_{v_1 v_2 v_3}$ représente le triangle dont les sommets sont v_1 , v_2 , et v_3 .

La construction des mailles de \mathfrak{M}^P , \mathfrak{M}^V , et $\mathfrak{M}^{\mathcal{F}}$ est basée sur trois décompositions différentes et réassemblages des diamants de \mathfrak{D} . Chaque diamant, en effet, peut être décomposé en deux sous-cellules de trois manières différentes, chacune conduit à un maillage du triplet \mathcal{T} . On utilise le symbole $\mathfrak{D}_{|\nu}$ où ν est le volume de contrôle associé à l'un des points de l'ensemble $\{A, B, E, F, K, L\}$ ou à l'un des volumes de contrôle $\mathbf{p}, \mathbf{v}, \mathbf{s}$ pour désigner des sous-ensembles de \mathfrak{D} des diamants $\mathfrak{D}_{(\mathbf{e}, \mathbf{f})}$ tels que $m_{\nu \cap \mathfrak{D}_{(\mathbf{e}, \mathbf{f})}} > 0$. De même, $\mathfrak{D}_{|\mathcal{D}}$ représente l'ensemble des diamants \mathfrak{D}' qui sont voisins du diamant \mathfrak{D} , c'est-à-dire tels que la surface $\sigma = \overline{\mathfrak{D}} \cap \overline{\mathfrak{D}'}$ est non vide. On note par $(\mathfrak{D}|\mathfrak{D}')$ et $\sigma = (\mathfrak{D}|\mathfrak{D}')$ de tels couples $(\mathfrak{D}, \mathfrak{D}')$ dans $\mathfrak{D} \times \mathfrak{D}$.

Caractérisation de \mathfrak{M}^P

\mathfrak{M}^P est composé de la partition initiale \mathfrak{M} , de laquelle toutes les constructions de maillage commencent, et des faces du bord du domaine. Ici, on relie \mathfrak{M}^P et \mathfrak{D} , c'est-à-dire on relie les mailles primales et les diamants, et on introduit quelques notations supplémentaires.

Les volumes de contrôle \mathbf{p} peuvent être définis comme suit en regroupant quatre tétraèdres qui ont comme un sommet commun P au sein de chaque diamant \mathfrak{D} pour lequel P est un sommet. Ainsi les mailles primales \mathbf{p}_K et \mathbf{p}_L sont données par

$$\mathbf{p}_K = \bigcup_{\mathfrak{D} \in \mathfrak{D}_{|K}} \text{HULL} \left\{ D, \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} E \\ F \end{pmatrix}, K \right\} \quad \text{et} \quad \mathbf{p}_L = \bigcup_{\mathfrak{D} \in \mathfrak{D}_{|L}} \text{HULL} \left\{ D, \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} E \\ F \end{pmatrix}, L \right\}.$$

On remarque que pour les diamants du bord $\mathfrak{D} \in \mathfrak{D}_{ext}$ on a $L = F$, ainsi les mailles primales du bord sont des mailles dites dégénérées :

$$\mathbf{p}_L = \bigcup_{\mathfrak{D} \in \mathfrak{D}_{|L}} \text{HULL} \left\{ D, \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}, E, L \right\}.$$

En effet, elles dégénèrent en les faces du bord du domaine. Le maillage \mathfrak{M}^P peut se partager en deux sous-ensembles : $\mathfrak{M}^{P, \text{int}}$ les mailles dites intérieures $K \in \Omega$ et $\partial \mathfrak{M}^P$ les mailles dites dégénérées du bord $K \in \partial \Omega$:

$$\mathfrak{M}^{P, \text{int}} = \{\mathbf{p} \in \mathfrak{M}^P, \text{ tels que } P \in \Omega\} \quad \text{et} \quad \partial \mathfrak{M}^P = \{\mathbf{p} \in \mathfrak{M}^P, \text{ tels que } P \in \partial \Omega\}.$$

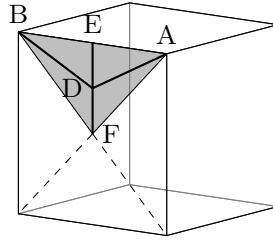
Pour chaque diamant \mathfrak{D} , on considère la surface donnée par l'union des quatre triangles suivants illustrée sur la Figure IX.4 :

$$\mathcal{S}_{D, KL} = T_{DFA} \cup T_{DAE} \cup T_{DEB} \cup T_{DBF}, \quad (\text{IX.1})$$

qui est dans l'intérieur du diamant \mathfrak{D} . Ces surfaces $\mathcal{S}_{D, KL}$ décomposent les faces des deux mailles primales \mathbf{p}_K et \mathbf{p}_L . Finalement, nous introduisons le vecteur $\mathbf{N}_{K, L}$ qui est donné par la somme des vecteurs produits par les quatre triangles de (IX.1) à travers la formule :

$$2\mathbf{N}_{K, L} = \overrightarrow{DA} \times \overrightarrow{DF} + \overrightarrow{DF} \times \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DB} \times \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{DE} \times \overrightarrow{DA}.$$

L'orientation est telle que $\mathbf{N}_{K, L} \cdot \overrightarrow{KL} = 3m_{\mathfrak{D}_{(\mathbf{e}, \mathbf{f})}} > 0$. On remarque que les quatre triangles qui composent $\mathcal{S}_{D, KL}$ dans (IX.1) appartiennent au même plan de la face \mathbf{f} , si on fait varier l'arête $\mathbf{e} \subset \partial \mathbf{f}$, on obtient d'autres triangles

FIG. IX.4 – La surface $\mathcal{S}_{D,KL}$ dans le cas d'une maille primale cubique

et tous ces triangles doivent redonner la face f . Ainsi, les vecteurs donnés par tous les choix possibles de $\mathbf{e} \subset \partial f$ sont parallèles au vecteur unitaire \mathbf{n}_f orthogonal à f , et la taille de chaque vecteur vaut la mesure de la surface correspondante $\mathcal{S}_{D,KL}$.

Construction de $\mathfrak{M}^{\mathcal{V}}$

Dans ce paragraphe, on détaille la construction du maillage sommet $\mathfrak{M}^{\mathcal{V}}$ dont les mailles sont associées à \mathcal{V} , les sommets du maillage \mathfrak{M} . Les volumes de contrôle \mathbf{v} peuvent être définis comme suit en regroupant quatre tétraèdres qui ont comme un sommet commun V au sein de chaque diamant \mathcal{D} pour lequel V est un sommet. Ainsi une maille duale “sommet” est donnée par

$$\mathbf{v}_A = \bigcup_{\mathcal{D} \in \mathfrak{D}_{|A}} \text{HULL} \left\{ D, A, \begin{pmatrix} E \\ F \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} K \\ L \end{pmatrix} \right\}.$$

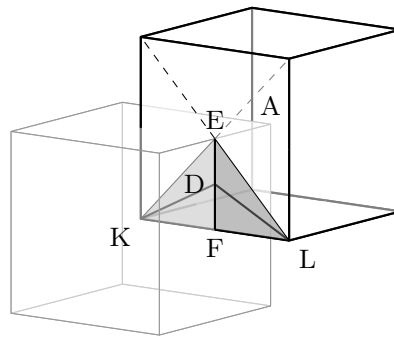
Cette définition est valable pour les sommets intérieurs et du bord. Le maillage $\mathfrak{M}^{\mathcal{V}}$ peut se partager en deux sous-ensembles : $\mathfrak{M}^{\mathcal{V},\text{int}}$ les sommets intérieurs $V \in \Omega$ et $\partial \mathfrak{M}^{\mathcal{V}}$ les sommets du bord $V \in \partial \Omega$:

$$\mathfrak{M}^{\mathcal{V},\text{int}} = \{\mathbf{v} \in \mathfrak{M}^{\mathcal{V}}, \text{ tels que } V \in \Omega\} \quad \text{et} \quad \partial \mathfrak{M}^{\mathcal{V}} = \{\mathbf{v} \in \mathfrak{M}^{\mathcal{V}}, \text{ tels que } V \in \partial \Omega\}.$$

Pour chaque diamant \mathcal{D} , on considère la surface donnée par l'union des quatre triangles suivants illustrée sur la Figure IX.5 :

$$\mathcal{S}_{D,AB} = T_{DKF} \cup T_{DFL} \cup T_{DLE} \cup T_{DEK}, \quad (\text{IX.2})$$

qui est dans l'intérieur du diamant \mathcal{D} . Ces surfaces $\mathcal{S}_{D,AB}$ décomposent les faces des deux mailles duales sommets \mathbf{v}_A et \mathbf{v}_B . Un exemple de maille duale de $\mathfrak{M}^{\mathcal{V}}$ de type *sommet*, dans le cas du maillage primal $\mathfrak{M}^{\mathcal{P}}$ formé de

FIG. IX.5 – La surface $\mathcal{S}_{D,AB}$ dans le cas d'une maille primale cubique

cubes, est donné dans la Figure IX.1(b). Finalement, nous introduisons le vecteur $\mathbf{N}_{A,B}$ qui est donné par la somme des vecteurs produits par les quatre triangles de (IX.2) à travers la formule :

$$2\mathbf{N}_{A,B} = \overrightarrow{DF} \times \overrightarrow{DK} + \overrightarrow{DK} \times \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{DE} \times \overrightarrow{DL} + \overrightarrow{DL} \times \overrightarrow{DF}.$$

L'orientation est telle que $\mathbf{N}_{A,B} \cdot \overrightarrow{AB} = 3m_{\mathcal{D}(\mathbf{e},f)} > 0$.

Construction de $\mathfrak{M}^{\mathcal{EF}}$

Dans ce paragraphe, on détaille la construction du maillage face-arête $\mathfrak{M}^{\mathcal{EF}}$ dont les mailles sont associées à \mathcal{E} et \mathcal{F} , les arêtes et les faces du maillage \mathfrak{M} , respectivement. Les volumes de contrôle \mathbf{s} peuvent être définis comme suit en regroupant quatre tétraèdres qui ont comme sommet commun S au sein de chaque diamant \mathcal{D} pour lequel S est un sommet. Ainsi les mailles duales \mathbf{s}_E et \mathbf{s}_F sont données par

$$\mathbf{s}_E = \bigcup_{\mathcal{D} \in \mathfrak{D}_{|A}} \text{HULL} \left\{ D, \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}, E, \begin{pmatrix} K \\ L \end{pmatrix} \right\} \quad \text{et} \quad \mathbf{s}_F = \bigcup_{\mathcal{D} \in \mathfrak{D}_{|A}} \text{HULL} \left\{ D, \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}, F, \begin{pmatrix} K \\ L \end{pmatrix} \right\}.$$

Cette définition est valable pour les faces et arêtes intérieures et du bord. Le maillage $\mathfrak{M}^{\mathcal{EF}}$ peut se partager en deux sous-ensembles : $\mathfrak{M}^{\mathcal{EF}, \text{int}}$ les sommets intérieurs $S \in \Omega$ et $\partial \mathfrak{M}^{\mathcal{EF}}$ les sommets du bord $S \in \partial \Omega$:

$$\mathfrak{M}^{\mathcal{EF}, \text{int}} = \{\mathbf{s} \in \mathfrak{M}^{\mathcal{EF}}, \text{ tels que } S \in \Omega\} \quad \text{et} \quad \partial \mathfrak{M}^{\mathcal{EF}} = \{\mathbf{s} \in \mathfrak{M}^{\mathcal{EF}}, \text{ tels que } S \in \partial \Omega\}.$$

Pour chaque diamant \mathcal{D} , on considère la surface donnée par l'union des quatre triangles suivants illustrée sur la Figure IX.6 :

$$\mathcal{S}_{D,EF} = T_{DKA} \cup T_{DAL} \cup T_{DLB} \cup T_{DBK}. \quad (\text{IX.3})$$

Ces surfaces $\mathcal{S}_{D,EF}$ décomposent les faces des deux mailles duales \mathbf{s}_E et \mathbf{s}_F . Un exemple de deux mailles duales de

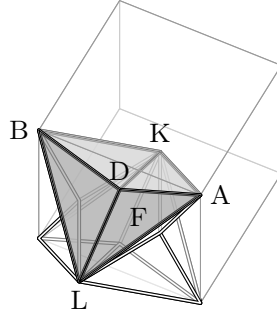


FIG. IX.6 – La surface $\mathcal{S}_{D,EF}$ dans le cas d'une maille primale cubique

$\mathfrak{M}^{\mathcal{EF}}$ de type *face* et *arête*, dans le cas du maillage primal $\mathfrak{M}^{\mathcal{P}}$ formé de cubes, est donné dans la Figure IX.1(c) et la Figure IX.1(d), respectivement. Comme pour les mailles des maillages $\mathfrak{M}^{\mathcal{P}}$ et $\mathfrak{M}^{\mathcal{V}}$, nous introduisons le vecteur $\mathbf{N}_{E,F}$ qui est donné par la somme des vecteurs produits par les quatre triangles de (IX.3) à travers la formule :

$$2\mathbf{N}_{E,F} = \overrightarrow{DA} \times \overrightarrow{DK} + \overrightarrow{DK} \times \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DB} \times \overrightarrow{DL} + \overrightarrow{DL} \times \overrightarrow{DA}.$$

L'orientation est telle que $\mathbf{N}_{E,F} \cdot \overrightarrow{EF} = 3m_{\mathcal{D}(\mathbf{e},\mathbf{f})} > 0$.

Finalement, nous introduisons les notations suivantes pour les vecteurs normaux :

$$\mathbf{N}_{\mathcal{D},\mathbf{p}} = \begin{cases} +\mathbf{N}_{K,L} & \text{si } \mathbf{p} \equiv \mathbf{p}_K \\ -\mathbf{N}_{K,L} & \text{si } \mathbf{p} \equiv \mathbf{p}_L \end{cases}$$

$$\mathbf{N}_{\mathcal{D},\mathbf{v}} = \begin{cases} +\mathbf{N}_{A,B} & \text{si } \mathbf{v} \equiv \mathbf{v}_A \\ -\mathbf{N}_{A,B} & \text{si } \mathbf{v} \equiv \mathbf{v}_B \end{cases}$$

$$\mathbf{N}_{\mathcal{D},\mathbf{s}} = \begin{cases} +\mathbf{N}_{E,F} & \text{si } \mathbf{s} \equiv \mathbf{s}_E \\ -\mathbf{N}_{E,F} & \text{si } \mathbf{s} \equiv \mathbf{s}_F \end{cases}$$

où $\mathcal{D} \equiv \mathcal{D}(\mathbf{e},\mathbf{f})$ est le diamant associé au couple (\mathbf{e},\mathbf{f}) et A, B, K, L, E, F sont les points correspondants. Cette notation sera utilisée dans la définition de la divergence discrète.

Régularité du maillage

Nous nous intéressons à la formulation d'une méthode d'approximation basée sur la famille de maillage $\{(\mathcal{T}, \mathfrak{D})\}$ pour $\text{size}(\mathcal{T}) \rightarrow 0$. Ces maillages peuvent contenir des éléments de forme très générale et des mailles non-convexes peuvent être présentes. Cependant, nous allons supposer quelques hypothèses minimales listées ci-après pour

la forme des éléments du maillage \mathfrak{M} afin d'éliminer quelques situations pathologiques qui peuvent apparaître dans la procédure de raffinement.

Le nombre de faces de chaque maille $\mathbf{p} \in \mathcal{P}$ et le nombre d'arêtes de chaque face $\mathbf{f} \in \mathcal{F}$ sont uniformément bornés par un entier $\mathcal{N}_{\mathcal{EF}}$ donné quand $\text{size}(\mathcal{T}) \rightarrow 0$; le nombre d'arêtes de chaque sommet est uniformément borné par un entier $\mathcal{N}_{\mathcal{V}}$ donné quand $\text{size}(\mathcal{T}) \rightarrow 0$. La décomposition de chaque polyèdre $\mathbf{p} \in \mathfrak{M}$ en tétraèdres est formée par au plus \mathcal{N}_* tétraèdres, où \mathcal{N}_* est un entier donné indépendant de $\text{size}(\mathcal{T})$; Toutes les quantités géométriques des trois maillages qui forment \mathcal{T} et du maillage \mathfrak{D} sont de même échelle. En particulier, il existe une constante $C_{reg} > 0$ indépendante de $\text{size}(\mathcal{T})$ telle que

$$\begin{aligned} \forall \mathbf{e} \in \mathcal{E} : C_{reg} \text{size}(\mathcal{T}) &\leq |\mathbf{e}|, \quad \forall \mathbf{f} \in \mathcal{F} : C_{reg}^2 \text{size}(\mathcal{T})^2 \leq |\mathbf{f}|, \quad \forall \mathbf{p} \in \mathcal{P} : C_{reg}^3 \text{size}(\mathcal{T})^3 \leq m_{\mathbf{p}}; \\ \forall T \subset \partial \mathcal{D} \cup \mathcal{S}_{D,KL} \cup \mathcal{S}_{D,AB} \cup \mathcal{S}_{D,EF}, \forall \mathcal{D} \in \mathfrak{D} : C_{reg}^2 \text{size}(\mathcal{T})^2 &\leq m_T \leq \text{size}(\mathcal{T})^2; \\ \forall \mathcal{D} \in \mathfrak{D} : C_{reg} \text{size}(\mathcal{T}) &\leq d_{\mathcal{D}} \leq \text{size}(\mathcal{T}) \text{ et } C_{reg}^3 \text{size}(\mathcal{T})^3 \leq m_{\mathcal{D}}; \\ \forall \nu \in \mathfrak{M}^{\mathcal{P}}, \mathfrak{M}^{\mathcal{V}}, \mathfrak{M}^{\mathcal{EF}} : \text{diam}(\nu) &\leq C_{reg} \text{size}(\mathcal{T}). \end{aligned} \quad (\text{IX.4})$$

IX.2 Opérateurs discrets dans le cas scalaire

On considère les espaces d'approximation suivants :

- *un nombre par maille* des maillages $\mathfrak{M}^{\mathcal{P}}, \mathfrak{M}^{\mathcal{V}}, \mathfrak{M}^{\mathcal{EF}}$ pour définir l'espace linéaire du champ *scalaire* discret sur \mathcal{T} , qui est noté $\mathbb{R}^{\mathcal{T}}$;
- *un vecteur tridimensionnel par maille* du maillage \mathfrak{D} pour définir l'espace linéaire du champ *tridimensionnel* discret sur \mathfrak{D} , qui est noté $(\mathbb{R}^3)^{\mathfrak{D}}$;

Ainsi, on a que $u^{\mathcal{T}} \in \mathbb{R}^{\mathcal{T}}$ signifie $u^{\mathcal{T}} = \{(u_{\mathbf{p}})_{\mathbf{p} \in \mathfrak{M}^{\mathcal{P}}}, (u_{\mathbf{v}})_{\mathbf{v} \in \mathfrak{M}^{\mathcal{V}}}, (u_{\mathbf{s}})_{\mathbf{s} \in \mathfrak{M}^{\mathcal{EF}}}\}$, où $u_{\mathbf{p}}$ est le nombre attaché à la maille \mathbf{p} , etc. Nous utilisons aussi la notation simplifiée u_K, u_A , etc pour représenter l'inconnue associée aux mailles $\mathbf{p}_K, \mathbf{v}_A$, etc. Nous définissons également \mathbb{E}_0 , qui représente le sous-espace de $\mathbb{R}^{\mathcal{T}}$, dont les inconnues du bord sont nulles :

$$\mathbb{E}_0 = \{(u_{\mathbf{p}})_{\mathbf{p} \in \mathfrak{M}^{\mathcal{P}, \text{int}}}, (0)_{\mathbf{p} \in \partial \mathfrak{M}^{\mathcal{P}}}, (u_{\mathbf{v}})_{\mathbf{v} \in \mathfrak{M}^{\mathcal{V}, \text{int}}}, (0)_{\mathbf{v} \in \partial \mathfrak{M}^{\mathcal{V}}}, (u_{\mathbf{s}})_{\mathbf{s} \in \mathfrak{M}^{\mathcal{EF}, \text{int}}}, (0)_{\mathbf{s} \in \partial \mathfrak{M}^{\mathcal{EF}}}\}. \quad (\text{IX.5})$$

Maintenant, on définit les opérateurs discrets qui agissent sur les espaces linéaires introduits.

Opérateurs discrets

Définition IX.1

Le gradient discret est défini de la manière suivante : $\nabla^{\mathfrak{D}} : \mathbb{R}^{\mathcal{T}} \rightarrow (\mathbb{R}^3)^{\mathfrak{D}}$. Soit $u^{\mathcal{T}} \in \mathbb{R}^{\mathcal{T}}$, on pose $\nabla^{\mathfrak{D}} u^{\mathcal{T}} = (\nabla^{\mathcal{D}} u^{\mathcal{T}})_{\mathcal{D} \in \mathfrak{D}}$, et pour $\mathcal{D} \in \mathfrak{D}$:

$$\nabla^{\mathcal{D}} u^{\mathcal{T}} = \frac{1}{3m_{\mathcal{D}}} \left((u_L - u_K) \mathbf{N}_{K,L} + (u_B - u_A) \mathbf{N}_{A,B} + (u_F - u_E) \mathbf{N}_{E,F} \right).$$

Il est défini comme l'*unique* vecteur tridimensionnel constant défini sur \mathcal{D} (voir la Figure IX.3) qui vérifie

$$\nabla^{\mathcal{D}} u^{\mathcal{T}} \cdot \overrightarrow{KL} = u_L - u_K, \quad \nabla^{\mathcal{D}} u^{\mathcal{T}} \cdot \overrightarrow{AB} = u_B - u_A, \quad \nabla^{\mathcal{D}} u^{\mathcal{T}} \cdot \overrightarrow{EF} = u_F - u_E.$$

Définition IX.2

L'opérateur de divergence discrète est défini de la manière suivante : $\text{div}^{\mathcal{T}} : (\mathbb{R}^3)^{\mathfrak{D}} \rightarrow \mathbb{R}^{\mathcal{T}}$. Soit $\xi^{\mathfrak{D}} \in (\mathbb{R}^3)^{\mathfrak{D}}$,

on pose $\operatorname{div}^\tau \xi^\mathfrak{D} = \left(\operatorname{div}^\mathcal{P}(\xi^\mathfrak{D}), \operatorname{div}^\mathcal{V}(\xi^\mathfrak{D}), \operatorname{div}^\mathcal{EF}(\xi^\mathfrak{D}) \right)$ avec

$$\begin{aligned} \operatorname{div}^\mathcal{P}(\xi^\mathfrak{D}) &= \left\{ (\operatorname{div}^\mathcal{P}(\xi^\mathfrak{D}))_{\mathbf{p} \in \mathfrak{M}^\mathcal{P}} \right\} \quad \text{où } \forall \mathbf{p} \in \mathfrak{M}^{\mathcal{P}, \text{int}} : \operatorname{div}^\mathcal{P}(\xi^\mathfrak{D}) = \frac{1}{m_{\mathbf{p}}} \sum_{\mathcal{D} \in \mathfrak{D}_{|\mathbf{p}}} \xi_{\mathcal{D}} \cdot \mathbf{N}_{\mathcal{D}, \mathbf{p}}, \\ &\quad \forall \mathbf{p} \in \partial \mathfrak{M}^\mathcal{P} : \operatorname{div}^\mathcal{P}(\xi^\mathfrak{D}) = 0, \\ \operatorname{div}^\mathcal{V}(\xi^\mathfrak{D}) &= \left\{ (\operatorname{div}^\mathcal{V}(\xi^\mathfrak{D}))_{\mathbf{v} \in \mathfrak{M}^\mathcal{V}} \right\} \quad \text{où } \forall \mathbf{v} \in \mathfrak{M}^\mathcal{V} : \operatorname{div}^\mathcal{V}(\xi^\mathfrak{D}) = \frac{1}{m_{\mathbf{v}}} \sum_{\mathcal{D} \in \mathfrak{D}_{|\mathbf{v}}} \xi_{\mathcal{D}} \cdot \mathbf{N}_{\mathcal{D}, \mathbf{v}}, \\ \operatorname{div}^\mathcal{EF}(\xi^\mathfrak{D}) &= \left\{ (\operatorname{div}^\mathcal{EF}(\xi^\mathfrak{D}))_{\mathbf{s} \in \mathfrak{M}^\mathcal{EF}} \right\} \quad \text{où } \forall \mathbf{s} \in \mathfrak{M}^\mathcal{EF} : \operatorname{div}^\mathcal{EF}(\xi^\mathfrak{D}) = \frac{1}{m_{\mathbf{s}}} \sum_{\mathcal{D} \in \mathfrak{D}_{|\mathbf{s}}} \xi_{\mathcal{D}} \cdot \mathbf{N}_{\mathcal{D}, \mathbf{s}}. \end{aligned}$$

Relation de dualité : Formule de Green

On considère les produits scalaires suivants :

$$\begin{aligned} [v^\tau, u^\tau]_\mathcal{T} &= \frac{1}{3} \left(\sum_{\mathbf{p} \in \mathfrak{M}^{\mathcal{P}, \text{int}}} m_{\mathbf{p}} u_{\mathbf{p}} v_{\mathbf{p}} + \sum_{\mathbf{v} \in \mathfrak{M}^\mathcal{V}} m_{\mathbf{v}} u_{\mathbf{v}} v_{\mathbf{v}} + \sum_{\mathbf{s} \in \mathfrak{M}^\mathcal{EF}} m_{\mathbf{s}} u_{\mathbf{s}} v_{\mathbf{s}} \right), \quad \forall u^\tau, v^\tau \in \mathbb{R}^\tau, \\ (\xi^\mathfrak{D}, \phi^\mathfrak{D})_\mathfrak{D} &= \sum_{\mathcal{D} \in \mathfrak{D}} m_{\mathcal{D}} \xi_{\mathcal{D}} \cdot \phi_{\mathcal{D}}, \quad \forall \xi^\mathfrak{D}, \phi^\mathfrak{D} \in (\mathbb{R}^3)^\mathfrak{D}, \end{aligned} \tag{IX.6}$$

et les normes correspondantes

$$\|u^\tau\|_2 = [u^\tau, u^\tau]_\mathcal{T}^{\frac{1}{2}}, \quad \forall u^\tau \in \mathbb{R}^\tau, \quad \|\xi^\mathfrak{D}\|_2 = (\xi^\mathfrak{D}, \xi^\mathfrak{D})_\mathfrak{D}^{\frac{1}{2}}, \quad \forall \xi^\mathfrak{D} \in (\mathbb{R}^3)^\mathfrak{D}.$$

On remarque que si $(u^\tau, v^\tau) \in \mathbb{E}_0 \times \mathbb{R}^\tau$, on a alors

$$[v^\tau, u^\tau]_\mathcal{T} = \frac{1}{3} \left(\sum_{\mathbf{p} \in \mathfrak{M}^{\mathcal{P}, \text{int}}} m_{\mathbf{p}} u_{\mathbf{p}} v_{\mathbf{p}} + \sum_{\mathbf{v} \in \mathfrak{M}^{\mathcal{V}, \text{int}}} m_{\mathbf{v}} u_{\mathbf{v}} v_{\mathbf{v}} + \sum_{\mathbf{s} \in \mathfrak{M}^{\mathcal{EF}, \text{int}}} m_{\mathbf{s}} u_{\mathbf{s}} v_{\mathbf{s}} \right).$$

Comme en 2D, les deux opérateurs discrets introduits sont en dualité. En effet, grâce aux produits scalaires ci-dessus, on peut écrire une formule de Green. La démonstration de cette formule de Green n'est pas donnée ici, on réfère à [CH09].

Théorème IX.3 (Formule de Green)

Pour tout $\xi^\mathfrak{D}, u^\tau \in (\mathbb{R}^3)^\mathfrak{D} \times \mathbb{E}_0$, on a

$$[\operatorname{div}^\tau \xi^\mathfrak{D}, u^\tau]_\mathcal{T} = -(\xi^\mathfrak{D}, \nabla^\mathfrak{D} u^\tau)_\mathfrak{D}.$$

Chapitre X

Méthode DDFV 3D pour le problème de Stokes

Nous nous intéressons maintenant à l'approximation du problème de Stokes stationnaire en 3D par les méthodes DDFV¹. Nous nous plaçons dans le cas d'une viscosité variable mais régulière. Ce travail est soumis [KM10], il a été réalisé avec la collaboration de G. Manzini. Le problème s'écrit comme (VI.1) du Chapitre VI :

$$\begin{aligned} \text{Trouver } \mathbf{u} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3 \text{ une vitesse et } p : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ une pression telles que} \\ \begin{aligned} \operatorname{div}(-2\eta(x)\mathbf{D}\mathbf{u} + p\mathbf{Id}) &= \mathbf{f}, & \text{dans } \Omega, \\ \operatorname{div}(\mathbf{u}) &= 0, & \text{dans } \Omega, \\ \mathbf{u} &= 0, & \text{sur } \partial\Omega, \end{aligned} \\ \int_{\Omega} p(x)dx = 0, \end{aligned} \quad (\text{X.1})$$

où Ω est un domaine ouvert borné polygonal de \mathbb{R}^3 , \mathbf{f} appartient à $(L^2(\Omega))^3$, $\mathbf{D}\mathbf{u} = \frac{1}{2}(\nabla\mathbf{u} + {}^t\nabla\mathbf{u})$ représente toujours la partie symétrique du gradient de vitesse et la viscosité η appartient à $L^\infty(\Omega)$ et elle est supposée lipschitzienne sur tout le domaine $\overline{\Omega}$: il existe trois constantes $C_\eta, \underline{C}_\eta, \overline{C}_\eta > 0$ telles que

$$\underline{C}_\eta \leq \eta(x) \leq \overline{C}_\eta, \quad \text{pour presque tout } x \in \Omega, \quad (\text{X.2})$$

et

$$|\eta(x) - \eta(x')| \leq C_\eta |x - x'|, \quad \forall x, x' \in \overline{\Omega}. \quad (\text{X.3})$$

On définit, dans les sections X.1 et X.2, les projections discrètes et les opérateurs discrets dans le cadre vectoriel. On montre que le gradient discret DDFV (voir Définition X.1) et la divergence discrète (voir Définition X.2) sont en dualité discrète (voir Théorème X.5). Puis on présente le schéma DDFV stabilisé (X.14) correspondant au problème (X.1). Les propriétés des opérateurs discrets DDFV (cas vectoriel) sont énoncés dans la section X.6. Nous insistons sur les démonstrations des résultats où la géométrie 3D engendre des difficultés supplémentaires par rapport au 2D (Chapitre IV). Ces résultats sont les Lemmes X.14, X.16 et la Proposition X.17 qui est utilisée dans la démonstration de l'inégalité de Korn discrète (voir Théorème X.19). Comme dans le Chapitre VI, grâce à la stabilisation de type Brezzi-Pitkäranta, on peut montrer la stabilité du schéma. Une conséquence immédiate de ce résultat est le caractère bien posé du schéma (X.14) pour des maillages généraux (voir Théorème X.21). Le résultat important de ce chapitre est l'estimation d'erreur (voir Théorème X.22) qui donne de l'ordre 1 en norme L^2 pour le gradient de vitesse, pour la pression et pour la vitesse. Pour finir, ces estimations sont illustrées par des tests numériques (voir Section X.9).

¹Un aide mémoire rassemblant les notations de ce chapitre est disponible pages 247.

X.1 Localisation des inconnues et définition des projections sur les maillages 3D

On considère les espaces d'approximation suivants :

- *un vecteur tridimensionnel par maille* des maillages $\mathfrak{M}^{\mathcal{P}}, \mathfrak{M}^{\mathcal{V}}, \mathfrak{M}^{\mathcal{EF}}$ pour définir l'espace linéaire du champ tridimensionnel discret sur \mathcal{T} , qui est noté $(\mathbb{R}^3)^{\mathcal{T}}$;
- *un nombre par maille* du maillage \mathfrak{D} pour définir l'espace linéaire du champ scalaire discret sur \mathfrak{D} , qui est noté $\mathbb{R}^{\mathfrak{D}}$;
- *une matrice 3×3 par maille* du maillage \mathfrak{D} pour définir l'espace linéaire du champ matriciel discret sur \mathfrak{D} , qui est noté $(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}))^{\mathfrak{D}}$;

Ainsi la méthode DDFV pour le problème de Stokes associe à la vitesse les inconnues $\mathbf{u}^{\mathcal{T}} \in (\mathbb{R}^3)^{\mathcal{T}}$ et à la pression les inconnues $p^{\mathfrak{D}} \in \mathbb{R}^{\mathfrak{D}}$, c'est-à-dire on a

$$\mathbf{u}^{\mathcal{T}} = ((\mathbf{u}_{\mathbf{p}})_{\mathbf{p} \in \mathfrak{M}^{\mathcal{P}}}, (\mathbf{u}_{\mathbf{v}})_{\mathbf{v} \in \mathfrak{M}^{\mathcal{V}}}, (\mathbf{u}_{\mathbf{s}})_{\mathbf{s} \in \mathfrak{M}^{\mathcal{EF}}}) \in (\mathbb{R}^3)^{\mathcal{T}} \quad \text{et} \quad p^{\mathfrak{D}} = ((p^{\mathfrak{D}})_{\mathcal{D} \in \mathfrak{D}}) \in \mathbb{R}^{\mathfrak{D}}.$$

Le sous-espace \mathbb{E}_0 de $(\mathbb{R}^3)^{\mathcal{T}}$ représente toujours les éléments de $(\mathbb{R}^3)^{\mathcal{T}}$ dont les inconnues du bord sont nulles :

$$\mathbb{E}_0 = \{(\mathbf{u}_{\mathbf{p}})_{\mathbf{p} \in \mathfrak{M}^{\mathcal{P}, \text{int}}}, (0)_{\mathbf{p} \in \partial \mathfrak{M}^{\mathcal{P}}}, (\mathbf{u}_{\mathbf{v}})_{\mathbf{v} \in \mathfrak{M}^{\mathcal{V}, \text{int}}}, (0)_{\mathbf{v} \in \partial \mathfrak{M}^{\mathcal{V}}}, (\mathbf{u}_{\mathbf{s}})_{\mathbf{s} \in \mathfrak{M}^{\mathcal{EF}, \text{int}}}, (0)_{\mathbf{s} \in \partial \mathfrak{M}^{\mathcal{EF}}}\}.$$

Les variables continues sont projetées sur le maillage \mathcal{T} de la manière suivante :

$$\mathbb{P}_{\mathbf{m}}^{\mathcal{T}} \mathbf{v} = (\mathbb{P}_{\mathbf{m}}^{\mathcal{P}}(\mathbf{v}), \mathbb{P}_{\mathbf{m}}^{\mathcal{V}}(\mathbf{v}), \mathbb{P}_{\mathbf{m}}^{\mathcal{EF}}(\mathbf{v})), \quad (\text{X.4})$$

avec

$$\mathbb{P}_{\mathbf{m}}^{\mathcal{P}}(\mathbf{v}) = \left(\frac{1}{m_{\mathbf{p}}} \int_{\mathbf{p}} \mathbf{v} dV \right)_{\mathbf{p} \in \mathfrak{M}^{\mathcal{P}}}, \quad \mathbb{P}_{\mathbf{m}}^{\mathcal{V}}(\mathbf{v}) = \left(\frac{1}{m_{\mathbf{v}}} \int_{\mathbf{v}} \mathbf{v} dV \right)_{\mathbf{v} \in \mathfrak{M}^{\mathcal{V}}}, \quad \mathbb{P}_{\mathbf{m}}^{\mathcal{EF}}(\mathbf{v}) = \left(\frac{1}{m_{\mathbf{s}}} \int_{\mathbf{s}} \mathbf{v} dV \right)_{\mathbf{s} \in \mathfrak{M}^{\mathcal{EF}}},$$

et sur le maillage \mathfrak{D} :

$$\mathbb{P}_{\mathbf{m}}^{\mathfrak{D}} q = \left(\left(\frac{1}{m_{\mathcal{D}}} \int_{\mathcal{D}} q(x) dx \right)_{\mathcal{D} \in \mathfrak{D}} \right), \quad \forall q \in H^1(\Omega), \quad (\text{X.5})$$

on parlera de projection moyenne. On peut également pour des fonctions plus régulières introduire une projection centrée sur \mathcal{T} :

$$\mathbb{P}_{\mathbf{c}}^{\mathcal{T}} \mathbf{v} = ((\mathbf{v}(\mathbf{x}_{\mathbf{p}}))_{\mathbf{p} \in \mathfrak{M}^{\mathcal{P}}}, (\mathbf{v}(\mathbf{x}_{\mathbf{v}}))_{\mathbf{v} \in \mathfrak{M}^{\mathcal{V}}}, (\mathbf{v}(\mathbf{x}_{\mathbf{s}}))_{\mathbf{s} \in \mathfrak{M}^{\mathcal{EF}}}), \quad \forall \mathbf{v} \in (H^2(\Omega))^3. \quad (\text{X.6})$$

X.2 Définition des opérateurs discrets

Dans cette section, on introduit les opérateurs discrets nécessaires pour écrire notre schéma DDFV en 3D. On commence par le gradient discret.

Définition X.1 (Gradient discret)

Le gradient discret est une application de $\nabla^{\mathfrak{D}} : (\mathbb{R}^3)^{\mathcal{T}} \rightarrow (\mathcal{M}_3(\mathbb{R}))^{\mathfrak{D}}$, telle que pour tout $\mathbf{u}^{\mathcal{T}} \in (\mathbb{R}^3)^{\mathcal{T}}$, $\nabla^{\mathfrak{D}} \mathbf{u}^{\mathcal{T}} = (\nabla^{\mathfrak{D}} \mathbf{u}^{\mathcal{T}})_{\mathcal{D} \in \mathfrak{D}}$, avec pour $\mathcal{D} \in \mathfrak{D}$:

$$\nabla^{\mathfrak{D}} \mathbf{u}^{\mathcal{T}} = \frac{1}{3m_{\mathcal{D}}} \left((\mathbf{u}_{\mathbf{L}} - \mathbf{u}_{\mathbf{K}}) \otimes \mathbf{N}_{\mathbf{K}, \mathbf{L}} + (\mathbf{u}_{\mathbf{B}} - \mathbf{u}_{\mathbf{A}}) \otimes \mathbf{N}_{\mathbf{A}, \mathbf{B}} + (\mathbf{u}_{\mathbf{F}} - \mathbf{u}_{\mathbf{E}}) \otimes \mathbf{N}_{\mathbf{E}, \mathbf{F}} \right),$$

où \otimes représente le produit tensoriel.

Il faut noter que $\nabla^{\mathfrak{D}} \mathbf{u}^{\mathcal{T}}$ est l'unique tenseur tridimensionnel constant défini sur \mathcal{D} qui vérifie

$$\begin{aligned} \nabla^{\mathfrak{D}} \mathbf{u}^{\mathcal{T}} \cdot \overrightarrow{\text{KL}} &= \mathbf{u}_{\mathbf{L}} - \mathbf{u}_{\mathbf{K}}, \\ \nabla^{\mathfrak{D}} \mathbf{u}^{\mathcal{T}} \cdot \overrightarrow{\text{AB}} &= \mathbf{u}_{\mathbf{B}} - \mathbf{u}_{\mathbf{A}}, \\ \nabla^{\mathfrak{D}} \mathbf{u}^{\mathcal{T}} \cdot \overrightarrow{\text{EF}} &= \mathbf{u}_{\mathbf{F}} - \mathbf{u}_{\mathbf{E}}. \end{aligned} \quad (\text{X.7})$$

Comme en 2D, la divergence discrète est définie à l'aide de la version discrète de :

$$\int_C \operatorname{div}(\xi(x)) dx = \sum_{\sigma \in \partial C} \int_{\sigma} \xi(s) \cdot \vec{n}_{\sigma} ds.$$

Définition X.2 (Divergence discrète)

La divergence d'un champ de tenseurs discrets de $(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}))^{\mathfrak{D}}$ est définie de la manière suivante : $\mathbf{div}^{\mathcal{T}} : \xi^{\mathfrak{D}} \in (\mathcal{M}_3(\mathbb{R}))^{\mathfrak{D}} \mapsto \mathbf{div}^{\mathcal{T}} \xi^{\mathfrak{D}} \in (\mathbb{R}^3)^{\mathcal{T}}$. Soit $\xi^{\mathfrak{D}} = (\xi^{\mathfrak{D}})_{\mathfrak{D} \in \mathfrak{D}} \in (\mathcal{M}_3(\mathbb{R}))^{\mathfrak{D}}$, on pose

$$\mathbf{div}^{\mathcal{T}} \xi^{\mathfrak{D}} = \left(\mathbf{div}^{\mathcal{P}}(\xi^{\mathfrak{D}}), \mathbf{div}^{\mathcal{V}}(\xi^{\mathfrak{D}}), \mathbf{div}^{\mathcal{EF}}(\xi^{\mathfrak{D}}) \right),$$

avec

$$\mathbf{div}^{\mathcal{P}}(\xi^{\mathfrak{D}}) = \left\{ (\mathbf{div}^{\mathcal{P}}(\xi^{\mathfrak{D}}))_{\mathfrak{p} \in \mathfrak{M}^{\mathcal{P}}} \right\} \quad \text{où} \quad \forall \mathfrak{p} \in \mathfrak{M}^{\mathcal{P}, \text{int}} : \mathbf{div}^{\mathcal{P}}(\xi^{\mathfrak{D}}) = \frac{1}{m_{\mathfrak{p}}} \sum_{\mathfrak{D} \in \mathfrak{D}_{|\mathfrak{p}}} \xi_{\mathfrak{D}} \cdot \mathbf{N}_{\mathfrak{D}, \mathfrak{p}}, \quad (\text{X.8})$$

$$\forall \mathfrak{p} \in \partial \mathfrak{M}^{\mathcal{P}} : \mathbf{div}^{\mathcal{P}}(\xi^{\mathfrak{D}}) = 0, \quad (\text{X.9})$$

$$\mathbf{div}^{\mathcal{V}}(\xi^{\mathfrak{D}}) = \left\{ (\mathbf{div}^{\mathcal{V}}(\xi^{\mathfrak{D}}))_{\mathfrak{v} \in \mathfrak{M}^{\mathcal{V}}} \right\} \quad \text{où} \quad \forall \mathfrak{v} \in \mathfrak{M}^{\mathcal{V}} : \mathbf{div}^{\mathcal{V}}(\xi^{\mathfrak{D}}) = \frac{1}{m_{\mathfrak{v}}} \sum_{\mathfrak{D} \in \mathfrak{D}_{|\mathfrak{v}}} \xi_{\mathfrak{D}} \cdot \mathbf{N}_{\mathfrak{D}, \mathfrak{v}}, \quad (\text{X.10})$$

$$\mathbf{div}^{\mathcal{EF}}(\xi^{\mathfrak{D}}) = \left\{ (\mathbf{div}^{\mathcal{EF}}(\xi^{\mathfrak{D}}))_{\mathfrak{s} \in \mathfrak{M}^{\mathcal{EF}}} \right\} \quad \text{où} \quad \forall \mathfrak{s} \in \mathfrak{M}^{\mathcal{EF}} : \mathbf{div}^{\mathcal{EF}}(\xi^{\mathfrak{D}}) = \frac{1}{m_{\mathfrak{s}}} \sum_{\mathfrak{D} \in \mathfrak{D}_{|\mathfrak{s}}} \xi_{\mathfrak{D}} \cdot \mathbf{N}_{\mathfrak{D}, \mathfrak{s}}. \quad (\text{X.11})$$

Comme en 2D, nous allons intégrer l'équation de bilan de quantité de mouvement sur les volumes "intérieurs" et utiliser l'opérateur *divergence interne*

$$\mathbf{div}^{\mathcal{T}, \text{int}}(\xi^{\mathfrak{D}}) = \left(\mathbf{div}^{\mathcal{P}, \text{int}}(\xi^{\mathfrak{D}}), \mathbf{div}^{\mathcal{V}, \text{int}}(\xi^{\mathfrak{D}}), \mathbf{div}^{\mathcal{EF}, \text{int}}(\xi^{\mathfrak{D}}) \right),$$

où $\mathbf{div}^{\mathcal{P}, \text{int}}(\xi^{\mathfrak{D}})$, $\mathbf{div}^{\mathcal{V}, \text{int}}(\xi^{\mathfrak{D}})$ et $\mathbf{div}^{\mathcal{EF}, \text{int}}(\xi^{\mathfrak{D}})$ sont définis comme dans (X.10)-(X.11), mais uniquement pour les volumes de contrôle intérieurs $\mathfrak{p} \in \Omega$, $\mathfrak{v} \in \Omega$ et $\mathfrak{s} \in \Omega$.

Grâce au gradient discret on peut définir un tenseur des taux de déformation et une divergence discrète d'un champ de vecteurs de $(\mathbb{R}^3)^{\mathcal{T}}$.

Définition X.3

On définit un tenseur des taux de déformation d'un champ de vecteurs de $(\mathbb{R}^3)^{\mathcal{T}}$ notée : $\mathbf{D}^{\mathfrak{D}} : \mathbf{u}^{\mathcal{T}} \in (\mathbb{R}^3)^{\mathcal{T}} \mapsto (\mathbf{D}^{\mathfrak{D}} \mathbf{u}^{\mathcal{T}})_{\mathfrak{D} \in \mathfrak{D}} \in (\mathcal{M}_3(\mathbb{R}))^{\mathfrak{D}}$, avec

$$\mathbf{D}^{\mathfrak{D}} \mathbf{u}^{\mathcal{T}} = \frac{\nabla^{\mathfrak{D}} \mathbf{u}^{\mathcal{T}} + {}^t(\nabla^{\mathfrak{D}} \mathbf{u}^{\mathcal{T}})}{2}, \quad \forall \mathfrak{D} \in \mathfrak{D}.$$

Définition X.4

On définit une divergence discrète d'un champ de vecteurs de $(\mathbb{R}^3)^{\mathcal{T}}$ notée : $\operatorname{div}^{\mathfrak{D}} : \mathbf{u}^{\mathcal{T}} \in (\mathbb{R}^3)^{\mathcal{T}} \mapsto (\operatorname{div}^{\mathfrak{D}} \mathbf{u}^{\mathcal{T}})_{\mathfrak{D} \in \mathfrak{D}} \in \mathbb{R}^{\mathfrak{D}}$, avec

$$\operatorname{div}^{\mathfrak{D}} \mathbf{u}^{\mathcal{T}} = \operatorname{Tr}(\nabla^{\mathfrak{D}} \mathbf{u}^{\mathcal{T}}), \quad \forall \mathfrak{D} \in \mathfrak{D}.$$

X.3 Relation de dualité : Formule de Green

Afin d'écrire la dualité discrète, on introduit les produits scalaires suivants :

$$\begin{aligned} \llbracket \mathbf{u}^{\mathcal{T}}, \mathbf{v}^{\mathcal{T}} \rrbracket_{\mathcal{T}} &= \frac{1}{3} \left(\sum_{\mathfrak{p} \in \mathfrak{M}^{\mathcal{P}, \text{int}}} m_{\mathfrak{p}} \mathbf{u}_{\mathfrak{p}} \cdot \mathbf{v}_{\mathfrak{p}} + \sum_{\mathfrak{v} \in \mathfrak{M}^{\mathcal{V}}} m_{\mathfrak{v}} \mathbf{u}_{\mathfrak{v}} \cdot \mathbf{v}_{\mathfrak{v}} + \sum_{\mathfrak{s} \in \mathfrak{M}^{\mathcal{EF}}} m_{\mathfrak{s}} \mathbf{u}_{\mathfrak{s}} \cdot \mathbf{v}_{\mathfrak{s}} \right), \quad \forall \mathbf{u}^{\mathcal{T}}, \mathbf{v}^{\mathcal{T}} \in (\mathbb{R}^3)^{\mathcal{T}}, \\ (\xi^{\mathfrak{D}} : \phi^{\mathfrak{D}})_{\mathfrak{D}} &= \sum_{\mathfrak{D} \in \mathfrak{D}} m_{\mathfrak{D}} (\xi^{\mathfrak{D}} : \phi^{\mathfrak{D}}), \quad \forall \xi^{\mathfrak{D}}, \phi^{\mathfrak{D}} \in (\mathcal{M}_3(\mathbb{R}))^{\mathfrak{D}}, \\ (p^{\mathfrak{D}}, q^{\mathfrak{D}})_{\mathfrak{D}} &= \sum_{\mathfrak{D} \in \mathfrak{D}} m_{\mathfrak{D}} p^{\mathfrak{D}} q^{\mathfrak{D}}, \quad \forall p^{\mathfrak{D}}, q^{\mathfrak{D}} \in \mathbb{R}^{\mathfrak{D}}, \end{aligned} \quad (\text{X.12})$$

et les normes correspondantes

$$\begin{aligned}\|\mathbf{u}^\tau\|_2 &= \llbracket \mathbf{u}^\tau, \mathbf{u}^\tau \rrbracket_T^{\frac{1}{2}}, & \forall \mathbf{u}^\tau \in (\mathbb{R}^3)^\tau, \\ \|\xi^\mathfrak{D}\|_2 &= (\xi^\mathfrak{D} : \xi^\mathfrak{D})_{\mathfrak{D}}^{\frac{1}{2}}, & \forall \xi^\mathfrak{D} \in (\mathcal{M}_3(\mathbb{R}))^\mathfrak{D}, \\ \|p^\mathfrak{D}\|_2 &= (p^\mathfrak{D}, p^\mathfrak{D})_{\mathfrak{D}}^{\frac{1}{2}}, & \forall p^\mathfrak{D} \in \mathbb{R}^\mathfrak{D}.\end{aligned}$$

Comme en 2D, les deux opérateurs discrets vectoriels sont en dualité.

Théorème X.5 (Formule de Green)

Pour tout $\xi^\mathfrak{D}, \mathbf{u}^\tau \in (\mathcal{M}_3(\mathbb{R}))^\mathfrak{D} \times \mathbb{E}_0$, on a

$$\llbracket \operatorname{div}^\tau \xi^\mathfrak{D}, \mathbf{u}^\tau \rrbracket_T = -(\xi^\mathfrak{D} : \nabla^\mathfrak{D} \mathbf{u}^\tau)_\mathfrak{D}.$$

X.4 Stabilisation 3D de type Brezzi-Pitkäranta

On définit maintenant le terme de stabilisation considéré en 3D.

Définition X.6

On définit un opérateur du second ordre discret, noté $\Delta^\mathfrak{D} : p^\mathfrak{D} \in \mathbb{R}^\mathfrak{D} \mapsto \Delta^\mathfrak{D} p^\mathfrak{D} \in \mathbb{R}^\mathfrak{D}$, comme suit :

$$\Delta^\mathfrak{D} p^\mathfrak{D} = \frac{1}{m_\mathfrak{D}} \sum_{\mathfrak{D}' \in \mathfrak{D}|\mathfrak{D}} \frac{d_\mathfrak{D} + d_{\mathfrak{D}'}}{2} (p^{\mathfrak{D}'} - p^\mathfrak{D}), \quad \forall \mathfrak{D} \in \mathfrak{D}.$$

Comme en 2D, cet opérateur n'est pas une approximation consistante de l'opérateur de Laplace. En relation avec cet opérateur, on définit une semi-norme dépendant du maillage $|\cdot|_h$ sur $\mathbb{R}^\mathfrak{D}$ par :

$$|p^\mathfrak{D}|_h^2 = \sum_{(\mathfrak{D}|\mathfrak{D}')} \frac{d_\mathfrak{D} + d_{\mathfrak{D}'}}{2} (p^{\mathfrak{D}'} - p^\mathfrak{D})^2, \quad \forall p^\mathfrak{D} \in \mathbb{R}^\mathfrak{D}. \quad (\text{X.13})$$

Cette semi-norme $|p|_h$ est la version discrète de $\sqrt{\operatorname{size}(\mathcal{T})} |\nabla p|_2$.

Remarque X.7

En réorganisant la somme sur les côtés des diamants, on a pour tout $p^\mathfrak{D} \in \mathbb{R}^\mathfrak{D}$

$$\begin{aligned}-(\Delta^\mathfrak{D} p^\mathfrak{D}, p^\mathfrak{D})_\mathfrak{D} &= \sum_{\mathfrak{D} \in \mathfrak{D}} p^\mathfrak{D} \sum_{\mathfrak{D}' \in \mathfrak{D}|\mathfrak{D}} \frac{d_\mathfrak{D} + d_{\mathfrak{D}'}}{2} (p^\mathfrak{D} - p^{\mathfrak{D}'}) \\ &= \sum_{(\mathfrak{D}|\mathfrak{D}')} \frac{d_\mathfrak{D} + d_{\mathfrak{D}'}}{2} (p^{\mathfrak{D}'} - p^\mathfrak{D})^2 \\ &= |p^\mathfrak{D}|_h^2.\end{aligned}$$

Le lemme suivant est un lemme de Sobolev inverse, c'est-à-dire que la semi-norme discrète $\operatorname{size}(\mathcal{T}) |\cdot|_h$, définie par (X.13), est bornée par la norme $L^2 \|\cdot\|_2$.

Lemme X.8

Soit \mathcal{T} un maillage DDFV associé à Ω . Il existe une constante $C > 0$ dépendant uniquement de C_{reg} , telle que pour tout $p^\mathfrak{D} \in \mathbb{R}^\mathfrak{D}$, on a

$$\operatorname{size}(\mathcal{T}) |p^\mathfrak{D}|_h \leq C \|p^\mathfrak{D}\|_2.$$

Démonstration : La définition (X.13) de la semi-norme discrète $|\cdot|_h$ et l'inégalité de Young impliquent

$$\operatorname{size}(\mathcal{T})^2 |p^\mathfrak{D}|_h^2 \leq 2 \sum_{(\mathfrak{D}|\mathfrak{D}')} (d_\mathfrak{D} + d_{\mathfrak{D}'}) ((p^{\mathfrak{D}'} - p^\mathfrak{D})^2 + (p^\mathfrak{D})^2).$$

En réorganisant la somme sur les diamants, on obtient

$$\text{size}(T)^2 |p^{\mathfrak{D}}|_h^2 \leq 2 \sum_{\mathfrak{D} \in \mathfrak{D}} m_{\mathfrak{D}} (p^{\mathfrak{D}})^2 \left(\frac{\text{size}(T)^2}{m_{\mathfrak{D}}} \sum_{\mathfrak{D}' \in \mathfrak{D}_{|\mathfrak{D}}} (d_{\mathfrak{D}} + d_{\mathfrak{D}'}) \right).$$

On conclut en utilisant la relation (IX.4) et le fait qu'un diamant a un nombre fini de voisins. ■

X.5 Schéma DDFV 3D pour le problème de Stokes

Le principe de la méthode est le suivant : on intègre la loi de conservation de quantité mouvement du problème (X.1) sur les mailles primales intérieures $\mathfrak{M}^{\mathcal{P},\text{int}}$ et sur les mailles duales intérieures de $\mathfrak{M}^{\mathcal{V},\text{int}}$ et $\mathfrak{M}^{\mathcal{EF},\text{int}}$. L'équation du bilan de masse est directement approchée sur les diamants et utilisant un terme de stabilisation de type Brezzi-Pitkäranta. On impose la condition de Dirichlet sur les mailles du bord. Finalement, l'intégrale de la pression doit être nulle. Le schéma DDFV du problème (X.1) s'écrit alors

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } \mathbf{u}^{\mathcal{T}} \in \mathbb{E}_0 \text{ et } p^{\mathfrak{D}} \in \mathbb{R}^{\mathfrak{D}} \text{ tels que,} \\ \mathbf{div}^{\mathcal{T},\text{int}}(-2\eta^{\mathfrak{D}} \mathbf{D}^{\mathfrak{D}} \mathbf{u}^{\mathcal{T}} + p^{\mathfrak{D}} \text{Id}) = \mathbf{f}_m^{\mathcal{T},\text{int}}, \\ \mathbf{div}^{\mathfrak{D}}(\mathbf{u}^{\mathcal{T}}) - \lambda \text{size}(T)^2 \Delta^{\mathfrak{D}} p^{\mathfrak{D}} = 0, \\ \sum_{\mathfrak{D} \in \mathfrak{D}} m_{\mathfrak{D}} p^{\mathfrak{D}} = 0, \end{array} \right. \quad (\text{X.14})$$

où $\eta^{\mathfrak{D}} = (\eta_{\mathfrak{D}})_{\mathfrak{D} \in \mathfrak{D}}$, avec $\eta_{\mathfrak{D}} = \int_{\mathfrak{D}} \eta(s) d\mu_{\mathfrak{D}}(s)$, pour tout $\mathfrak{D} \in \mathfrak{D}$, où $\mu_{\mathfrak{D}}$ est une mesure de probabilité sur \mathfrak{D} , $\mathbf{f}_m^{\mathcal{T},\text{int}} = \{\mathbb{P}_m^{\mathcal{P},\text{int}}(\mathbf{f}), \mathbb{P}_m^{\mathcal{V},\text{int}}(\mathbf{f}), \mathbb{P}_m^{\mathcal{EF},\text{int}}(\mathbf{f})\}$ est la moyenne de \mathbf{f} définie par (X.4) en restreignant aux mailles intérieures $\mathfrak{M}^{\mathcal{P},\text{int}}$, $\mathfrak{M}^{\mathcal{V},\text{int}}$ et $\mathfrak{M}^{\mathcal{EF},\text{int}}$. Le paramètre de stabilisation λ est choisi strictement positif.

X.6 Résultats sur les opérateurs discrets dans le cadre vectoriel

On se contente dans cette section de démontrer les résultats qui ne peuvent pas se déduire immédiatement de leur version scalaire, montrée dans [CH09], en travaillant composante par composante ou de leur version 2D du Chapitre IV.

Lemme X.9 (Inégalité de Poincaré. Version vectorielle de [CH09, Théorème 4.2])

Soit \mathcal{T} un maillage DDFV de Ω . Il existe une constante $C > 0$, dépendant uniquement du diamètre de Ω et de C_{reg} , telle que $\forall \mathbf{u}^{\mathcal{T}} \in \mathbb{E}_0$, on a :

$$\|\mathbf{u}^{\mathcal{T}}\|_2 \leq C \|\nabla^{\mathfrak{D}} \mathbf{u}^{\mathcal{T}}\|_2.$$

Lemme X.10 ([DE06, Lemme 6.3])

Il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout domaine polygonal borné $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^3$ de mesure strictement positive, pour tout $\sigma \subset \mathbb{R}^2$ et toute fonction $v \in H^1(\mathbb{R}^3)$, on a

$$|v_{\mathcal{P}} - v_{\sigma}|^2 \leq \frac{1}{m_{\sigma} m_{\mathcal{P}}} \int_{\sigma} \int_{\mathcal{P}} |v(x) - v(y)|^2 dx dy \leq C \frac{\text{diam}(\widehat{\mathcal{P}}_{\sigma})}{m_{\sigma}} \int_{\widehat{\mathcal{P}}_{\sigma}} |\nabla v(z)|^2 dz,$$

où $v_{\mathcal{P}}$ représente la moyenne de v sur \mathcal{P} , v_{σ} la moyenne de v sur le segment σ , et $\widehat{\mathcal{P}}_{\sigma}$ est l'enveloppe convexe de $\mathcal{P} \cup \sigma$.

Lemme X.11 (Version vectorielle de [CH09, Lemme 6.8])

Soit \mathcal{T} un maillage DDFV associé à Ω . Il existe une constante $C > 0$, dépendant uniquement de C_{reg} , telle que pour toute fonction \mathbf{v} dans $(H^2(\Omega))^3$, on a

$$\|\mathbf{v} - \mathbb{P}_{\mathcal{C}}^{\mathcal{T}} \mathbf{v}\|_2 + \|\nabla \mathbf{v} - \nabla^{\mathfrak{D}} \mathbb{P}_{\mathcal{C}}^{\mathcal{T}} \mathbf{v}\|_2 \leq C \text{size}(T) \|\nabla \mathbf{v}\|_{H^1} \quad \text{et} \quad \|\nabla^{\mathfrak{D}} \mathbb{P}_{\mathcal{C}}^{\mathcal{T}} \mathbf{v}\|_2 \leq C \|\mathbf{v}\|_{H^2}.$$

Corollaire X.12 (Version 3D du Corollaire IV.18)

Soit \mathcal{T} un maillage DDFV associé à Ω . Il existe une constante $C > 0$, dépendant uniquement de C_{reg} , telle que pour toute fonction \mathbf{v} dans $(H^2(\Omega))^3$ qui vérifie $\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$, on a

$$\|\operatorname{div}^{\mathcal{D}} \mathbb{P}_{\mathbf{c}}^{\mathcal{T}} \mathbf{v}\|_2 \leq C \operatorname{size}(\mathcal{T}) \|\nabla \mathbf{v}\|_{H^1}.$$

Démonstration : Soit $\mathbf{v} \in (H^2(\Omega))^3$ qui vérifie $\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$. Soit $\mathcal{D} \in \mathfrak{D}$; en utilisant le fait que $\operatorname{div}^{\mathcal{D}}(\mathbb{P}_{\mathbf{c}}^{\mathcal{T}} \mathbf{v}) = \operatorname{Tr}(\nabla^{\mathcal{D}} \mathbb{P}_{\mathbf{c}}^{\mathcal{T}} \mathbf{v})$ et $\operatorname{div} \mathbf{v} = \operatorname{Tr}(\nabla \mathbf{v}) = 0$, on a

$$\operatorname{div}^{\mathcal{D}}(\mathbb{P}_{\mathbf{c}}^{\mathcal{T}} \mathbf{v}) = \operatorname{Tr}(\nabla^{\mathcal{D}} \mathbb{P}_{\mathbf{c}}^{\mathcal{T}} \mathbf{v} - \nabla \mathbf{v}(x)), \quad \forall x \in \mathcal{D}.$$

Le Lemme X.11 donne

$$\|\operatorname{div}^{\mathcal{D}}(\mathbb{P}_{\mathbf{c}}^{\mathcal{T}} \mathbf{v})\|_2 \leq \|\nabla^{\mathcal{D}} \mathbb{P}_{\mathbf{c}}^{\mathcal{T}} \mathbf{v} - \nabla \mathbf{v}\|_2 \leq C \operatorname{size}(\mathcal{T}) \|\nabla \mathbf{v}\|_{H^1}.$$

■

Lemme X.13 (Version 3D du Lemme IV.23)

Soit \mathcal{T} un maillage DDFV associé à Ω . Il existe une constante $C > 0$, dépendant uniquement de C_{reg} , telle que pour toute fonction p dans $H^1(\Omega)$, on a

$$|\mathbb{P}_{m_h}^{\mathcal{D}} p|^2 = \sum_{(\mathcal{D}|\mathcal{D}')} \frac{d_{\mathcal{D}} + d_{\mathcal{D}'}}{2} (\mathbb{P}_m^{\mathcal{D}'} p - \mathbb{P}_m^{\mathcal{D}} p)^2 \leq C \|\nabla p\|_2^2.$$

Démonstration : Soit $p \in H^1(\Omega)$. On note pour simplifier $p^{\mathcal{D}} = \mathbb{P}_m^{\mathcal{D}} p$ pour tout $\mathcal{D} \in \mathfrak{D}$ et $p^{\mathcal{T}} = \frac{1}{m_{\mathcal{T}}} \int_{\mathcal{T}} p(y) dy$, pour toutes les faces des diamants $\mathcal{T} = (\mathcal{D}|\mathcal{D}')$. On ajoute $0 = p^{\mathcal{T}} - p^{\mathcal{T}}$ et on utilise l'inégalité de Young :

$$\sum_{(\mathcal{D}|\mathcal{D}')} (d_{\mathcal{D}} + d_{\mathcal{D}'}) (p^{\mathcal{D}'} - p^{\mathcal{D}})^2 \leq 2 \sum_{\mathcal{T}=(\mathcal{D}|\mathcal{D}')} (d_{\mathcal{D}} + d_{\mathcal{D}'}) |p^{\mathcal{D}'} - p^{\mathcal{T}}|^2 + 2 \sum_{\mathcal{T}=(\mathcal{D}|\mathcal{D}')} (d_{\mathcal{D}} + d_{\mathcal{D}'}) |p^{\mathcal{D}} - p^{\mathcal{T}}|^2. \quad (\text{X.15})$$

Le Lemme X.10 appliqué à un diamant \mathcal{D} et à une de ses faces \mathcal{T} conduit à

$$|p^{\mathcal{D}} - p^{\mathcal{T}}|^2 \leq C \frac{d_{\mathcal{D}}}{m_{\mathcal{T}}} \int_{\mathcal{D}} |\nabla p(z)|^2 dz.$$

Comme $(d_{\mathcal{D}} + d_{\mathcal{D}'}) \frac{d_{\mathcal{D}}}{m_{\mathcal{T}}} \leq C(C_{reg})$, (voir la relation (IX.4)), on obtient

$$(d_{\mathcal{D}} + d_{\mathcal{D}'}) |p^{\mathcal{D}} - p^{\mathcal{T}}|^2 \leq C \int_{\mathcal{D}} |\nabla p(z)|^2 dz. \quad (\text{X.16})$$

En substituant (X.16) dans (X.15), il vient que

$$\sum_{(\mathcal{D}|\mathcal{D}')} (d_{\mathcal{D}} + d_{\mathcal{D}'}) (p^{\mathcal{D}'} - p^{\mathcal{D}})^2 \leq C \sum_{(\mathcal{D}|\mathcal{D}')} \left(\int_{\mathcal{D}} |\nabla p(z)|^2 dz + \int_{\mathcal{D}'} |\nabla p(z)|^2 dz \right).$$

Comme un diamant possède un nombre fini de diamants voisins, on en déduit le résultat

$$\sum_{(\mathcal{D}|\mathcal{D}')} (d_{\mathcal{D}} + d_{\mathcal{D}'}) (p^{\mathcal{D}'} - p^{\mathcal{D}})^2 \leq C \sum_{\mathcal{D} \in \mathfrak{D}} \int_{\mathcal{D}} |\nabla p(z)|^2 dz = C \int_{\Omega} |\nabla p(z)|^2 dz.$$

■

Lemme X.14 (Version 3D du Lemme IV.19)

Soit \mathcal{T} un maillage DDFV associé à Ω . Il existe une constante $C > 0$, dépendant uniquement de C_{reg} , telle que pour toute fonction \mathbf{v} dans $(H^1(\Omega))^3$, on a

$$\|\nabla^{\mathcal{D}} \mathbb{P}_{\mathbf{m}}^{\mathcal{T}} \mathbf{v}\|_2 \leq C \|\mathbf{v}\|_{H^1}.$$

Démonstration : Pour simplifier les notations, on désigne par v^τ l'une des trois composantes $\mathbb{P}_m^\tau \mathbf{v}_i$ pour $i = 1, 2, 3$ de $\mathbb{P}_m^\tau \mathbf{v} = {}^t(\mathbb{P}_m^\tau v_1, \mathbb{P}_m^\tau v_2, \mathbb{P}_m^\tau v_3)$, et on a

$$|\nabla^\mathcal{D} v^\tau|^2 \leq 3 \left(\frac{1}{3m_\mathcal{D}} \right)^2 \left(|v_L - v_K|^2 |\mathbf{N}_{K,L}|^2 + |v_B - v_A|^2 |\mathbf{N}_{A,B}|^2 + |v_F - v_E|^2 |\mathbf{N}_{E,F}|^2 \right),$$

où $v_A, v_B, v_E, v_F, v_K, v_L$ sont les degrés de liberté de v^τ pour les six points A, B, E, F, K, L que l'on a défini pour un diamant \mathcal{D} . Maintenant, on considère la face $T = \partial \mathbf{p}_K \cap \partial \mathbf{p}_L$ qui est partagée par les mailles primales \mathbf{p}_K et \mathbf{p}_L relatives aux points K et L, respectivement, et on note la moyenne de v sur la face T par $v_T = \frac{1}{m_T} \int_T v_s dS$. Le Lemme X.10, appliqué à \mathbf{p} et T , implique que

$$|v_T - v_K|^2 \leq C \frac{\text{diam}(\mathbf{p}_K)}{m_T} \int_{\mathbf{p}_K} |\nabla v|^2 dV. \quad (\text{X.17})$$

Grâce à la relation (IX.4), on a

$$\frac{|\mathbf{N}_{K,L}|^2}{m_\mathcal{D}} \frac{\text{diam}(\mathbf{p}_K)}{m_T} \leq \frac{1}{C_{reg}^4}.$$

En ajoutant $0 = v_T - v_T$ dans $|v_L - v_K|$, l'inégalité (X.17) implique

$$3m_\mathcal{D} \frac{1}{(3m_\mathcal{D})^2} |v_L - v_K|^2 |\mathbf{N}_{K,L}|^2 \leq \frac{2}{3} \frac{C}{C_{reg}^4} \int_{\mathbf{p}_K \cup \mathbf{p}_L} |\nabla v|^2 dV.$$

On fait de même pour les deux inégalités sur $|v_B - v_A|$ et $|v_F - v_E|$. Par conséquent, on en déduit que

$$\begin{aligned} \|\nabla^\mathcal{D} v^\tau\|_2^2 &= \sum_{\mathcal{D} \in \mathcal{D}} m_\mathcal{D} |\nabla^\mathcal{D} v^\tau|^2 \\ &\leq \frac{2}{3} \frac{C}{C_{reg}^4} \sum_{\mathcal{D} \in \mathcal{D}} \left(\int_{\mathbf{p}_K \cup \mathbf{p}_L} |\nabla v|^2 dV + \int_{\mathbf{v}_A \cup \mathbf{v}_B} |\nabla v|^2 dV + \int_{\mathbf{s}_E \cup \mathbf{s}_F} |\nabla v|^2 dV \right) \\ &\leq \tilde{\mathcal{N}} \frac{2}{3} \frac{C}{C_{reg}^4} \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)}, \end{aligned}$$

où $\tilde{\mathcal{N}} = 2(\mathcal{N}_* + \mathcal{N}_\mathcal{V} + \mathcal{N}_{\mathcal{EF}})$. Il ne reste plus qu'à sommer sur les composantes pour avoir le résultat. \blacksquare

Lemme X.15 (Version 3D de la Proposition IV.24)

Soit \mathcal{T} un maillage DDFV associé à Ω . Il existe une constante $C > 0$, dépendant uniquement de C_{reg} , telle que pour toute fonction p dans $H^1(\Omega)$, on a

$$\|\mathbb{P}_m^\mathcal{D} p - p\|_2 \leq C \text{size}(\mathcal{T}) \|\nabla p\|_2.$$

Le résultat suivant est la généralisation de la Proposition IV.25. Les triangles des diamants situés sur $\partial\Omega$ n'interviennent pas dans la démonstration du fait que les fonctions considérées sont dans $(H_0^1(\Omega))^3$. Ainsi pour un triangle, on a naturellement deux diamants d'où la notation $T = (\mathcal{D}|\mathcal{D}')$.

Lemme X.16 (Version 3D de la Proposition IV.25)

Soit \mathcal{T} un maillage DDFV associé à Ω . Il existe une constante $C > 0$, dépendant uniquement de C_{reg} , telle que pour toute fonction \mathbf{v} dans $(H_0^1(\Omega))^3$ et tout $\mathcal{p}^\mathcal{D} \in \mathbb{R}^\mathcal{D}$, on a

$$\sum_{\mathcal{D} \in \mathcal{D}} \int_{\mathcal{D}} \mathcal{p}^\mathcal{D} (\text{div}^\mathcal{D}(\mathbf{v}^\tau) - \text{div}(\mathbf{v})) dz \leq C |\mathcal{p}^\mathcal{D}|_h \|\mathbf{v}\|_{H^1},$$

où $\mathbf{v}^\tau = \mathbb{P}_m^\tau \mathbf{v}$ est la projection moyenne de \mathbf{v} , définie par (X.4), sur le maillage \mathcal{T} .

Démonstration : On note $\mathbf{v}^\tau = \mathbb{P}_m^\tau \mathbf{v}$. Soit $T_{i_1 i_2 i_3}$ un triangle du bord $\partial\mathcal{D}$ du diamant \mathcal{D} qui n'est pas sur le bord du domaine $\partial\Omega$. Ces triangles sont donnés par les huit combinaisons possibles des indices (i_1, i_2, i_3)

avec $i_1 \in \{A, B\}$, $i_2 \in \{K, L\}$, et $i_3 \in \{E, F\}$. De plus, on suppose que l'orientation de $T_{i_1 i_2 i_3}$ est telle que le vecteur normal du triangle $\mathbf{n}_{\mathcal{D},T}$ sort du diamant \mathcal{D} . On remarque que

$$\operatorname{div}^{\mathcal{D}}(\mathbf{v}^{\mathcal{T}}) = \frac{1}{m_{\mathcal{D}}} \sum_{T=(\mathcal{D}|\mathcal{D}')} m_T \mathbf{v}_T^m \cdot \mathbf{n}_{\mathcal{D},T} \quad \text{où} \quad \mathbf{v}_T^m = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 \mathbf{v}_i, \quad (\text{X.18})$$

avec \mathbf{v}_i , pour $i \in \{i_1, i_2, i_3\}$, les degrés de liberté du triangle $T = T_{i_1 i_2 i_3}$ du bord $\partial \mathcal{D}$ du diamant \mathcal{D} qui n'est pas sur le bord du domaine $\partial \Omega$. Par exemple, si $T = T_{AKE}$, alors $\mathbf{v}_T^m = (1/3)(\mathbf{v}_A + \mathbf{v}_E + \mathbf{v}_K)$, et, par comparaison, $\mathbf{v}_{i_1} = \mathbf{v}_A$, etc. Pour faciliter les notations, on note la moyenne de \mathbf{v} sur le triangle T par \mathbf{v}_T

$$\mathbf{v}_T = \frac{1}{m_T} \int_T \mathbf{v} dS, \quad (\text{X.19})$$

et $\mathbf{R}_T(\mathbf{v})$ la quantité suivante :

$$\mathbf{R}_T(\mathbf{v}) = \mathbf{v}_T^m - \mathbf{v}_T. \quad (\text{X.20})$$

En utilisant les notations (X.19) et (X.20), la formule (X.18) et le théorème de Green permettent d'obtenir :

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{D}} (\operatorname{div}^{\mathcal{D}}(\mathbf{v}^{\mathcal{T}}) - \operatorname{div}(\mathbf{v})) dV &= m_{\mathcal{D}} \operatorname{div}^{\mathcal{D}}(\mathbf{v}^{\mathcal{T}}) - \int_{\mathcal{D}} \operatorname{div}(\mathbf{v}) dV \\ &= \sum_{T=(\mathcal{D}|\mathcal{D}')} \int_T (\mathbf{v}_T^m - \mathbf{v}) \cdot \mathbf{n}_{\mathcal{D},T} dS = \sum_{T=(\mathcal{D}|\mathcal{D}')} m_T \mathbf{n}_{\mathcal{D},T} \cdot \mathbf{R}_T(\mathbf{v}). \end{aligned} \quad (\text{X.21})$$

On multiplie les deux côtés de l'égalité (X.21) par $p^{\mathcal{D}}$ et on somme sur tous les diamants $\mathcal{D} \in \mathfrak{D}$. Puis, on réorganise la somme sur les triangles $T = (\mathcal{D}|\mathcal{D}')$ qui séparent deux diamants voisins

$$\begin{aligned} \sum_{\mathcal{D} \in \mathfrak{D}} p^{\mathcal{D}} \int_{\mathcal{D}} (\operatorname{div}^{\mathcal{D}}(\mathbf{v}^{\mathcal{T}}) - \operatorname{div}(\mathbf{v})) dV &= \sum_{\mathcal{D} \in \mathfrak{D}} p^{\mathcal{D}} \sum_{T=(\mathcal{D}|\mathcal{D}')} m_T \mathbf{n}_{\mathcal{D},T} \cdot \mathbf{R}_T(\mathbf{v}) \\ &= \sum_{T=(\mathcal{D}|\mathcal{D}')} (p^{\mathcal{D}} - p^{\mathcal{D}'}) m_T \mathbf{n}_{\mathcal{D},T} \cdot \mathbf{R}_T(\mathbf{v}). \end{aligned}$$

On multiplie et divise chaque terme de la somme par $((d_{\mathcal{D}} + d_{\mathcal{D}'})/2)^{1/2}$ et on applique l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\begin{aligned} \sum_{\mathcal{D} \in \mathfrak{D}} p^{\mathcal{D}} \int_{\mathcal{D}} (\operatorname{div}^{\mathcal{D}}(\mathbf{v}^{\mathcal{T}}) - \operatorname{div}(\mathbf{v})) dV &\leq \left(\sum_{(\mathcal{D}|\mathcal{D}')} \frac{d_{\mathcal{D}} + d_{\mathcal{D}'}}{2} |p^{\mathcal{D}} - p^{\mathcal{D}'}|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{T=(\mathcal{D}|\mathcal{D}')} \frac{2m_T^2}{d_{\mathcal{D}} + d_{\mathcal{D}'}} |\mathbf{R}_T(\mathbf{v})|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq |p^{\mathfrak{D}}|_h \left(\sum_{T=(\mathcal{D}|\mathcal{D}')} \frac{2m_T^2}{d_{\mathcal{D}} + d_{\mathcal{D}'}} |\mathbf{R}_T(\mathbf{v})|^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (\text{X.22})$$

En remplaçant (X.19) et (X.18) dans (X.20) il vient que :

$$\mathbf{R}_T(\mathbf{v}) = \mathbf{v}_T^m - \mathbf{v}_T = \frac{1}{3} \sum_{j=1}^3 (\mathbf{v}_{i_j} - \mathbf{v}_T),$$

et après avoir appliqué l'inégalité de Jensen on a que

$$|\mathbf{R}_T(\mathbf{v})|^2 \leq \frac{1}{3} \sum_{j=1}^3 |\mathbf{v}_{i_j} - \mathbf{v}_T|^2. \quad (\text{X.23})$$

Finalement, on applique le Lemme X.10, à chaque différence $|\mathbf{v}_{i_j} - \mathbf{v}_T|$. De plus, on remarque que l'indice i_j pour $j = 1, 2, 3$ correspond à une maille d'un des maillages de \mathcal{T} , et que le triangle $T = T_{i_1 i_2 i_3}$ est à l'intérieur de cette maille. Par exemple, si $i_j = K$, on considère la maille primale \mathbf{p}_K et on a que :

$$\begin{aligned} |\mathbf{v}_K - \mathbf{v}_T|^2 &= \left| \frac{1}{m_K m_T} \int_{\mathbf{x} \in \mathbf{p}_K} \int_{\mathbf{z} \in T} (\mathbf{v}(\mathbf{x}) - \mathbf{v}(\mathbf{z})) dV(\mathbf{x}) dS(\mathbf{z}) \right|^2 \\ &\leq C \frac{\operatorname{diam}(\mathbf{p}_K)}{m_T} \int_{\mathbf{p}_K} |\nabla \mathbf{v}(\mathbf{x})|^2 dV(\mathbf{x}). \end{aligned} \quad (\text{X.24})$$

On remplace (X.24) dans (X.23), puis, on utilise la relation (IX.4) pour obtenir $\frac{m_T \text{diam}(\mathbf{p}_K)}{d_{\mathcal{D}} + d_{\mathcal{D}'}} \leq C \text{size}(\mathcal{T})^2$ et déduire

$$\left(\sum_{T \in (\mathcal{D}|\mathcal{D}')} \frac{2m_T^2}{d_{\mathcal{D}} + d_{\mathcal{D}'}} |\mathbf{R}_T(\mathbf{v})|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq C \text{size}(\mathcal{T}) \|\mathbf{v}\|_{H^1(\Omega)}, \quad (\text{X.25})$$

où C dépend de $\tilde{\mathcal{N}}$ l'entier introduit à la fin de la démonstration du Lemme X.14. Finalement, le résultat est montré en utilisant l'inégalité (X.25) dans (X.22). ■

La proposition suivante sera utile dans la démonstration de l'inégalité de Korn cf. Théorème X.19. Comme en 2D, après des calculs différentiels classiques, on sait que pour toute fonction régulière $\mathbf{u} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$, on a

$$\text{div} \left({}^t(\nabla \mathbf{u}) \right) = \text{div} (\text{div}(\mathbf{u}) \text{Id}) = \nabla(\text{div}(\mathbf{u})).$$

La propriété correspondante au niveau discret est montrée dans la proposition suivante.

Proposition X.17 (Version 3D de la Proposition VI.2)

Pour tout $\mathbf{u}^{\mathcal{T}} \in \mathbb{E}_0$, on a

$$\mathbf{div}^{\mathcal{T}} \left({}^t(\nabla^{\mathcal{D}} \mathbf{u}^{\mathcal{T}}) \right) = \mathbf{div}^{\mathcal{T}} \left(\text{div}^{\mathcal{D}}(\mathbf{u}^{\mathcal{T}}) \text{Id} \right).$$

Démonstration : Pour simplifier les notations, on pose

$$\psi^{\mathcal{D}} = {}^t(\nabla^{\mathcal{D}} \mathbf{u}^{\mathcal{T}}) - \text{div}^{\mathcal{D}}(\mathbf{u}^{\mathcal{T}}) \text{Id} \in (\mathcal{M}_3(\mathbb{R}))^{\mathcal{D}}.$$

On va montrer que $\mathbf{div}^{\mathcal{T}} \psi^{\mathcal{D}} = 0$. On désigne par u_i les trois composantes du vecteur $\mathbf{u}^{\mathcal{T}} \in (\mathbb{R}^3)^{\mathcal{T}}$ pour $i = 1, 2, 3$, et le i^{e} vecteur canonique de \mathbb{R}^3 par \mathbf{e}_i . Un calcul direct donne l'expression de $\psi^{\mathcal{D}}$

$$\psi^{\mathcal{D}} = \begin{pmatrix} -\sum_{i=2}^3 \nabla^{\mathcal{D}} u_i \cdot \mathbf{e}_i & \nabla^{\mathcal{D}} u_2 \cdot \mathbf{e}_1 & \nabla^{\mathcal{D}} u_3 \cdot \mathbf{e}_1 \\ \nabla^{\mathcal{D}} u_1 \cdot \mathbf{e}_3 & -\sum_{i=1, i \neq 2}^3 \nabla^{\mathcal{D}} u_i \cdot \mathbf{e}_i & \nabla^{\mathcal{D}} u_3 \cdot \mathbf{e}_2 \\ \nabla^{\mathcal{D}} u_1 \cdot \mathbf{e}_3 & \nabla^{\mathcal{D}} u_2 \cdot \mathbf{e}_3 & -\sum_{i=1}^2 \nabla^{\mathcal{D}} u_i \cdot \mathbf{e}_i \end{pmatrix}.$$

En utilisant cette expression, on obtient facilement pour le vecteur $\mathbf{N}_{K,L} = {}^t(\mathbf{N}_{K,L} \cdot \mathbf{e}_1, \mathbf{N}_{K,L} \cdot \mathbf{e}_2, \mathbf{N}_{K,L} \cdot \mathbf{e}_3)$ que

$$\psi^{\mathcal{D}} \mathbf{N}_{K,L} = \begin{pmatrix} -\sum_{i=2}^3 \nabla^{\mathcal{D}} u_i \cdot \mathbf{e}_i \mathbf{N}_{K,L} \cdot \mathbf{e}_1 + \nabla^{\mathcal{D}} u_2 \cdot \mathbf{e}_1 \mathbf{N}_{K,L} \cdot \mathbf{e}_2 + \nabla^{\mathcal{D}} u_3 \cdot \mathbf{e}_1 \mathbf{N}_{K,L} \cdot \mathbf{e}_3 \\ \nabla^{\mathcal{D}} u_1 \cdot \mathbf{e}_3 \mathbf{N}_{K,L} \cdot \mathbf{e}_1 - \sum_{i=1, i \neq 2}^3 \nabla^{\mathcal{D}} u_i \cdot \mathbf{e}_i \mathbf{N}_{K,L} \cdot \mathbf{e}_2 + \nabla^{\mathcal{D}} u_3 \cdot \mathbf{e}_2 \mathbf{N}_{K,L} \cdot \mathbf{e}_3 \\ \nabla^{\mathcal{D}} u_1 \cdot \mathbf{e}_3 \mathbf{N}_{K,L} \cdot \mathbf{e}_1 + \nabla^{\mathcal{D}} u_2 \cdot \mathbf{e}_3 \mathbf{N}_{K,L} \cdot \mathbf{e}_2 - \sum_{i=1}^2 \nabla^{\mathcal{D}} u_i \cdot \mathbf{e}_i \mathbf{N}_{K,L} \cdot \mathbf{e}_3 \end{pmatrix}.$$

Après quelques manipulations algébriques, on peut réécrire la expression précédente sous la forme compacte qui comprend deux produits vectoriels :

$$\psi^{\mathcal{D}} \mathbf{N}_{K,L} = \frac{\mathbf{u}_A - \mathbf{u}_B}{2} \times (\mathbf{x}_F - \mathbf{x}_E) + \frac{\mathbf{u}_F - \mathbf{u}_E}{2} \times (\mathbf{x}_B - \mathbf{x}_A).$$

De même on déduit que

$$\psi^{\mathcal{D}} \mathbf{N}_{A,B} = \frac{\mathbf{u}_L - \mathbf{u}_K}{2} \times (\mathbf{x}_F - \mathbf{x}_E) + \frac{\mathbf{u}_E - \mathbf{u}_F}{2} \times (\mathbf{x}_L - \mathbf{x}_K),$$

$$\psi^{\mathcal{D}} \mathbf{N}_{E,F} = \frac{\mathbf{u}_K - \mathbf{u}_L}{2} \times (\mathbf{x}_B - \mathbf{x}_A) + \frac{\mathbf{u}_B - \mathbf{u}_A}{2} \times (\mathbf{x}_L - \mathbf{x}_K).$$

Ainsi en utilisant la Définition X.2 de la divergence discrète, on obtient

$$\begin{aligned} m_{\mathbf{p}} \mathbf{div}^{\mathbf{p}}(\psi^{\mathcal{D}}) &= \sum_{\mathbf{p} \in \mathcal{D}_{|\mathbf{p}}} \left(\frac{\mathbf{u}_A - \mathbf{u}_B}{2} \times (\mathbf{x}_F - \mathbf{x}_E) + \frac{\mathbf{u}_F - \mathbf{u}_E}{2} \times (\mathbf{x}_B - \mathbf{x}_A) \right), \\ m_{\mathbf{v}} \mathbf{div}^{\mathbf{v}}(\psi^{\mathcal{D}}) &= \sum_{\mathbf{v} \in \mathcal{D}_{|\mathbf{v}}} \left(\frac{\mathbf{u}_L - \mathbf{u}_K}{2} \times (\mathbf{x}_F - \mathbf{x}_E) + \frac{\mathbf{u}_E - \mathbf{u}_F}{2} \times (\mathbf{x}_L - \mathbf{x}_K) \right), \\ m_{\mathbf{s}} \mathbf{div}^{\mathbf{s}}(\psi^{\mathcal{D}}) &= \sum_{\mathbf{s} \in \mathcal{D}_{|\mathbf{s}}} \left(\frac{\mathbf{u}_K - \mathbf{u}_L}{2} \times (\mathbf{x}_B - \mathbf{x}_A) + \frac{\mathbf{u}_B - \mathbf{u}_A}{2} \times (\mathbf{x}_L - \mathbf{x}_K) \right). \end{aligned}$$

Finalement, le résultat est une conséquence de la Proposition X.18. \blacksquare

Pour simplifier les notations, dans les formules suivantes, on fait implicitement référence aux six points A, B, E, F, K, L de chaque diamant \mathcal{D} .

Proposition X.18

Soit $\mathcal{T} = (\mathfrak{M}^{\mathcal{P}}, \mathfrak{M}^{\mathcal{V}}, \mathfrak{M}^{\mathcal{EF}})$. Pour chaque $\mathbf{u}^{\mathcal{T}} \in \mathbb{E}_0$ les égalités suivantes sont vérifiées :

(i) Pour tout $\mathbf{s} \in \mathfrak{M}^{\mathcal{EF}}$, on a :

$$\sum_{\mathcal{D} \in \mathfrak{D}_{|\mathbf{s}}} \frac{\mathbf{u}_L - \mathbf{u}_K}{2} \times (\mathbf{x}_B - \mathbf{x}_A) = 0 \quad \text{et} \quad \sum_{\mathcal{D} \in \mathfrak{D}_{|\mathbf{s}}} \frac{\mathbf{u}_B - \mathbf{u}_A}{2} \times (\mathbf{x}_L - \mathbf{x}_K) = 0;$$

(ii) Pour tout $\mathbf{p} \in \mathfrak{M}^{\mathcal{P}}$, on a :

$$\sum_{\mathcal{D} \in \mathfrak{D}_{|\mathbf{p}}} \frac{\mathbf{u}_A - \mathbf{u}_B}{2} \times (\mathbf{x}_F - \mathbf{x}_E) = 0 \quad \text{et} \quad \sum_{\mathcal{D} \in \mathfrak{D}_{|\mathbf{p}}} \frac{\mathbf{u}_F - \mathbf{u}_E}{2} \times (\mathbf{x}_B - \mathbf{x}_A) = 0;$$

(iii) Pour tout $\mathbf{v} \in \mathfrak{M}^{\mathcal{V}}$, on a :

$$\sum_{\mathcal{D} \in \mathfrak{D}_{|\mathbf{v}}} \frac{\mathbf{u}_L - \mathbf{u}_K}{2} \times (\mathbf{x}_F - \mathbf{x}_E) = 0 \quad \text{et} \quad \sum_{\mathcal{D} \in \mathfrak{D}_{|\mathbf{v}}} \frac{\mathbf{u}_E - \mathbf{u}_F}{2} \times (\mathbf{x}_L - \mathbf{x}_K) = 0.$$

Démonstration :

(i). Tout d'abord, on considère le cas $\mathbf{s} = \mathbf{f}$. Il vient que

$$\sum_{\mathcal{D} \in \mathfrak{D}_{|\mathbf{f}}} (\mathbf{x}_B - \mathbf{x}_A) = 0, \quad (\text{X.26})$$

parce que la suite des arêtes $\mathbf{e} = \mathbf{v}_B - \mathbf{v}_A = \overline{\mathbf{x}_A \mathbf{x}_B}$ forment une boucle fermée, c'est-à-dire, une somme télescopique dont le premier et le dernier termes coïncident. La première relation de l'item (i) vient immédiatement en utilisant (X.26) dans :

$$\sum_{\mathcal{D} \in \mathfrak{D}_{|\mathbf{f}}} \frac{\mathbf{u}_L - \mathbf{u}_K}{2} \times (\mathbf{x}_B - \mathbf{x}_A) = \frac{\mathbf{u}_L - \mathbf{u}_K}{2} \times \sum_{\mathcal{D} \in \mathfrak{D}_{|\mathbf{f}}} (\mathbf{x}_B - \mathbf{x}_A) = 0.$$

La seconde relation est déduite en utilisant les mêmes arguments après avoir échangé les rôles de $\mathbf{x}_A, \mathbf{x}_B$ par $\mathbf{u}_A, \mathbf{u}_B$.

Ensuite, on considère le cas $\mathbf{s} = \mathbf{e}$. Il vient que

$$\sum_{\mathcal{D} \in \mathfrak{D}_{|\mathbf{e}}} \frac{\mathbf{u}_L - \mathbf{u}_K}{2} = 0. \quad (\text{X.27})$$

En fait, si \mathbf{e} est une arête intérieure, la droite $\overline{\mathbf{x}_K \mathbf{x}_L}$, qui correspond à la suite des mailles primales $\mathbf{p}_K \rightarrow \mathbf{p}_L$ autour de l'arête \mathbf{e} pour $\mathcal{D} \in \mathfrak{D}_{|\mathbf{e}}$, forment une boucle fermée, comme dans le cas précédent. En revanche, si \mathbf{e} est une arête du bord, elle doit appartenir à deux faces du bord différentes. Par conséquent, on peut réordonner la somme avec une somme sur les deux faces du bord, et ainsi la somme télescopique (X.27) vaut la différence du terme \mathbf{u}_L des deux faces du bord. Comme, on a $\mathbf{u}^{\mathcal{T}} \in \mathbb{E}_0$, cela implique que $\mathbf{u}_L = 0$. La première relation de l'item (i) vient immédiatement en utilisant (X.27) dans :

$$\left(\sum_{\mathcal{D} \in \mathfrak{D}_{|\mathbf{e}}} \frac{\mathbf{u}_L - \mathbf{u}_K}{2} \right) \times (\mathbf{x}_B - \mathbf{x}_A) = 0.$$

Si \mathbf{e} est une arête intérieure la seconde relation est déduite en utilisant les mêmes arguments après avoir échangé les rôles de $\mathbf{x}_A, \mathbf{x}_B$ par $\mathbf{u}_A, \mathbf{u}_B$. Si \mathbf{e} est une arête du bord, la seconde relation est vraie car \mathbf{v}_A et \mathbf{v}_B , i.e., A et B, sont sur le bord du domaine Ω , et $\mathbf{u}^{\mathcal{T}} \in \mathbb{E}_0$ implique que $\mathbf{u}_A = \mathbf{u}_B = 0$.

(ii). Le membre de gauche de la première relation de l'item (ii) peut se découper en

$$\sum_{\mathcal{D} \in \mathfrak{D}_{|\mathbf{p}}} \frac{\mathbf{u}_A - \mathbf{u}_B}{2} \times (\mathbf{x}_F - \mathbf{x}_E) = \sum_{\mathbf{f} \in \partial \mathbf{p}} \left(\sum_{\mathcal{D} \in \mathfrak{D}_{|\mathbf{f}}} \frac{\mathbf{u}_A - \mathbf{u}_B}{2} \right) \times \mathbf{x}_F - \sum_{\mathbf{e} \in \partial \mathbf{p}} \left(\sum_{\mathcal{D} \in \mathfrak{D}_{|\mathbf{e}} \cap \mathfrak{D}_{|\mathbf{p}}} \frac{\mathbf{u}_A - \mathbf{u}_B}{2} \right) \times \mathbf{x}_E. \quad (\text{X.28})$$

Grâce à (X.26), le premier terme du membre de droite de (X.28) est nul.

Puis, on remarque que pour chaque arête \mathbf{e} qui appartient à \mathbf{p} on a :

$$\sum_{\mathcal{D} \in \mathcal{D}_{|\mathbf{E}} \cap \mathcal{D}_{|\mathbf{p}}} \frac{\mathbf{u}_A - \mathbf{u}_B}{2} = 0.$$

En fait, pour chaque arête \mathbf{e} il existe deux et seulement deux faces de \mathbf{p} auxquelles \mathbf{e} appartient, et ainsi uniquement deux diamants distincts $\mathcal{D}_{(\mathbf{e}, \mathbf{f})}$. Avec l'orientation choisie, le segment correspondant à l'arête \mathbf{e} , qui connecte \mathbf{x}_A et \mathbf{x}_B , est orienté de manière opposée dans chacun des diamants. La seconde relation est déduite en utilisant les mêmes arguments après avoir échangé les rôles de $\mathbf{u}_E, \mathbf{u}_F$ par $\mathbf{x}_E, \mathbf{x}_F$.

(iii). Le membre de gauche de la première relation de l'item (iii) peut se découper en

$$\sum_{\mathcal{D} \in \mathcal{D}_{|\mathbf{v}}} \frac{\mathbf{u}_L - \mathbf{u}_K}{2} \times (\mathbf{x}_F - \mathbf{x}_E) = \sum_{\substack{\mathbf{f} \in \mathcal{F} \\ \mathbf{v} \in \partial \mathbf{f}}} \left(\sum_{\mathcal{D} \in \mathcal{D}_{|\mathbf{A}} \cap \mathcal{D}_{|\mathbf{F}}} \frac{\mathbf{u}_L - \mathbf{u}_K}{2} \right) \times \mathbf{x}_F - \sum_{\substack{\mathbf{e} \in \mathcal{E} \\ \mathbf{v} \in \partial \mathbf{e}}} \left(\sum_{\mathcal{D} \in \mathcal{D}_{|\mathbf{E}}} \frac{\mathbf{u}_L - \mathbf{u}_K}{2} \right) \times \mathbf{x}_E. \quad (\text{X.29})$$

Le second terme dans le membre de droite de (X.29) est nul grâce à (X.27). Puis, on remarque qu'un sommet \mathbf{v} et une face \mathbf{f} , à laquelle appartient le sommet \mathbf{v} , appartiennent seulement à deux diamants, et que la face \mathbf{f} détermine les mailles primales \mathbf{p}_K et \mathbf{p}_L . Ici, on suppose que \mathbf{p}_L peut être une maille primaire dégénérée telle que $L = F$ si \mathbf{f} est une face du bord. De plus, l'orientation choisie implique que le segment connectant \mathbf{x}_K à \mathbf{x}_L dans le premier diamant est orienté de manière opposée au segment connectant les mêmes mailles dans le second diamant. Ainsi, pour un couple (\mathbf{v}, \mathbf{f}) on a

$$\sum_{\mathcal{D} \in \mathcal{D}_{|\mathbf{v}} \cap \mathcal{D}_{|\mathbf{F}}} \frac{\mathbf{u}_L - \mathbf{u}_K}{2} = 0,$$

à partir de laquelle on déduit le résultat. La seconde relation de l'item (iii) est déduite en utilisant les mêmes arguments après avoir échangé les rôles de $\mathbf{u}_K, \mathbf{u}_L$ et $\mathbf{x}_K, \mathbf{x}_L$. ■

Théorème X.19 (Inégalité de Korn discrète. Version 3D du Théorème VI.4)

Soit \mathcal{T} un maillage DDFV associé à Ω . Pour tout $\mathbf{u}^\tau \in \mathbb{E}_0$, on a

$$\|\nabla^\mathcal{D} \mathbf{u}^\tau\|_2 \leq \sqrt{2} \|\mathbf{D}^\mathcal{D} \mathbf{u}^\tau\|_2.$$

Démonstration : On a l'égalité suivante

$$\|\mathbf{D}^\mathcal{D} \mathbf{u}^\tau\|_2^2 = \frac{1}{2} \|\nabla^\mathcal{D} \mathbf{u}^\tau\|_2^2 + \frac{1}{2} ({}^t(\nabla^\mathcal{D} \mathbf{u}^\tau) : \nabla^\mathcal{D} \mathbf{u}^\tau)_\mathcal{D}.$$

On va montrer que le second terme du membre de droite de l'égalité ci-dessus est positif. En appliquant la formule de Green Théorème IX.3 et le fait que $\mathbf{u}^\tau \in \mathbb{E}_0$, on a

$$({}^t(\nabla^\mathcal{D} \mathbf{u}^\tau) : \nabla^\mathcal{D} \mathbf{u}^\tau)_\mathcal{D} = -\llbracket \mathbf{div}^\tau ({}^t(\nabla^\mathcal{D} \mathbf{u}^\tau)) \rrbracket, \mathbf{u}^\tau \rrbracket_\mathcal{T}.$$

La Proposition X.17 implique

$$({}^t(\nabla^\mathcal{D} \mathbf{u}^\tau) : \nabla^\mathcal{D} \mathbf{u}^\tau)_\mathcal{D} = -\llbracket \mathbf{div}^\tau (\mathbf{div}^\mathcal{D}(\mathbf{u}^\tau) \text{Id}), \mathbf{u}^\tau \rrbracket_\mathcal{T}.$$

En utilisant encore une fois la formule de Green Théorème IX.3 pour $\mathbf{u}^\tau \in \mathbb{E}_0$ et en remplaçant $\mathbf{div}^\mathcal{D} \mathbf{u}^\tau = \text{Tr} \nabla^\mathcal{D} \mathbf{u}^\tau = (\text{Id} : \nabla^\mathcal{D} \mathbf{u}^\tau)$, on obtient

$$({}^t(\nabla^\mathcal{D} \mathbf{u}^\tau) : \nabla^\mathcal{D} \mathbf{u}^\tau)_\mathcal{D} = (\mathbf{div}^\mathcal{D}(\mathbf{u}^\tau) \text{Id} : \nabla^\mathcal{D} \mathbf{u}^\tau)_\mathcal{D} = \|\mathbf{div}^\mathcal{D}(\mathbf{u}^\tau)\|_2^2 \geq 0.$$

■

X.7 Stabilité du schéma DDFV 3D

Dans cette section, on montre la stabilité et le caractère bien posé du schéma DDFV (X.14) (voir Théorèmes X.20 et X.21). La démonstration du Théorème X.20 est identique à la démonstration du Théorème VI.6, maintenant qu'on a montré les résultats équivalents sur les opérateurs discrets en 3D, on ne la redonne pas ici.

Théorème X.20 (Stabilité du schéma. Version 3D du Théorème VI.6)

On suppose que η vérifie (X.2). Il existe deux constantes $C_1 > 0$ et $C_2 > 0$, dépendant uniquement du diamètre de Ω , λ , \underline{C}_η , \bar{C}_η , et C_{reg} , telles que pour chaque couple $(\mathbf{u}^\tau, p^\mathfrak{D}) \in \mathbb{E}_0 \times \mathbb{R}^\mathfrak{D}$ avec $\sum_{\mathfrak{D} \in \mathfrak{D}} m_\mathfrak{D} p^\mathfrak{D} = 0$, il existe $\tilde{\mathbf{u}}^\tau \in \mathbb{E}_0$ et $\tilde{p}^\mathfrak{D} \in \mathbb{R}^\mathfrak{D}$ vérifiant :

$$\|\nabla^\mathfrak{D} \tilde{\mathbf{u}}^\tau\|_2 + \|\tilde{p}^\mathfrak{D}\|_2 \leq C_1 (\|\nabla^\mathfrak{D} \mathbf{u}^\tau\|_2 + \|p^\mathfrak{D}\|_2),$$

et

$$\|\nabla^\mathfrak{D} \mathbf{u}^\tau\|_2^2 + \|p^\mathfrak{D}\|_2^2 \leq C_2 B(\mathbf{u}^\tau, p^\mathfrak{D}; \tilde{\mathbf{u}}^\tau, \tilde{p}^\mathfrak{D}),$$

avec

$$B(\mathbf{u}^\tau, p^\mathfrak{D}; \tilde{\mathbf{u}}^\tau, \tilde{p}^\mathfrak{D}) = \llbracket \operatorname{div}^\tau (-2\eta^\mathfrak{D} \mathbf{D}^\mathfrak{D} \mathbf{u}^\tau + p^\mathfrak{D} \operatorname{Id}), \tilde{\mathbf{u}}^\tau \rrbracket_\tau + (\operatorname{div}^\mathfrak{D}(\mathbf{u}^\tau) - \lambda \operatorname{size}(\mathcal{T})^2 \Delta^\mathfrak{D} p^\mathfrak{D}, \tilde{p}^\mathfrak{D})_\mathfrak{D}.$$

Théorème X.21

On suppose que η vérifie (X.2). Soit \mathcal{T} un maillage DDFV de Ω , le schéma (X.14) admet une unique solution $(\mathbf{u}^\tau, p^\mathfrak{D}) \in (\mathbb{R}^3)^\tau \times \mathbb{R}^\mathfrak{D}$.

Démonstration : On note N la dimension de $(\mathbb{R}^2)^\tau \times \mathbb{R}^\mathfrak{D}$. Le schéma (X.14) peut s'écrire avec $q^\mathfrak{D} = 0$, $\mathbf{g}^{\partial \mathfrak{M}^\mathcal{P}} = 0$, $\mathbf{g}^{\partial \mathfrak{M}^\mathcal{V}} = 0$, $\mathbf{g}^{\partial \mathfrak{M}^\mathcal{E}^\mathcal{F}} = 0$ et $\alpha = 0$ comme suit

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } \mathbf{u}^\tau \in (\mathbb{R}^2)^\tau \text{ et } p^\mathfrak{D} \in \mathbb{R}^\mathfrak{D} \text{ tels que,} \\ \operatorname{div}^{\tau, \text{int}}(-2\eta^\mathfrak{D} \mathbf{D}^\mathfrak{D} \mathbf{u}^\tau + p^\mathfrak{D} \operatorname{Id}) = \mathbf{f}_m^{\tau, \text{int}}, \\ \operatorname{div}^\mathfrak{D}(\mathbf{u}^\tau) - \lambda \operatorname{size}(\mathcal{T})^2 \Delta^\mathfrak{D} p^\mathfrak{D} = q^\mathfrak{D}, \\ \forall \mathbf{p} \in \partial \mathfrak{M}^\mathcal{P}, \quad \mathbf{u}_\mathbf{p} = \mathbf{g}_\mathbf{p}, \\ \forall \mathbf{v} \in \partial \mathfrak{M}^\mathcal{V}, \quad \mathbf{u}_\mathbf{v} = \mathbf{g}_\mathbf{v}, \\ \forall \mathbf{s} \in \partial \mathfrak{M}^\mathcal{E}^\mathcal{F}, \quad \mathbf{u}_\mathbf{s} = \mathbf{g}_\mathbf{s}, \\ \sum_{\mathfrak{D} \in \mathfrak{D}} m_\mathfrak{D} p^\mathfrak{D} = \alpha. \end{array} \right.$$

C'est un système linéaire : $Av = b$ avec une matrice rectangle $A \in \mathcal{M}_{N+1, N}(\mathbb{R})$, $v \in \mathbb{R}^N$ et le second membre $b = {}^t(\mathbf{f}_m^{\tau, \text{int}}, q^\mathfrak{D}, \mathbf{g}^{\partial \mathfrak{M}^\mathcal{P}}, \mathbf{g}^{\partial \mathfrak{M}^\mathcal{V}}, \mathbf{g}^{\partial \mathfrak{M}^\mathcal{E}^\mathcal{F}}, \alpha) \in \mathbb{R}^{N+1}$. Soit X l'ensemble suivant

$$X = \left\{ (\mathbf{f}_m^{\tau, \text{int}}, q^\mathfrak{D}, \mathbf{g}^{\partial \mathfrak{M}^\mathcal{P}}, \mathbf{g}^{\partial \mathfrak{M}^\mathcal{V}}, \mathbf{g}^{\partial \mathfrak{M}^\mathcal{E}^\mathcal{F}}, \alpha)' \in \mathbb{R}^{N+1}, \sum_{\mathfrak{D}_{\sigma, \sigma^*} \in \mathfrak{D}_{ext}} m_\sigma \gamma^\tau(\mathbf{g}^\tau) \cdot \bar{\mathbf{n}}_{\sigma \kappa} = \sum_{\mathfrak{D} \in \mathfrak{D}} m_\mathfrak{D} q^\mathfrak{D} \right\},$$

la dimension de X vaut N . On a que ${}^t(\mathbf{f}_m^{\tau, \text{int}}, 0, 0, 0, 0, 0)$ appartient à X et que $\operatorname{Im} A \subset X$ car on a une relation entre l'équation de la conservation de la masse et la condition aux bords de Dirichlet grâce à la formule de Green (Théorème IV.9). Si on montre que la matrice A est injective, on conclut que $\dim \operatorname{Im} A = N$ et ainsi $\operatorname{Im} A = X$. Etudions donc le noyau de la matrice A . Grâce au Théorème X.20, il existe $\tilde{\mathbf{u}}^\tau \in \mathbb{E}_0$, $\tilde{p}^\mathfrak{D} \in \mathbb{R}^\mathfrak{D}$, tels que

$$\|\nabla^\mathfrak{D} \tilde{\mathbf{u}}^\tau\|_2 + \|\tilde{p}^\mathfrak{D}\|_2 \leq C_1 (\|\nabla^\mathfrak{D} \mathbf{u}^\tau\|_2 + \|p^\mathfrak{D}\|_2),$$

et

$$\|\nabla^\mathfrak{D} \mathbf{u}^\tau\|_2^2 + \|p^\mathfrak{D}\|_2^2 \leq C_2 B(\mathbf{u}^\tau, p^\mathfrak{D}; \tilde{\mathbf{u}}^\tau, \tilde{p}^\mathfrak{D}).$$

La définition de B implique que $B(\mathbf{u}^\tau, p^\mathfrak{D}; \tilde{\mathbf{u}}^\tau, \tilde{p}^\mathfrak{D}) = 0$. Il vient que $\nabla^\mathfrak{D} \mathbf{u}^\tau = 0$ et $p^\mathfrak{D} = 0$. Ainsi on a que les degrés de liberté de la vitesse \mathbf{u}^τ sont constants, comme $\mathbf{u}^\tau \in \mathbb{E}_0$, on conclut que $\mathbf{u}^\tau = 0$. ■

X.8 Estimations d'erreurs du schéma DDFV 3D

On donne maintenant une estimation de l'erreur dans le cas où la solution exacte du problème (X.1) appartient à $(H^2(\Omega))^3 \times H^1(\Omega)$ et la viscosité est assez régulière. Notre résultat principal est le suivant.

Théorème X.22 (Estimations d'erreurs)

On suppose que η vérifie (X.2) et (X.3). On suppose que la solution (\mathbf{u}, p) du problème (X.1) appartient à $(H^2(\Omega))^3 \times H^1(\Omega)$. Soit $(\mathbf{u}^\tau, p^\mathfrak{D}) \in (\mathbb{R}^2)^\tau \times \mathbb{R}^\mathfrak{D}$ la solution du schéma (X.14). Il existe une constante $C > 0$ dépendant uniquement de C_{reg} , λ , C_η , \underline{C}_η , \overline{C}_η , $\|\mathbf{u}\|_{H^2}$ et $\|p\|_{H^1}$, telle que :

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}^\tau\|_2 + \|\nabla \mathbf{u} - \nabla^\mathfrak{D} \mathbf{u}^\tau\|_2 \leq C \text{size}(\mathcal{T}),$$

et

$$\|p - p^\mathfrak{D}\|_2 \leq C \text{size}(\mathcal{T}).$$

Début de la Démonstration du Théorème X.22 : Soit $\mathbf{e}^\tau = \mathbb{P}_\mathcal{C}^\tau \mathbf{u} - \mathbf{u}^\tau \in \mathbb{E}_0$ l'erreur approchée pour la vitesse et $e^\mathfrak{D} = \mathbb{P}_m^\mathfrak{D} p - p^\mathfrak{D} \in \mathbb{R}^\mathfrak{D}$ l'erreur approchée pour la pression. Grâce à (X.14) et (X.1), on a $\forall \mathbf{p} \in \mathfrak{M}^P$

$$\begin{cases} \text{div}^P(-2\eta^\mathfrak{D} D^\mathfrak{D} \mathbf{u}^\tau + p^\mathfrak{D} \text{Id}) = \frac{1}{m_p} \int_p \mathbf{f} dV, \\ -\frac{1}{m_p} \int_p \text{div}(2\eta(x) D\mathbf{u}(x)) dx + \frac{1}{m_p} \int_p \nabla p(x) dx = \frac{1}{m_p} \int_p \mathbf{f} dV. \end{cases}$$

Par conséquent, on en déduit

$$m_p \text{div}^P(-2\eta^\mathfrak{D} D^\mathfrak{D} \mathbf{e}^\tau + e^\mathfrak{D} \text{Id}) = m_p \text{div}^P(-2\eta^\mathfrak{D} D^\mathfrak{D} \mathbb{P}_\mathcal{C}^\tau \mathbf{u} + \mathbb{P}_m^\mathfrak{D} p \text{Id}) + \int_p \text{div}(2\eta(x) D\mathbf{u}(x)) dx - \int_p \nabla p(x) dx.$$

La Définition X.2 de la divergence discrète et la formule de Green impliquent

$$\begin{aligned} m_p \text{div}^P(-2\eta^\mathfrak{D} D^\mathfrak{D} \mathbf{e}^\tau + e^\mathfrak{D} \text{Id}) &= 2 \sum_{\mathfrak{D} \in \mathfrak{D}_p} \sum_{T \in \mathcal{S}_{D, KL}} \int_T (\eta(z) D\mathbf{u}(z) - \eta_D D^\mathfrak{D} \mathbb{P}_\mathcal{C}^\tau \mathbf{u}) \cdot \vec{\mathbf{n}}_{T,p} dz \\ &\quad + \sum_{\mathfrak{D} \in \mathfrak{D}_p} \sum_{T \in \mathcal{S}_{D, KL}} \int_T (\mathbb{P}_m^\mathfrak{D} p - p(z)) \cdot \vec{\mathbf{n}}_{T,p} dz, \end{aligned} \quad (\text{X.30})$$

on rappelle que la surface $\mathcal{S}_{D, KL}$ est composée de quatre triangles (voir (IX.1)), ainsi T représente l'un de ces triangles et $\vec{\mathbf{n}}_{T,p}$ désigne le vecteur normal à T sortant de p . De la même manière, on a $\forall v \in \mathfrak{M}^V$

$$\begin{aligned} m_v \text{div}^V(-2\eta^\mathfrak{D} D^\mathfrak{D} \mathbf{e}^\tau + e^\mathfrak{D} \text{Id}) &= 2 \sum_{\mathfrak{D} \in \mathfrak{D}_v} \sum_{T \in \mathcal{S}_{D, AB}} \int_T (\eta(z) D\mathbf{u}(z) - \eta_D D^\mathfrak{D} \mathbb{P}_\mathcal{C}^\tau \mathbf{u}) \cdot \vec{\mathbf{n}}_{T,v} dz \\ &\quad + \sum_{\mathfrak{D} \in \mathfrak{D}_v} \sum_{T \in \mathcal{S}_{D, AB}} \int_T (\mathbb{P}_m^\mathfrak{D} p - p(z)) \cdot \vec{\mathbf{n}}_{T,v} dz, \end{aligned} \quad (\text{X.31})$$

et $\forall s \in \mathfrak{M}^{\mathcal{EF}}$

$$\begin{aligned} m_s \text{div}^s(-2\eta^\mathfrak{D} D^\mathfrak{D} \mathbf{e}^\tau + e^\mathfrak{D} \text{Id}) &= 2 \sum_{\mathfrak{D} \in \mathfrak{D}_s} \sum_{T \in \mathcal{S}_{D, EF}} \int_T (\eta(z) D\mathbf{u}(z) - \eta_D D^\mathfrak{D} \mathbb{P}_\mathcal{C}^\tau \mathbf{u}) \cdot \vec{\mathbf{n}}_{T,s} dz \\ &\quad + \sum_{\mathfrak{D} \in \mathfrak{D}_s} \sum_{T \in \mathcal{S}_{D, EF}} \int_T (\mathbb{P}_m^\mathfrak{D} p - p(z)) \cdot \vec{\mathbf{n}}_{T,s} dz. \end{aligned} \quad (\text{X.32})$$

On définit l'erreur de consistance de la manière suivante

$$\begin{aligned} R_\mathfrak{D}^\mathbf{u}(z) &= \eta(z) D\mathbf{u}(z) - \eta_D D^\mathfrak{D} \mathbb{P}_\mathcal{C}^\tau \mathbf{u}, \quad \text{pour } z \in \mathfrak{D}, \mathfrak{D} \in \mathfrak{D}, \\ R_\mathfrak{D}^p(z) &= \mathbb{P}_m^\mathfrak{D} p - p(z), \quad \text{pour } z \in \mathfrak{D}, \mathfrak{D} \in \mathfrak{D}. \end{aligned}$$

Pour chaque diamant $\mathfrak{D} \in \mathfrak{D}$, on a quatre triangles qui composent $\mathcal{S}_{D, KL}$, $\mathcal{S}_{D, AB}$, $\mathcal{S}_{D, EF}$, on définit grâce à ces triangles des nouveaux ensembles $\mathcal{T}_\mathfrak{D}^{\mathfrak{M}^P}$, $\mathcal{T}_\mathfrak{D}^{\mathfrak{M}^V}$, $\mathcal{T}_\mathfrak{D}^{\mathfrak{M}^{\mathcal{EF}}}$

$$\mathcal{T}_\mathfrak{D}^{\mathfrak{M}^P} = \{T_{DFA}, T_{DAE}, T_{DEB}, T_{DBF}\},$$

$$\mathcal{T}_\mathfrak{D}^{\mathfrak{M}^V} = \{T_{DKF}, T_{DFL}, T_{DLE}, T_{DEK}\},$$

$$\mathcal{T}_\mathfrak{D}^{\mathfrak{M}^{\mathcal{EF}}} = \{T_{DKA}, T_{DAL}, T_{DLB}, T_{DBK}\},$$

puis on définit $T_{\mathfrak{D}}^{\mathfrak{M}^{\mathcal{P}}}, T_{\mathfrak{D}}^{\mathfrak{M}^{\mathcal{V}}}, T_{\mathfrak{D}}^{\mathfrak{M}^{\mathcal{EF}}}$ de la manière suivante

$$\begin{aligned} T_{\mathfrak{D}}^{\mathfrak{M}^{\mathcal{P}}} &= \{T_{\mathfrak{D}}^{\mathfrak{M}^{\mathcal{P}}}, \text{ pour tout } \mathfrak{D} \in \mathfrak{D}\}, \\ T_{\mathfrak{D}}^{\mathfrak{M}^{\mathcal{V}}} &= \{T_{\mathfrak{D}}^{\mathfrak{M}^{\mathcal{V}}}, \text{ pour tout } \mathfrak{D} \in \mathfrak{D}\}, \\ T_{\mathfrak{D}}^{\mathfrak{M}^{\mathcal{EF}}} &= \{T_{\mathfrak{D}}^{\mathfrak{M}^{\mathcal{EF}}}, \text{ pour tout } \mathfrak{D} \in \mathfrak{D}\}. \end{aligned}$$

On note pour $i \in \{\mathbf{u}, p\}$:

$$\begin{aligned} R_{\mathfrak{D}_{|\mathbf{p}}, \mathbf{T}}^i &= \frac{1}{m_{\mathbf{T}}} \int_{\mathbf{T}} R_{\mathfrak{D}}^i(z) \tilde{\mathbf{n}}_{\mathbf{T}, \mathbf{p}} dz, \quad \forall \mathbf{T} \in T_{\mathfrak{D}}^{\mathfrak{M}^{\mathcal{P}}}, \\ R_{\mathfrak{D}_{|\mathbf{v}}, \mathbf{T}}^i &= \frac{1}{m_{\mathbf{T}}} \int_{\mathbf{T}} R_{\mathfrak{D}}^i(z) \tilde{\mathbf{n}}_{\mathbf{T}, \mathbf{v}} dz, \quad \forall \mathbf{T} \in T_{\mathfrak{D}}^{\mathfrak{M}^{\mathcal{V}}}, \\ R_{\mathfrak{D}_{|\mathbf{s}}, \mathbf{T}}^i &= \frac{1}{m_{\mathbf{T}}} \int_{\mathbf{T}} R_{\mathfrak{D}}^i(z) \tilde{\mathbf{n}}_{\mathbf{T}, \mathbf{s}} dz, \quad \forall \mathbf{T} \in T_{\mathfrak{D}}^{\mathfrak{M}^{\mathcal{EF}}}, \end{aligned}$$

et la norme L^2 , pour $T_{\mathfrak{D}} \in \{T_{\mathfrak{D}}^{\mathfrak{M}^{\mathcal{P}}}, T_{\mathfrak{D}}^{\mathfrak{M}^{\mathcal{V}}}, T_{\mathfrak{D}}^{\mathfrak{M}^{\mathcal{EF}}}\}$:

$$\|R_{\mathfrak{D}, T_{\mathfrak{D}}}^i\|_2^2 = \sum_{\mathfrak{D} \in \mathfrak{D}} \sum_{\mathbf{T} \in T_{\mathfrak{D}}} m_{\mathfrak{D}} |R_{\mathfrak{D}, \mathbf{T}}^i|^2.$$

Grâce à (X.30), (X.31) et (X.32), le couple $(\mathbf{e}^{\mathcal{T}}, e^{\mathcal{D}}) \in \mathbb{E}_0 \times \mathbb{R}^{\mathcal{D}}$ est solution de

$$\left\{ \begin{array}{ll} \operatorname{div}^{\mathcal{P}, \text{int}}(-2\eta^{\mathcal{D}} D^{\mathcal{D}} \mathbf{e}^{\mathcal{T}} + e^{\mathcal{D}} \operatorname{Id}) &= \mathbf{R}_{\mathfrak{M}^{\mathcal{P}}, \text{int}}, \\ \operatorname{div}^{\mathcal{V}, \text{int}}(-2\eta^{\mathcal{D}} D^{\mathcal{D}} \mathbf{e}^{\mathcal{T}} + e^{\mathcal{D}} \operatorname{Id}) &= \mathbf{R}_{\mathfrak{M}^{\mathcal{V}}, \text{int}}, \\ \operatorname{div}^{\mathcal{EF}, \text{int}}(-2\eta^{\mathcal{D}} D^{\mathcal{D}} \mathbf{e}^{\mathcal{T}} + e^{\mathcal{D}} \operatorname{Id}) &= \mathbf{R}_{\mathfrak{M}^{\mathcal{EF}}, \text{int}}, \\ \operatorname{div}^{\mathcal{D}}(\mathbf{e}^{\mathcal{T}}) - \lambda \operatorname{size}(\mathcal{T})^2 \Delta^{\mathcal{D}} e^{\mathcal{D}} &= R_{\mathfrak{D}}, \\ \sum_{\mathfrak{D} \in \mathfrak{D}} m_{\mathfrak{D}} e^{\mathcal{D}} &= 0, \end{array} \right. \quad (\text{X.33})$$

où $\mathbf{R}_{\mathfrak{M}^{\mathcal{P}}, \text{int}} = (\mathbf{R}_{\mathbf{p}})_{\mathbf{p} \in \mathfrak{M}^{\mathcal{P}}, \text{int}}$, $\mathbf{R}_{\mathfrak{M}^{\mathcal{V}}, \text{int}} = (\mathbf{R}_{\mathbf{v}})_{\mathbf{v} \in \mathfrak{M}^{\mathcal{V}}, \text{int}}$, $\mathbf{R}_{\mathfrak{M}^{\mathcal{EF}}, \text{int}} = (\mathbf{R}_{\mathbf{s}})_{\mathbf{s} \in \mathfrak{M}^{\mathcal{EF}}, \text{int}}$ et $R_{\mathfrak{D}} = (R_{\mathfrak{D}})_{\mathfrak{D} \in \mathfrak{D}}$ avec :

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{\mathbf{p}} &= \frac{1}{m_{\mathbf{p}}} \sum_{\mathfrak{D} \in \mathfrak{D}_{|\mathbf{p}}} \sum_{\mathbf{T} \in T_{\mathfrak{D}}^{\mathfrak{M}^{\mathcal{P}}}} m_{\mathbf{T}} (2R_{\mathfrak{D}_{|\mathbf{p}}, \mathbf{T}}^{\mathbf{u}} + R_{\mathfrak{D}_{|\mathbf{p}}, \mathbf{T}}^p), \quad \forall \mathbf{p} \in \mathfrak{M}^{\mathcal{P}}, \text{int}, \\ \mathbf{R}_{\mathbf{v}} &= \frac{1}{m_{\mathbf{v}}} \sum_{\mathfrak{D} \in \mathfrak{D}_{|\mathbf{v}}} \sum_{\mathbf{T} \in T_{\mathfrak{D}}^{\mathfrak{M}^{\mathcal{V}}}} m_{\mathbf{T}} (2R_{\mathfrak{D}_{|\mathbf{v}}, \mathbf{T}}^{\mathbf{u}} + R_{\mathfrak{D}_{|\mathbf{v}}, \mathbf{T}}^p), \quad \forall \mathbf{v} \in \mathfrak{M}^{\mathcal{V}}, \text{int}, \\ \mathbf{R}_{\mathbf{s}} &= \frac{1}{m_{\mathbf{s}}} \sum_{\mathfrak{D} \in \mathfrak{D}_{|\mathbf{s}}} \sum_{\mathbf{T} \in T_{\mathfrak{D}}^{\mathfrak{M}^{\mathcal{EF}}}} m_{\mathbf{T}} (2R_{\mathfrak{D}_{|\mathbf{s}}, \mathbf{T}}^{\mathbf{u}} + R_{\mathfrak{D}_{|\mathbf{s}}, \mathbf{T}}^p), \quad \forall \mathbf{s} \in \mathfrak{M}^{\mathcal{EF}}, \text{int}, \\ R_{\mathfrak{D}} &= \operatorname{div}^{\mathcal{D}}(\mathbb{P}_{\mathcal{C}}^{\mathcal{T}} \mathbf{u}) - \lambda \operatorname{size}(\mathcal{T})^2 \Delta^{\mathcal{D}} \mathbb{P}_m^{\mathcal{D}} p, \quad \forall \mathfrak{D} \in \mathfrak{D}. \end{aligned}$$

On remarque que $\sum_{\mathfrak{D} \in \mathfrak{D}} m_{\mathfrak{D}} R_{\mathfrak{D}} = 0$. Le Théorème X.20 implique l'existence de $\tilde{\mathbf{e}}^{\mathcal{T}} \in \mathbb{E}_0$, $\tilde{e}^{\mathcal{D}} \in \mathbb{R}^{\mathcal{D}}$ et $C > 0$ tels que :

$$\|\nabla^{\mathcal{D}} \tilde{\mathbf{e}}^{\mathcal{T}}\|_2 + \|\tilde{e}^{\mathcal{D}}\|_2 \leq C (\|\nabla^{\mathcal{D}} \mathbf{e}^{\mathcal{T}}\|_2 + \|e^{\mathcal{D}}\|_2), \quad (\text{X.34})$$

et

$$\|\nabla^{\mathcal{D}} \mathbf{e}^{\mathcal{T}}\|_2^2 + \|e^{\mathcal{D}}\|_2^2 \leq CB(\mathbf{e}^{\mathcal{T}}, e^{\mathcal{D}}; \tilde{\mathbf{e}}^{\mathcal{T}}, \tilde{e}^{\mathcal{D}}). \quad (\text{X.35})$$

Grâce à la définition de B et de (X.33), on a $B(\mathbf{e}^{\mathcal{T}}, e^{\mathcal{D}}; \tilde{\mathbf{e}}^{\mathcal{T}}, \tilde{e}^{\mathcal{D}}) = \llbracket \operatorname{div}^{\mathcal{T}}(-2\eta^{\mathcal{D}} D^{\mathcal{D}} \mathbf{e}^{\mathcal{T}} + e^{\mathcal{D}} \operatorname{Id}), \tilde{\mathbf{e}}^{\mathcal{T}} \rrbracket_{\mathcal{T}} + (R^{\mathcal{D}}, \tilde{e}^{\mathcal{D}})_{\mathfrak{D}}$. On note $I := \llbracket \operatorname{div}^{\mathcal{T}}(-2\eta^{\mathcal{D}} D^{\mathcal{D}} \mathbf{e}^{\mathcal{T}} + e^{\mathcal{D}} \operatorname{Id}), \tilde{\mathbf{e}}^{\mathcal{T}} \rrbracket_{\mathcal{T}}$ et $T := (R^{\mathcal{D}}, \tilde{e}^{\mathcal{D}})_{\mathfrak{D}}$.

Estimation de I . En utilisant le fait que $\tilde{\mathbf{e}}^{\mathcal{T}} \in \mathbb{E}_0$ et la définition de I , on a

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{3} \sum_{\mathbf{p} \in \mathfrak{M}^{\mathcal{P}}} \sum_{\mathfrak{D} \in \mathfrak{D}_{|\mathbf{p}}} \sum_{\mathbf{T} \in T_{\mathfrak{D}}^{\mathfrak{M}^{\mathcal{P}}}} m_{\mathbf{T}} (2R_{\mathfrak{D}_{|\mathbf{p}}, \mathbf{T}}^{\mathbf{u}} + R_{\mathfrak{D}_{|\mathbf{p}}, \mathbf{T}}^p) \cdot \tilde{\mathbf{e}}_{\mathbf{p}} \\ &\quad + \frac{1}{3} \sum_{\mathbf{v} \in \mathfrak{M}^{\mathcal{V}}} \sum_{\mathfrak{D} \in \mathfrak{D}_{|\mathbf{v}}} \sum_{\mathbf{T} \in T_{\mathfrak{D}}^{\mathfrak{M}^{\mathcal{V}}}} m_{\mathbf{T}} (2R_{\mathfrak{D}_{|\mathbf{v}}, \mathbf{T}}^{\mathbf{u}} + R_{\mathfrak{D}_{|\mathbf{v}}, \mathbf{T}}^p) \cdot \tilde{\mathbf{e}}_{\mathbf{v}} \\ &\quad + \frac{1}{3} \sum_{\mathbf{s} \in \mathfrak{M}^{\mathcal{EF}}} \sum_{\mathfrak{D} \in \mathfrak{D}_{|\mathbf{s}}} \sum_{\mathbf{T} \in T_{\mathfrak{D}}^{\mathfrak{M}^{\mathcal{EF}}}} m_{\mathbf{T}} (2R_{\mathfrak{D}_{|\mathbf{s}}, \mathbf{T}}^{\mathbf{u}} + R_{\mathfrak{D}_{|\mathbf{s}}, \mathbf{T}}^p) \cdot \tilde{\mathbf{e}}_{\mathbf{s}}. \end{aligned}$$

En réorganisant la somme sur les diamants $\mathcal{D} \in \mathfrak{D}$ et en remarquant que $R_{\mathfrak{D}|_{K,T}}^i = -R_{\mathfrak{D}|_{L,T}}^i$, etc, pour $i = \mathbf{u}, p$, il vient que

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{3} \sum_{\mathcal{D} \in \mathfrak{D}} \sum_{T \in T_{\mathfrak{D}}^{\mathfrak{M}^P}} m_T (2R_{\mathfrak{D}|_{P,T}}^{\mathbf{u}} + R_{\mathfrak{D}|_{P,T}}^p) \cdot (\tilde{\mathbf{e}}_K - \tilde{\mathbf{e}}_L) \\ &\quad + \frac{1}{3} \sum_{\mathcal{D} \in \mathfrak{D}} \sum_{T \in T_{\mathfrak{D}}^{\mathfrak{M}^{\mathcal{F}}}} m_T (2R_{\mathfrak{D}|_{S,T}}^{\mathbf{u}} + R_{\mathfrak{D}|_{S,T}}^p) \cdot (\tilde{\mathbf{e}}_A - \tilde{\mathbf{e}}_B) \\ &\quad + \frac{1}{3} \sum_{\mathcal{D} \in \mathfrak{D}} \sum_{T \in T_{\mathfrak{D}}^{\mathfrak{M}^{\mathcal{F}}}} m_T (2R_{\mathfrak{D}|_{S,T}}^{\mathbf{u}} + R_{\mathfrak{D}|_{S,T}}^p) \cdot (\tilde{\mathbf{e}}_E - \tilde{\mathbf{e}}_F). \end{aligned}$$

Grâce à (X.7), on a $\nabla^{\mathcal{D}} \tilde{\mathbf{e}}^{\mathcal{T}} \cdot \overrightarrow{\text{LK}} = \tilde{\mathbf{e}}_K - \tilde{\mathbf{e}}_L$, il vient que

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{3} \sum_{\mathcal{D} \in \mathfrak{D}} m_{\mathcal{D}} \sum_{T \in T_{\mathfrak{D}}^{\mathfrak{M}^P}} \frac{m_T}{m_{\mathcal{D}}} (2R_{\mathfrak{D}|_{P,T}}^{\mathbf{u}} + R_{\mathfrak{D}|_{P,T}}^p) \cdot (\nabla^{\mathcal{D}} \tilde{\mathbf{e}}^{\mathcal{T}} \cdot \overrightarrow{\text{LK}}) \\ &\quad + \frac{1}{3} \sum_{\mathcal{D} \in \mathfrak{D}} m_{\mathcal{D}} \sum_{T \in T_{\mathfrak{D}}^{\mathfrak{M}^{\mathcal{F}}}} \frac{m_T}{m_{\mathcal{D}}} (2R_{\mathfrak{D}|_{S,T}}^{\mathbf{u}} + R_{\mathfrak{D}|_{S,T}}^p) \cdot (\nabla^{\mathcal{D}} \tilde{\mathbf{e}}^{\mathcal{T}} \cdot \overrightarrow{\text{BA}}) \\ &\quad + \frac{1}{3} \sum_{\mathcal{D} \in \mathfrak{D}} m_{\mathcal{D}} \sum_{T \in T_{\mathfrak{D}}^{\mathfrak{M}^{\mathcal{F}}}} \frac{m_T}{m_{\mathcal{D}}} (2R_{\mathfrak{D}|_{S,T}}^{\mathbf{u}} + R_{\mathfrak{D}|_{S,T}}^p) \cdot (\nabla^{\mathcal{D}} \tilde{\mathbf{e}}^{\mathcal{T}} \cdot \overrightarrow{\text{FE}}). \end{aligned}$$

En utilisant le fait que $\frac{d_{\mathcal{D}}}{m_{\mathcal{D}}} m_T \leq C(C_{\text{reg}})$, l'inégalité de Cauchy-Schwarz implique que

$$I \leq C \|\nabla^{\mathcal{D}} \tilde{\mathbf{e}}^{\mathcal{T}}\|_2 \left(\sum_{T_{\mathfrak{D}} \in \{T_{\mathfrak{D}}^{\mathfrak{M}^P}, T_{\mathfrak{D}}^{\mathfrak{M}^V}, T_{\mathfrak{D}}^{\mathfrak{M}^{\mathcal{F}}}\}} (\|R_{\mathfrak{D},T_{\mathfrak{D}}}^{\mathbf{u}}\|_2 + \|R_{\mathfrak{D},T_{\mathfrak{D}}}^p\|_2) \right).$$

Estimation de T . Tout d'abord, le Corollaire X.12 donne

$$\|\text{div}^{\mathcal{D}}(\mathbb{P}_{\mathbf{c}}^{\mathcal{T}} \mathbf{u})\|_2 \leq C \text{size}(\mathcal{T}) \|\mathbf{u}\|_{H^2}.$$

On applique l'inégalité de Cauchy-Schwarz à $(\text{div}^{\mathcal{D}}(\mathbb{P}_{\mathbf{c}}^{\mathcal{T}} \mathbf{u}), \tilde{e}^{\mathcal{D}})_{\mathfrak{D}}$ pour obtenir

$$(\text{div}^{\mathcal{D}}(\mathbb{P}_{\mathbf{c}}^{\mathcal{T}} \mathbf{u}), \tilde{e}^{\mathcal{D}})_{\mathfrak{D}} \leq C \text{size}(\mathcal{T}) \|\mathbf{u}\|_{H^2} \|\tilde{e}^{\mathcal{D}}\|_2. \quad (\text{X.36})$$

En réorganisant la somme sur les faces des diamants $(\mathcal{D}|\mathcal{D}')$ dans le terme $T_1 := -(\lambda \text{size}(\mathcal{T})^2 \Delta^{\mathcal{D}} \mathbb{P}_m^{\mathcal{D}} p, \tilde{e}^{\mathcal{D}})_{\mathfrak{D}}$, on a de la même manière que dans la Remarque X.7

$$T_1 = -\lambda \text{size}(\mathcal{T})^2 \sum_{\mathcal{D} \in \mathfrak{D}} m_{\mathcal{D}} \tilde{e}^{\mathcal{D}} \Delta^{\mathcal{D}} \mathbb{P}_m^{\mathcal{D}} p = \text{size}(\mathcal{T})^2 \lambda \sum_{(\mathcal{D}|\mathcal{D}')} \frac{d_{\mathcal{D}} + d_{\mathcal{D}'}}{2} (\mathbb{P}_m^{\mathcal{D}'} p - \mathbb{P}_m^{\mathcal{D}} p) (\tilde{e}^{\mathcal{D}'} - \tilde{e}^{\mathcal{D}}).$$

L'inégalité de Cauchy-Schwarz et la semi-norme définie par (X.13) conduisent à

$$|T_1| \leq \lambda \text{size}(\mathcal{T})^2 \left(\sum_{(\mathcal{D}|\mathcal{D}')} \frac{d_{\mathcal{D}} + d_{\mathcal{D}'}}{2} (\mathbb{P}_m^{\mathcal{D}'} p - \mathbb{P}_m^{\mathcal{D}} p)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{(\mathcal{D}|\mathcal{D}')} \frac{d_{\mathcal{D}} + d_{\mathcal{D}'}}{2} (\tilde{e}^{\mathcal{D}'} - \tilde{e}^{\mathcal{D}})^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \text{size}(\mathcal{T})^2 \lambda |\tilde{e}^{\mathcal{D}}|_h |\mathbb{P}_m^{\mathcal{D}} p|_h.$$

En utilisant les Lemmes X.8 et X.13, on obtient

$$|T_1| \leq C \text{size}(\mathcal{T}) \|\tilde{e}^{\mathcal{D}}\|_2 \|\nabla p\|_2. \quad (\text{X.37})$$

On remarque que $T = (\text{div}^{\mathcal{D}}(\mathbb{P}_{\mathbf{c}}^{\mathcal{T}} \mathbf{u}), \tilde{e}^{\mathcal{D}})_{\mathfrak{D}} + T_1$ et grâce à (X.36) et (X.37), on en déduit

$$|T| \leq C \text{size}(\mathcal{T}) \|\tilde{e}^{\mathcal{D}}\|_2 (\|\mathbf{u}\|_{H^2} + \|\nabla p\|_2).$$

Estimation de B . En résumé, (X.35) devient

$$\begin{aligned} \|\nabla^{\mathcal{D}} \tilde{\mathbf{e}}^{\mathcal{T}}\|_2^2 + \|e^{\mathcal{D}}\|_2^2 &\leq C \|\nabla^{\mathcal{D}} \tilde{\mathbf{e}}^{\mathcal{T}}\|_2 \left(\sum_{T_{\mathfrak{D}} \in \{T_{\mathfrak{D}}^{\mathfrak{M}^P}, T_{\mathfrak{D}}^{\mathfrak{M}^V}, T_{\mathfrak{D}}^{\mathfrak{M}^{\mathcal{F}}}\}} (\|R_{\mathfrak{D},T_{\mathfrak{D}}}^{\mathbf{u}}\|_2 + \|R_{\mathfrak{D},T_{\mathfrak{D}}}^p\|_2) \right) \\ &\quad + C \text{size}(\mathcal{T}) \|\tilde{e}^{\mathcal{D}}\|_2 (\|\mathbf{u}\|_{H^2} + \|\nabla p\|_2). \end{aligned}$$

Finalement, (X.34) donne

$$\begin{aligned} \|\nabla^{\mathcal{D}} \mathbf{e}^{\tau}\|_2^2 + \|e^{\mathcal{D}}\|_2^2 \leq & C(\|\nabla^{\mathcal{D}} \mathbf{e}^{\tau}\|_2 + \|e^{\mathcal{D}}\|_2) \left(\sum_{T_{\mathcal{D}} \in \{T_{\mathcal{D}}^{\mathfrak{M}^P}, T_{\mathcal{D}}^{\mathfrak{M}^V}, T_{\mathcal{D}}^{\mathfrak{M}^{\mathcal{EF}}}\}} (\|R_{\mathcal{D}, T_{\mathcal{D}}}^{\mathbf{u}}\|_2 + \|R_{\mathcal{D}, T_{\mathcal{D}}}^p\|_2) \right) \\ & + C \text{size}(\mathcal{T}) (\|\mathbf{u}\|_{H^2} + \|\nabla p\|_2) (\|\nabla^{\mathcal{D}} \mathbf{e}^{\tau}\|_2 + \|e^{\mathcal{D}}\|_2). \end{aligned} \quad (\text{X.38})$$

Il reste à montrer les estimations des erreurs de consistance.

X.8.1 Erreur de consistance $R_{\mathcal{D}, T_{\mathcal{D}}}^{\mathbf{u}}$ en vitesse

On s'intéresse maintenant à l'erreur de consistance $R_{\mathcal{D}}^{\mathbf{u}}$, on la décompose en trois contributions $R_{\mathcal{D}}^{\mathbf{u}, \eta}$, $R_{\mathcal{D}}^{\mathbf{u}, \text{Du}}$ et $R_{\mathcal{D}}^{\mathbf{u}, z}$, respectivement l'erreur de consistance due à l'approximation des flux, à l'approximation des gradients et à l'approximation de la viscosité :

$$R_{\mathcal{D}}^{\mathbf{u}}(z) = R_{\mathcal{D}}^{\mathbf{u}, \eta}(z) + R_{\mathcal{D}}^{\mathbf{u}, \text{Du}} + R_{\mathcal{D}}^{\mathbf{u}, z}, \quad (\text{X.39})$$

où, pour $z \in \mathcal{D}$,

$$\begin{aligned} R_{\mathcal{D}}^{\mathbf{u}, \eta}(z) &= \eta(z) \text{Du}(z) - \frac{1}{m_{\mathcal{D}}} \int_{\mathcal{D}} \eta(x) \text{Du}(x) dx, \\ R_{\mathcal{D}}^{\mathbf{u}, \text{Du}} &= \frac{1}{m_{\mathcal{D}}} \int_{\mathcal{D}} \eta(x) (\text{Du}(x) - \text{D}^p \mathbb{P}_{\mathcal{C}}^{\tau} \mathbf{u}) dx, \\ R_{\mathcal{D}}^{\mathbf{u}, z} &= \left(\frac{1}{m_{\mathcal{D}}} \int_{\mathcal{D}} \eta(x) dx - \eta_{\mathcal{D}} \right) \text{D}^p \mathbb{P}_{\mathcal{C}}^{\tau} \mathbf{u}. \end{aligned}$$

Afin de contrôler $R_{\mathcal{D}, T_{\mathcal{D}}}^{\mathbf{u}}$ pour $T_{\mathcal{D}} \in \{T_{\mathcal{D}}^{\mathfrak{M}^P}, T_{\mathcal{D}}^{\mathfrak{M}^V}, T_{\mathcal{D}}^{\mathfrak{M}^{\mathcal{EF}}}\}$, on va estimer séparément les trois termes de (X.39).

Proposition X.23 (Erreur due aux gradients)

On suppose que η vérifie (X.2). Soit \mathcal{T} un maillage DDFV associé à Ω . Il existe une constante $C > 0$, dépendant uniquement de C_{reg} et \overline{C}_{η} , telle que pour toute fonction \mathbf{u} de $(H^2(\Omega))^3$, on a

$$\sum_{\mathcal{D} \in \mathcal{D}} m_{\mathcal{D}} |R_{\mathcal{D}}^{\mathbf{u}, \text{Du}}|^2 \leq C \text{size}(\mathcal{T})^2 \|\nabla \mathbf{u}\|_{H^1}^2.$$

Démonstration : On fait exactement comme pour la démonstration du Lemme VI.11, en remplaçant le Lemme IV.16 par le Lemme X.11. ■

Proposition X.24 (Erreur due à la viscosité)

On suppose que η vérifie (X.2). Soit \mathcal{T} un maillage DDFV associé à Ω . Il existe une constante $C > 0$, dépendant uniquement de C_{reg} et \overline{C}_{η} , telle que pour toute fonction \mathbf{u} de $(H^2(\Omega))^3$, on a

$$\sum_{\mathcal{D} \in \mathcal{D}} m_{\mathcal{D}} |R_{\mathcal{D}}^{\mathbf{u}, z}|^2 \leq C \text{size}(\mathcal{T})^2 \|\nabla \mathbf{u}\|_{H^1}^2.$$

Démonstration : On fait exactement comme pour la démonstration du Lemme VI.12, en remplaçant le Corollaire IV.17 par le Lemme X.11. ■

Proposition X.25 (Erreur due aux flux)

On suppose que η vérifie (X.2) et (X.3). Soit \mathcal{T} un maillage DDFV associé à Ω . Il existe une constante $C > 0$, dépendant uniquement de C_{reg} , C_{η} et \overline{C}_{η} , telle que pour toute fonction \mathbf{u} de $(H^2(\Omega))^3$, on a

$$\sum_{\mathcal{D} \in \mathcal{D}} \sum_{T \in T_{\mathcal{D}}} m_{\mathcal{D}} \left| \frac{1}{m_T} \int_T R_{\mathcal{D}}^{\mathbf{u}, \eta}(z) \vec{\mathbf{n}}_T dz \right|^2 \leq C \text{size}(\mathcal{T})^2 \|\nabla \mathbf{u}\|_{H^1}^2, \text{ pour } T_{\mathcal{D}} \in \{T_{\mathcal{D}}^{\mathfrak{M}^P}, T_{\mathcal{D}}^{\mathfrak{M}^V}, T_{\mathcal{D}}^{\mathfrak{M}^{\mathcal{EF}}}\}.$$

Démonstration : On fait la démonstration pour $T_{\mathfrak{D}} = T_{\mathfrak{D}}^{\mathfrak{M}^P}$, les deux autres cas fonctionnent de la même manière. On applique l'inégalité de Jensen pour obtenir

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{m_T} \int_T R_{\mathfrak{D}}^{\mathbf{u},\eta}(z) \tilde{\mathbf{n}}_T dz \right|^2 &\leq \frac{1}{m_T} \int_T \left| \eta(z) \mathbf{Du}(z) - \frac{1}{m_{\mathfrak{D}}} \int_{\mathfrak{D}} \eta(x) \mathbf{Du}(x) dx \right|^2 dz \\ &\leq \frac{1}{m_T m_{\mathfrak{D}}} \int_T \int_{\mathfrak{D}} |\eta(z) \mathbf{Du}(z) - \eta(x) \mathbf{Du}(x)|^2 dx dz. \end{aligned}$$

Puis, en ajoutant $0 = \eta(z) \mathbf{Du}(x) - \eta(z) \mathbf{Du}(x)$, l'inégalité de Cauchy-Schwarz implique

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{m_T} \int_T R_{\mathfrak{D}}^{\mathbf{u},\eta}(z) \tilde{\mathbf{n}}_T dz \right|^2 &\leq \frac{2}{m_T m_{\mathfrak{D}}} \int_T \int_{\mathfrak{D}} |\eta(z) - \eta(x)|^2 \|\mathbf{Du}(x)\|_{\mathcal{F}}^2 dx dz \\ &\quad + \frac{2}{m_T m_{\mathfrak{D}}} \int_T \int_{\mathfrak{D}} |\eta(z)|^2 \|\mathbf{Du}(z) - \mathbf{Du}(x)\|_{\mathcal{F}}^2 dx dz. \end{aligned}$$

Les inégalités (X.2) et (X.3) donnent

$$\left| \frac{1}{m_T} \int_T R_{\mathfrak{D}}^{\mathbf{u},\eta}(z) \tilde{\mathbf{n}}_T dz \right|^2 \leq \text{size}(\mathcal{T})^2 \frac{2C_{\eta}^2}{m_{\mathfrak{D}}} \int_{\mathfrak{D}} \|\mathbf{Du}(x)\|_{\mathcal{F}}^2 dx + \frac{2\bar{C}_{\eta}^2}{m_T m_{\mathfrak{D}}} \int_T \int_{\mathfrak{D}} \|\mathbf{Du}(z) - \mathbf{Du}(x)\|_{\mathcal{F}}^2 dx dz.$$

On applique le Lemme X.10 avec un diamant \mathfrak{D} et une face T

$$\frac{1}{m_{\mathfrak{D}} m_T} \int_T \int_{\mathfrak{D}} \|\mathbf{Du}(z) - \mathbf{Du}(x)\|_{\mathcal{F}}^2 dx dz \leq C \frac{d_{\mathfrak{D}}}{m_T} \int_{\mathfrak{D}} |\nabla(\mathbf{Du}(y))|^2 dy.$$

On remarque qu'on utilise une extension matricielle du Lemme X.10. Grâce à la relation (IX.4), il vient que

$$\sum_{\mathfrak{D} \in \mathfrak{D}} \sum_{T \in T_{\mathfrak{D}}} m_{\mathfrak{D}} \frac{1}{m_{\mathfrak{D}} m_T} \int_T \int_{\mathfrak{D}} \|\mathbf{Du}(z) - \mathbf{Du}(x)\|_{\mathcal{F}}^2 dx dz \leq C \text{size}(\mathcal{T})^2 \|\nabla \mathbf{u}\|_{H^1}^2.$$

Donc on obtient

$$\sum_{\mathfrak{D} \in \mathfrak{D}} \sum_{T \in T_{\mathfrak{D}}} m_{\mathfrak{D}} \left| \frac{1}{m_T} \int_T R_{\mathfrak{D}}^{\mathbf{u},\eta}(z) \tilde{\mathbf{n}}_T dz \right|^2 \leq C \text{size}(\mathcal{T})^2 \|\nabla \mathbf{u}\|_{H^1}^2. \quad \blacksquare$$

Maintenant on peut contrôler $R_{\mathfrak{D},T_{\mathfrak{D}}}^{\mathbf{u}}$ pour $T_{\mathfrak{D}} \in \{T_{\mathfrak{D}}^{\mathfrak{M}^P}, T_{\mathfrak{D}}^{\mathfrak{M}^V}, T_{\mathfrak{D}}^{\mathfrak{M}^{\mathcal{EF}}}\}$, comme suit.

Corollaire X.26

On suppose que η vérifie (X.2) et (X.3). Soit \mathcal{T} un maillage DDFV associé à Ω . Il existe une constante $C > 0$, dépendant uniquement de C_{reg} , C_{η} et \bar{C}_{η} , telle que pour toute fonction \mathbf{u} de $(H^2(\Omega))^3$, on a

$$\|R_{\mathfrak{D},T_{\mathfrak{D}}^{\mathfrak{M}^P}}^{\mathbf{u}}\|_2 + \|R_{\mathfrak{D},T_{\mathfrak{D}}^{\mathfrak{M}^V}}^{\mathbf{u}}\|_2 + \|R_{\mathfrak{D},T_{\mathfrak{D}}^{\mathfrak{M}^{\mathcal{EF}}}}^{\mathbf{u}}\|_2 \leq C \text{size}(\mathcal{T}) \|\nabla \mathbf{u}\|_{H^1}.$$

Démonstration : Pour $T_{\mathfrak{D}} \in \{T_{\mathfrak{D}}^{\mathfrak{M}^P}, T_{\mathfrak{D}}^{\mathfrak{M}^V}, T_{\mathfrak{D}}^{\mathfrak{M}^{\mathcal{EF}}}\}$, grâce à (X.39) et à l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on obtient

$$\sum_{\mathfrak{D} \in \mathfrak{D}} \sum_{T \in T_{\mathfrak{D}}} m_{\mathfrak{D}} |R_{\mathfrak{D},T}^{\mathbf{u}}|^2 \leq 3 \sum_{\mathfrak{D} \in \mathfrak{D}} \sum_{T \in T_{\mathfrak{D}}} m_{\mathfrak{D}} \left| \frac{1}{m_T} \int_T R_{\mathfrak{D}}^{\mathbf{u},\eta}(z) \tilde{\mathbf{n}}_T dz \right|^2 + 3 \sum_{\mathfrak{D} \in \mathfrak{D}} m_{\mathfrak{D}} |R_{\mathfrak{D}}^{\mathbf{u},\mathbf{Du}}|^2 + 3 \sum_{\mathfrak{D} \in \mathfrak{D}} m_{\mathfrak{D}} |R_{\mathfrak{D}}^{\mathbf{u},z}|^2.$$

On conclut en utilisant les Propositions X.23, X.24 et X.25. ■

X.8.2 Erreur de consistance $R_{\mathfrak{D},T_{\mathfrak{D}}}^p$ en pression

On contrôle $R_{\mathfrak{D},T_{\mathfrak{D}}}^p$ pour $T_{\mathfrak{D}} \in \{T_{\mathfrak{D}}^{\mathfrak{M}^P}, T_{\mathfrak{D}}^{\mathfrak{M}^V}, T_{\mathfrak{D}}^{\mathfrak{M}^{\mathcal{EF}}}\}$, comme suit.

Corollaire X.27

Soit \mathcal{T} un maillage DDFV associé à Ω . Il existe une constante $C > 0$, dépendant uniquement de $\text{reg}(\mathcal{T})$, telle que pour toute fonction p de $H^1(\Omega)$, on a

$$\|R_{\mathfrak{D}, T_{\mathfrak{D}}^{\mathfrak{M}^P}}^p\|_2 + \|R_{\mathfrak{D}, T_{\mathfrak{D}}^{\mathfrak{M}^V}}^p\|_2 + \|R_{\mathfrak{D}, T_{\mathfrak{D}}^{\mathfrak{M}^{\mathcal{E}}}}^p\|_2 \leq C \text{size}(\mathcal{T}) \|\nabla p\|_2.$$

Démonstration : Soit $T_{\mathfrak{D}} \in \{T_{\mathfrak{D}}^{\mathfrak{M}^P}, T_{\mathfrak{D}}^{\mathfrak{M}^V}, T_{\mathfrak{D}}^{\mathfrak{M}^{\mathcal{E}}}\}$. On applique le Lemme IV.14 sur une face T et sur un diamant \mathfrak{D} , pour $R_{\mathfrak{D}}^p(s)\vec{n}_T$ on a

$$\left| \frac{1}{m_T} \int_T R_{\mathfrak{D}}^p(z) \vec{n}_T dz \right|^2 \leq \frac{C d_{\mathfrak{D}}}{m_T} \int_{\mathfrak{D}} |\nabla R_{\mathfrak{D}}^p(z)|^2 dz + \frac{C}{d_{\mathfrak{D}} m_T} \int_{\mathfrak{D}} |R_{\mathfrak{D}}^p(z)|^2 dz.$$

Grâce à (IX.4) on a $\frac{m_{\mathfrak{D}} d_{\mathfrak{D}}}{m_T} \leq C \text{size}(\mathcal{T})^2$ et $\frac{m_{\mathfrak{D}}}{d_{\mathfrak{D}} m_T} \leq C$. On en déduit

$$\sum_{\mathfrak{D} \in \mathfrak{D}} \sum_{T \in T_{\mathfrak{D}}} m_{\mathfrak{D}} \left| R_{\mathfrak{D}, T}^p \right|^2 \leq C \text{size}(\mathcal{T})^2 \sum_{\mathfrak{D} \in \mathfrak{D}} \int_{\mathfrak{D}} |\nabla R_{\mathfrak{D}}^p(z)|^2 dz + C \sum_{\mathfrak{D} \in \mathfrak{D}} \int_{\mathfrak{D}} |R_{\mathfrak{D}}^p(z)|^2 dz.$$

On rappelle que $R_{\mathfrak{D}}^p(z) = \mathbb{P}_m^{\mathfrak{D}} p - p(z)$, ainsi $\nabla R_{\mathfrak{D}}^p(z) = \nabla p(z)$ et la Proposition X.15 impliquent

$$\sum_{\mathfrak{D} \in \mathfrak{D}} \sum_{T \in T_{\mathfrak{D}}} m_{\mathfrak{D}} \left| R_{\mathfrak{D}, T}^p \right|^2 \leq C \text{size}(\mathcal{T})^2 \|\nabla p\|_2^2.$$

■

X.8.3 Fin de la démonstration du Théorème X.22

Nous pouvons maintenant rassembler tous les résultats précédents en vue de conclure la démonstration du Théorème X.22, commencé au début de la section.

Démonstration : On a noté $\mathbf{e}^{\mathcal{T}} = \mathbb{P}_{\mathbf{c}}^{\mathcal{T}} \mathbf{u} - \mathbf{u}^{\mathcal{T}}$ et $e^{\mathfrak{D}} = \mathbb{P}_m^{\mathfrak{D}} p - p^{\mathfrak{D}}$, et obtenu l'estimation suivante (X.38)

$$\begin{aligned} \|\nabla^{\mathfrak{D}} \mathbf{e}^{\mathcal{T}}\|_2^2 + \|e^{\mathfrak{D}}\|_2^2 &\leq C (\|\nabla^{\mathfrak{D}} \mathbf{e}^{\mathcal{T}}\|_2 + \|e^{\mathfrak{D}}\|_2) \left(\sum_{T_{\mathfrak{D}} \in \{T_{\mathfrak{D}}^{\mathfrak{M}^P}, T_{\mathfrak{D}}^{\mathfrak{M}^V}, T_{\mathfrak{D}}^{\mathfrak{M}^{\mathcal{E}}}\}} (\|R_{\mathfrak{D}, T_{\mathfrak{D}}}^{\mathbf{u}}\|_2 + \|R_{\mathfrak{D}, T_{\mathfrak{D}}}^p\|_2) \right) \\ &\quad + C \text{size}(\mathcal{T}) (\|\mathbf{u}\|_{H^2} + \|\nabla p\|_2) (\|\nabla^{\mathfrak{D}} \mathbf{e}^{\mathcal{T}}\|_2 + \|e^{\mathfrak{D}}\|_2). \end{aligned}$$

Les Corollaires X.26 et X.27 impliquent

$$\|\nabla^{\mathfrak{D}} \mathbf{e}^{\mathcal{T}}\|_2 \leq C \text{size}(\mathcal{T}) \quad \text{et} \quad \|e^{\mathfrak{D}}\|_2 \leq C \text{size}(\mathcal{T}). \quad (\text{X.40})$$

Estimation de $\|\mathbf{u} - \mathbf{u}^{\mathcal{T}}\|_2$: On a

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}^{\mathcal{T}}\|_2 \leq \|\mathbf{u} - \mathbb{P}_{\mathbf{c}}^{\mathcal{T}} \mathbf{u}\|_2 + \|\mathbb{P}_{\mathbf{c}}^{\mathcal{T}} \mathbf{u} - \mathbf{u}^{\mathcal{T}}\|_2.$$

Le Lemme X.11 et l'inégalité de Poincaré (Théorème X.9) donnent

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}^{\mathcal{T}}\|_2 \leq C \text{size}(\mathcal{T}) \|\nabla \mathbf{u}\|_{H^1} + C \|\nabla^{\mathfrak{D}} \mathbb{P}_{\mathbf{c}}^{\mathcal{T}} \mathbf{u} - \nabla^{\mathfrak{D}} \mathbf{u}^{\mathcal{T}}\|_2.$$

Finalement, (X.40) conclut l'estimation de $\|\mathbf{u} - \mathbf{u}^{\mathcal{T}}\|_2$.

Estimation de $\|\nabla \mathbf{u} - \nabla^{\mathfrak{D}} \mathbf{u}^{\mathcal{T}}\|_2$: On a

$$\|\nabla \mathbf{u} - \nabla^{\mathfrak{D}} \mathbf{u}^{\mathcal{T}}\|_2 \leq \|\nabla \mathbf{u} - \nabla^{\mathfrak{D}} \mathbb{P}_{\mathbf{c}}^{\mathcal{T}} \mathbf{u}\|_2 + \|\nabla^{\mathfrak{D}} \mathbb{P}_{\mathbf{c}}^{\mathcal{T}} \mathbf{u} - \nabla^{\mathfrak{D}} \mathbf{u}^{\mathcal{T}}\|_2.$$

Finalement, le Lemme X.11 et (X.40) impliquent l'estimation de $\|\nabla \mathbf{u} - \nabla^{\mathfrak{D}} \mathbf{u}^{\mathcal{T}}\|_2$.

Estimation de $\|p - p^{\mathfrak{D}}\|_2$: On a

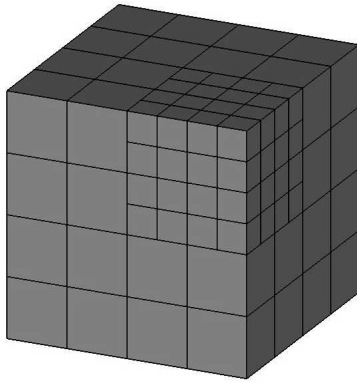
$$\|p - p^{\mathfrak{D}}\|_2 \leq \|p - \mathbb{P}_m^{\mathfrak{D}} p\|_2 + \|\mathbb{P}_m^{\mathfrak{D}} p - p^{\mathfrak{D}}\|_2.$$

On conclut grâce à la Proposition X.15 et (X.40). ■

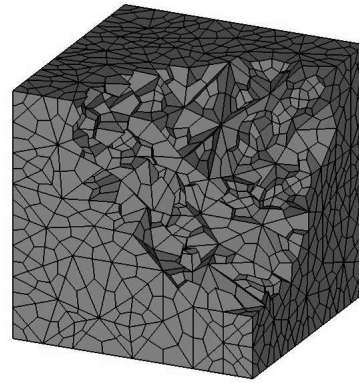
X.9 Tests numériques

On illustre les résultats théoriques par quelques résultats numériques obtenus sur le domaine $\Omega =]0, 1[^3$. Dans toutes les simulations numériques le paramètre de stabilisation est fixé à $\lambda = 10^{-3}$.

On considère deux familles de maillages 3D raffinés $\{(\mathcal{T}, \mathfrak{D})^i\}$ pour $i = 1, 2$ qui partionne le domaine Ω . La première famille de maillages $\mathfrak{M}^{\mathcal{P}, 1}$ est localement raffinée dans un des coins du domaine Ω . La seconde famille de maillages $\mathfrak{M}^{\mathcal{P}, 2}$ est formée par des mailles hexahédrales obtenues par une décomposition conforme d'un maillage sous-jacent tétraédrique généré par le logiciel *tetgen*. On remarque que dans ce cas, les maillages n'ont ni de structure particulière ni de caractéristiques de raffinement. Les deux Figures X.1(a) et X.1(b) illustrent les maillages \mathcal{P}_1 et \mathcal{P}_2 pour $\mathfrak{M}^{\mathcal{P}, i}$, $i = 1, 2$, tandis que dans le tableau X.1 nous indiquons les informations sur la taille des maillages utilisés dans nos calculs.



(a) Maillage \mathcal{P}_1



(b) Maillage \mathcal{P}_2

FIG. X.1 – Les figures (a)-(b) montrent les ensembles des polyèdres \mathcal{P}^1 et \mathcal{P}^2 des deux familles de maillages $(\mathcal{T}, \mathfrak{D})^1$ et $(\mathcal{T}, \mathfrak{D})^2$. Dans la figure (b), une partie des mailles autour du sommet $(1, 1, 1)$ a été enlevée pour mieux visualiser la structure des mailles.

Sur les familles de maillages raffinés $\mathfrak{M}^{\mathcal{P}, i}$, on résout le problème de Stokes stationnaire (X.1) avec la viscosité donnée par

$$\eta(x, y, z) = 1 + x^2 + y^2 + z^2 \quad \forall (x, y, z) \in \Omega.$$

Les conditions aux bords, qui sont explicitement introduites dans le schéma par la prise en compte de ces valeurs par les inconnues de $\mathbf{u}^{\mathcal{T}}$ situées sur le bord, et le terme source \mathbf{f} sont considérés en conformité avec la solution exacte :

$$\mathbf{u}(x, y, z) = \begin{pmatrix} \alpha_1 \sin(2\pi x) \cos(2\pi y) \cos(2\pi z) \\ \alpha_2 \cos(2\pi x) \sin(2\pi y) \cos(2\pi z) \\ \alpha_3 \cos(2\pi x) \cos(2\pi y) \sin(2\pi z) \end{pmatrix} \quad \text{avec } \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0,$$

$$p(x, y, z) = \sin(2\pi x) \sin(2\pi y) \sin(2\pi z).$$

TAB. X.1 – Paramètres des maillages utilisés : n est le niveau de raffinement, $N_{\mathcal{P}}$ est le nombre de polyèdres, $N_{\mathcal{F}}$ est le nombre de faces, $N_{\mathcal{E}}$ est le nombre d'arêtes, $N_{\mathcal{V}}$ est le nombre de sommets, $N_{\mathcal{D}}$ est le nombre de diamants, $\text{size}(\mathcal{T})$ est le pas du maillage.

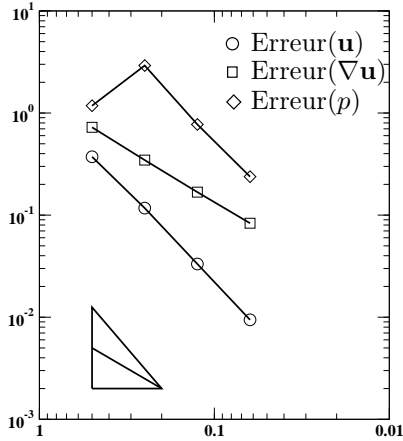
Maillage	n	$N_{\mathcal{P}}$	$N_{\mathcal{F}}$	$N_{\mathcal{E}}$	$N_{\mathcal{V}}$	$N_{\mathcal{D}}$	$\text{size}(\mathcal{T})$
$\mathfrak{M}^{\mathcal{P},1}$	0	120	444	546	223	945	$2.500 \cdot 10^{-1}$
	1	960	3216	3588	1333	5811	$1.250 \cdot 10^{-1}$
	2	7680	24384	25800	9097	40275	$6.250 \cdot 10^{-2}$
	3	32768	101376	104544	35937	298581	$3.125 \cdot 10^{-2}$
$\mathfrak{M}^{\mathcal{P},2}$	0	176	600	698	275	2400	$5.000 \cdot 10^{-1}$
	1	888	2865	3153	1177	11460	$2.706 \cdot 10^{-1}$
	2	11444	35451	37495	13489	141804	$1.277 \cdot 10^{-1}$
	3	61440	189696	195216	66961	1150428	$6.487 \cdot 10^{-2}$

Les erreurs d'approximation relative sont alors définies comme suit

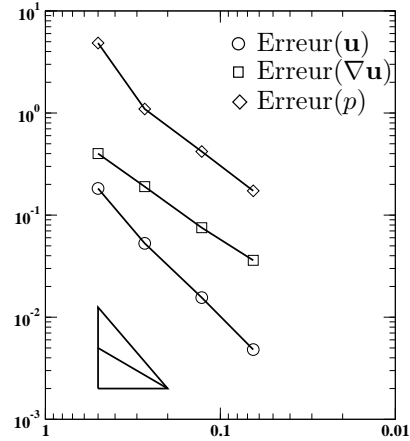
$$\text{Erreur}(\mathbf{u}) = \frac{\|\mathbb{P}_{\mathcal{C}}^{\tau} \mathbf{u} - \mathbf{u}^{\tau}\|_2}{\|\mathbb{P}_{\mathcal{C}}^{\tau} \mathbf{u}\|_2}, \quad (\text{X.41})$$

$$\text{Erreur}(\nabla \mathbf{u}) = \frac{\|\nabla^{\mathcal{D}} \mathbb{P}_{\mathcal{C}}^{\tau} \mathbf{u} - \nabla^{\mathcal{D}} \mathbf{u}^{\tau}\|_2}{\|\nabla^{\mathcal{D}} \mathbb{P}_{\mathcal{C}}^{\tau} \mathbf{u}\|_2}, \quad (\text{X.42})$$

$$\text{Erreur}(p) = \frac{\|\mathbb{P}_{m\mathcal{D}}^{\mathcal{D}} p - p^{\mathcal{D}}\|_2}{\|\mathbb{P}_{m\mathcal{D}}^{\mathcal{D}} p\|_2}. \quad (\text{X.43})$$



(a) Les erreurs sur le maillage $(\mathcal{T}, \mathcal{D})^1$



(b) Les erreurs sur le maillage $(\mathcal{T}, \mathcal{D})^2$

FIG. X.2 – Les erreurs d'approximation relatives en fonction du pas du maillage $\text{size}(\mathcal{T})$. (A gauche) pour le maillage $(\mathcal{T}, \mathcal{D})^1$. (A droite) pour le maillage $(\mathcal{T}, \mathcal{D})^2$. Les deux lignes droites en bas à gauche des figures montrent les pentes théoriques $\mathcal{O}(\text{size}(\mathcal{T}))$ et $\mathcal{O}(\text{size}(\mathcal{T})^2)$.

La Figure X.2 montre les erreurs relatives définies par (X.41)-(X.43) pour les approximations numériques de \mathbf{u} , $\nabla \mathbf{u}$, et p utilisant les maillages $(\mathcal{T}, \mathcal{D})^1$ (voir la Figure X.2(a)) et $(\mathcal{T}, \mathcal{D})^2$ (voir la Figure X.2(b)). Le bon comportement de convergence du schéma est représenté par les pentes des courbes d'erreurs, qui sont à comparer avec l'ordre théorique $\mathcal{O}(\text{size}(\mathcal{T}))$ et $\mathcal{O}(\text{size}(\mathcal{T})^2)$ pentes signalées dans le coin en bas à gauche de chaque figure. En particulier, l'ordre 2 semble caractériser les courbes d'erreur pour la vitesse et la pression de la figure de gauche, c'est-à-dire quand les calculs sont réalisés avec le maillage localement raffiné $(\mathcal{T}, \mathcal{D})^1$.

L'ordre de convergence pour la vitesse et la pression de la figure de droite semble lui-aussi un peu meilleur que 1, l'ordre théorique prédit par le Théorème X.22. On a ainsi une super-convergence de la vitesse en norme L^2 comme en 2D. En ce qui concerne le gradient de vitesse, la Figure X.2 montre un taux de convergence linéaire, ceci est parfaitement en accord avec l'ordre théorique.

X.10 Conclusions et perspectives

Dans ce chapitre, on a présenté un schéma DDFV stabilisé (X.14) bien posé pour des maillages 3D généraux pour le problème de Stokes avec une viscosité régulière sur tout le domaine et des conditions aux bord de type Dirichlet. On a établi une estimation d'erreur d'ordre 1 pour la vitesse, le gradient de vitesse et pour la pression en norme L^2 grâce à la stabilisation de type Brezzi-Pitkäranta.

Dans le cas où la viscosité est discontinue, on a vu dans le Chapitre VII que le schéma doit prendre en compte ces discontinuités pour surmonter la perte de consistance des contraintes à l'interface. Ce travail pourrait être généralisé aux domaines 3D. En perspective, on pourrait également s'intéresser à la généralisation 3D du schéma pour les équations de Navier-Stokes vu au Chapitre VIII.

Conclusions et perspectives

En conclusion, j'ai développé et analysé dans ce mémoire des méthodes DDFV pour approcher différents écoulements : écoulements d'un fluide en régime permanent dans un milieu poreux hétérogène dans la première partie et écoulements visqueux dans les deux dernières parties. Les méthodes DDFV utilisées ont la particularité de permettre un large choix de maillages grâce à la reconstruction du gradient discret sur tout le domaine. Le benchmark [HH08b] fait ressortir que la méthode DDFV 2D est une méthode d'ordre 1 compétitive en ce qui concerne la précision des gradients.

Dans le Chapitre II, on a présenté un schéma DDFV, pour le problème de diffusion anisotrope avec des conditions aux bords mixtes de type Dirichlet/Fourier, dont l'ordre de convergence théorique est 1 même lorsque le tenseur de diffusion anisotrope est discontinu. Numériquement, on a même obtenu une super-convergence en norme L^2 . On a utilisé dans le Chapitre III les schémas développés dans le Chapitre II pour écrire des algorithmes de Schwarz DDFV sans recouvrement. L'algorithme de Schwarz que nous avons obtenu converge vers la solution du schéma DDFV sur tout le domaine. Ceci nous permet d'utiliser quelques itérations de cet algorithme comme préconditionneur de la méthode de gradient conjugué plutôt que comme un solveur itératif direct dont la convergence est assez lente. Les conditions de transmission considérées ici sont de type Fourier, elles seront comparées aux conditions d'ordre 2 optimisées, appelées Ventcell dans la littérature, comme cela a été fait dans [HH08a] pour la méthode volumes finis à deux points. Un travail en cours propose un schéma DDFV pour les problèmes de diffusion anisotrope avec des conditions mixtes de type Dirichlet/Ventcell afin de faire ces comparaisons. L'une des premières difficultés est de généraliser dans le cadre DDFV ces conditions d'ordre 2 aux problèmes de diffusion anisotrope.

Dans la seconde partie, on s'est intéressé à la discrétisation du problème de Stokes en 2D. Le cas de la viscosité constante est traité dans le Chapitre V, ensuite le cas de la viscosité dépendant de la variable spatiale de manière régulière est traité dans le Chapitre VI. Dans tous les cas, le schéma DDFV est un schéma stabilisé bien posé pour des maillages généraux. On a obtenu pour chacun de ces schémas des estimations d'erreur d'ordre 1 pour la vitesse, le gradient de vitesse et pour la pression en norme L^2 . Dans le Chapitre VII, on a autorisé la viscosité à présenter des discontinuités. On suppose dans cette étude que les discontinuités soient identifiées de sorte que le maillage soit compatible avec les sauts de la viscosité. On ne peut donc pas encore prendre en compte des interfaces immergées. On a mis en évidence le fait que la discontinuité de la viscosité doit absolument être prise en compte par le schéma pour surmonter la perte de consistance des contraintes à l'interface. C'est ce que l'on a fait avec l'approche m-DDFV qui prend en compte les sauts de la viscosité et de la pression. On a montré que ce schéma était bien posé pour des maillages généraux. On a obtenu une estimation d'erreur d'ordre 1 pour la vitesse, le gradient de vitesse et pour la pression en norme L^2 grâce à la stabilisation de type Brezzi-Pitkäranta qui prend en compte les sauts de pression.

Tous les résultats obtenus pour les schémas DDFV pour le problème de Stokes peuvent s'étendre au problème de Stokes généralisé, c'est-à-dire avec un terme en vitesse supplémentaire dans le bilan de quantité de mouvement.

Dans un travail en cours, je me suis intéressée au problème de Navier-Stokes avec une viscosité régulière sur tout le domaine et des conditions aux bord de type Dirichlet. Un schéma DDFV bien posé pour des maillages généraux est présenté et des premières estimations d'énergie sont établies. L'étude de ce schéma reste à compléter par l'établissement de la convergence du schéma et par des tests numériques.

Dans la dernière partie, on a généralisé au cas 3D le problème de Stokes avec une viscosité régulière. Comme en 2D, le schéma DDFV est stabilisé et bien posé pour des maillages 3D généraux. On a établi une estimation d'erreur d'ordre 1 pour la vitesse, le gradient de vitesse et pour la pression en norme L^2 .

Les perspectives de ce travail sont nombreuses. Outre celles présentées plus haut, on peut remarquer que les paramètres de stabilisation qui pénalisent les oscillations de la pression, sont uniformes dans tout le domaine de calcul, on pourrait envisager d'utiliser une stabilisation par cluster. Le principe consiste à regrouper un certain nombre de volumes de contrôle voisins dans un élément appelé cluster et on empêche les oscillations de la pression seulement sur les arêtes intérieures de chaque cluster, comme dans [EHLP07, EHLP09]. Pour les écoulements visqueux, toutes nos études ont considéré des conditions aux bords de type Dirichlet. On pourrait maintenant considérer des conditions aux limites en contrainte par exemple ou des sauts de contrainte dans le système (tension de surface). L'écriture du schéma DDFV correspondant est facile grâce aux opérateurs discrets déjà étudiés. Néanmoins, l'étude de ce schéma reste quant à elle assez délicate, elle repose sur une généralisation de l'inégalité de Korn, lorsque $\mathbf{u}^\mathcal{T}$ n'appartient plus à \mathbb{E}_0 , qui n'est pas encore établie.

On peut remarquer que dans ce manuscrit on a étudié uniquement des estimations *a priori*, on pourrait faire des estimations *a posteriori* comme dans [OPR09] pour le problème de Laplace ou dans un travail de P. Omnès en cours pour le problème de Stokes.

Une autre perspective pourrait être de considérer des fluides non-Newtoniens. Pour de tels fluides, la loi de viscosité est non-linéaire ; elle dépend du tenseur des taux de déformation \mathbf{Du} et de la variable x . *A priori*, les méthodes DDFV constituent un cadre approprié pour ce genre de problème (voir les modèles de Leray-Lions dans [BH08]). On pourra également adapter l'approche m-DDFV aux équations d'élasticité. Dans ce cas, on connaît les caractéristiques des matériaux mis en jeu et ainsi on sait identifier les interfaces de discontinuité.

Bien sûr, l'extension des différents travaux de ce manuscrit au cas 3D est à poursuivre, comme par exemple pour les équations de Navier-Stokes ou le problème de Stokes avec une viscosité discontinue, ou bien encore pour les algorithmes de Schwarz sans recouvrement.

Annexe

Notations générales sur les maillages 2D (page 31-36)

Symbole	Description	Symbole	Description
\mathcal{T}	Maillage DDFV	$\text{reg}(\mathcal{T})$	Régularité géométrique d'un maillage \mathcal{T}
\mathfrak{M}	Maillage primal intérieur	\mathfrak{M}^*	Maillage dual intérieur
$\partial\mathfrak{M}$	Maillage primal du bord	$\partial\mathfrak{M}^*$	Maillage dual du bord
κ	Maille primale	κ^*	Maille duale
m_κ	Mesure de la maille κ	m_{κ^*}	Mesure de la maille κ^*
x_κ	Centre de la maille κ	x_{κ^*}	Centre de la maille κ^*
\mathcal{E}_κ	Ensemble des arêtes de κ	\mathcal{E}_{κ^*}	Ensemble des arêtes de κ^*
\mathfrak{D}_κ	Diamant intersectant la maille κ	\mathfrak{D}_{κ^*}	Diamant intersectant la maille κ^*
\vec{n}_κ	Normale extérieure à κ	\vec{n}_{κ^*}	Normale extérieure à κ^*
d_κ	Diamètre de κ	d_{κ^*}	Diamètre de κ^*
B_κ	Boule $(x_\kappa, \rho_\kappa) \cap \partial\Omega \subset \kappa$	B_{κ^*}	Boule $(x_{\kappa^*}, \rho_{\kappa^*}) \cap \partial\Omega \subset \kappa^*$
m_{B_κ}	Longueur de B_κ	$m_{B_{\kappa^*}}$	Longueur de B_{κ^*}
σ	Arête primale	σ^*	Arête duale
m_σ	Longueur de l'arête σ	m_{σ^*}	Longueur de σ^*
\mathcal{E}	Ensemble des arêtes primales	\mathcal{E}^*	Ensemble des arêtes duales
\mathcal{E}_{int}	Ensemble des arêtes primales intérieurs	\mathcal{E}_{ext}	Ensemble des arêtes primales du bord
\mathfrak{D}	Maillage diamant	$\mathcal{D} = \mathcal{D}_{\sigma, \sigma^*}$	Diamant
x_σ	Milieu de l'arête σ	$x_{\mathcal{D}}$	Centre du diamant \mathcal{D}
$m_{\mathcal{D}}$	Mesure du diamant \mathcal{D}	$d_{\mathcal{D}}$	Diamètre du diamant \mathcal{D}
$\vec{n}_{\sigma\kappa}$	Normale unitaire à σ sortante de κ	$\vec{n}_{\sigma^*\kappa^*}$	Normale unitaire à σ^* sortante de κ^*
$\vec{\tau}_{\kappa^*, \mathcal{L}^*}$	Tangente unitaire à σ orientée de κ^* à \mathcal{L}^*	$\vec{\tau}_{\kappa, \mathcal{L}}$	Tangente unitaire à σ^* orientée de κ à \mathcal{L}
$\alpha_{\mathcal{D}}$	Angle entre σ et σ^*	\mathfrak{s}	Côtés d'un diamant \mathcal{D}
$\mathcal{E}_{\mathcal{D}}$	Ensemble des côtés intérieurs de \mathcal{D}	\mathfrak{S}	Réunion de tous les $\mathcal{E}_{\mathcal{D}}$
$m_{\mathfrak{s}}$	Longueur d'un côté \mathfrak{s}	$\vec{n}_{\mathfrak{s}\mathcal{D}}$	Normale unitaire à \mathfrak{s} sortant de \mathcal{D}
σ_κ	Segment $[x_\kappa, x_{\mathcal{D}}]$	σ_{κ^*}	Segment $[x_{\kappa^*}, x_{\mathcal{D}}]$
$\sigma_{\mathcal{L}}$	Segment $[x_{\mathcal{D}}, x_{\mathcal{L}}]$	$\sigma_{\mathcal{L}^*}$	Segment $[x_{\mathcal{D}}, x_{\mathcal{L}^*}]$
α_κ	Angle entre σ_κ et σ	$\alpha_{\mathcal{L}}$	Angle entre $\sigma_{\mathcal{L}}$ et σ
$\vec{n}_{\sigma\kappa\kappa^*}$	Normale unitaire à σ_κ sortante de x_{κ^*}	$\vec{n}_{\sigma_{\mathcal{L}}\kappa^*}$	Normale unitaire à $\sigma_{\mathcal{L}}$ sortante de x_{κ^*}
$\vec{\tau}_{\sigma\kappa\kappa^*}$	Tangente unitaire à σ_κ orientée de x_κ à $x_{\mathcal{D}}$	$\vec{\tau}_{\sigma_{\mathcal{L}}\kappa^*}$	Tangente unitaire à $\sigma_{\mathcal{L}}$ orientée de $x_{\mathcal{D}}$ à $x_{\mathcal{L}}$
\mathfrak{D}_{ext}	Ensemble des diamants du bord	\mathfrak{D}_{int}	Ensemble des diamants intérieurs
$d_{\kappa^*, \mathcal{L}}$	Distance entre x_{κ^*} et $x_{\mathcal{L}}$	$d_{\mathcal{L}^*, \mathcal{L}}$	Distance entre $x_{\mathcal{L}^*}$ et $x_{\mathcal{L}}$
$\tilde{\mathfrak{D}}$	Ensemble des demi-diamants	$\tilde{\mathcal{D}}$	Demi-diamants
$\tilde{\mathcal{D}}_\kappa$	Demi-diamants intersectant κ	$\tilde{\mathcal{D}}_{\mathcal{L}}$	Demi-diamants intersectant \mathcal{L}
$m_{\tilde{\mathcal{D}}}$	Mesure d'un demi-diamants	$\tilde{\mathfrak{D}}_{\mathcal{D}}$	Ensemble des $\tilde{\mathcal{D}}$ intersectant \mathcal{D}
\mathfrak{Q}	Ensemble des quarts de diamant	\mathfrak{Q}	Quart de diamant
$\mathfrak{Q}_{\kappa, \kappa^*}$	\mathfrak{Q} de sommet x_κ, x_{κ^*} et $x_{\mathcal{D}}$	$\mathfrak{Q}_{\kappa, \mathcal{L}^*}$	\mathfrak{Q} de sommet $x_\kappa, x_{\mathcal{L}^*}$ et $x_{\mathcal{D}}$
$\mathfrak{Q}_{\mathcal{L}, \kappa^*}$	\mathfrak{Q} de sommet $x_{\mathcal{L}}, x_{\kappa^*}$ et $x_{\mathcal{D}}$	$\mathfrak{Q}_{\mathcal{L}, \mathcal{L}^*}$	\mathfrak{Q} de sommet $x_{\mathcal{L}}, x_{\mathcal{L}^*}$ et $x_{\mathcal{D}}$
$x_{\mathfrak{Q}}$	Barycentre de \mathfrak{Q}	$m_{\mathfrak{Q}}$	Mesure de \mathfrak{Q}
$d_{\mathfrak{Q}}$	Diamètre de \mathfrak{Q}	$\mathfrak{Q}_{\mathcal{D}}$	Ensemble des \mathfrak{Q} du diamant \mathcal{D}

Notations générales de la Partie 1

Symbole	Description	Page
u_κ	Inconnue sur la maille κ	37
u_{κ^*}	Inconnue sur la maille κ^*	37
u^τ	Inconnues u_κ pour tout $\kappa \in (\mathfrak{M} \cup \partial\mathfrak{M})$ et u_{κ^*} pour tout $\kappa^* \in (\mathfrak{M}^* \cup \partial\mathfrak{M}^*)$	37
\mathbb{R}^τ	Ensemble des inconnues u^τ	37
$\mathbb{P}_m^{\partial\Omega} v$	Projection moyenne sur B_κ pour tout $\kappa \in \partial\mathfrak{M}$ et sur B_{κ^*} pour tout $\kappa^* \in \partial\mathfrak{M}^*$	37
$\mathbb{P}_m^{\mathfrak{M}} v$	Projection moyenne sur κ pour tout $\kappa \in \mathfrak{M}$	37
$\mathbb{P}_m^{\mathfrak{M}^*} v$	Projection moyenne sur κ^* pour tout $\kappa^* \in \mathfrak{M}^*$	37
$\mathbb{P}_m^\tau v$	$(\mathbb{P}_m^{\mathfrak{M}} v, \mathbb{P}_m^{\mathfrak{M}^*} v, \mathbb{P}_m^{\partial\Omega} v)$	37
\mathbb{P}_c^τ	Projection centrée sur κ pour tout $\kappa \in \mathfrak{M} \cup \partial\mathfrak{M}$ et sur κ^* pour tout $\kappa^* \in \mathfrak{M}^* \cup \partial\mathfrak{M}^*$	37
\mathbb{E}_0	Sous-ensemble de \mathbb{R}^τ avec $u_\kappa = 0 \ \forall \kappa \in \partial\mathfrak{M}$ et $u_{\kappa^*} = 0 \ \forall \kappa^* \in \partial\mathfrak{M}^*$	37
\mathbb{E}_g	Sous-ensemble de \mathbb{R}^τ avec $u_\kappa = (\mathbb{P}_m^{\partial\Omega} g)_\kappa \ \forall \kappa \in \partial\mathfrak{M}$ et $u_{\kappa^*} = (\mathbb{P}_m^{\partial\Omega} g)_{\kappa^*} \ \forall \kappa^* \in \partial\mathfrak{M}^*$	37
$\mathfrak{P}_{m,g}$	Opérateur de projection de $\mathbb{R}^\tau \rightarrow \mathbb{E}_g$	37
$(\mathbb{R}^2)^\mathfrak{D}$	Ensemble de vecteurs de \mathbb{R}^2 définis par diamant \mathfrak{D}	37
$\nabla^\mathfrak{D}$	Opérateur gradient discret de $\mathbb{R}^\tau \rightarrow (\mathbb{R}^2)^\mathfrak{D}$	37
$\nabla^\mathfrak{D} u^\tau$	Gradient discret de u^τ sur le diamant \mathfrak{D}	37
div^τ	Opérateur divergence discrète de $(\mathbb{R}^2)^\mathfrak{D} \rightarrow \mathbb{R}^\tau$	38
$\text{div}^\mathfrak{M}$	Divergence discrète sur \mathfrak{M}	38
$\text{div}^{\partial\mathfrak{M}}$	Divergence discrète sur $\partial\mathfrak{M}$	38
$\text{div}^{\mathfrak{M}^*}$	Divergence discrète sur \mathfrak{M}^*	38
$\text{div}^{\partial\mathfrak{M}^*}$	Divergence discrète sur $\partial\mathfrak{M}^*$	38
$\text{div}^\kappa \xi^\mathfrak{D}$	Divergence discrète de $\xi^\mathfrak{D}$ sur la maille κ	38
$\text{div}^{\kappa^*} \xi^\mathfrak{D}$	Divergence discrète de $\xi^\mathfrak{D}$ sur la maille κ^*	38
γ^τ	Opérateur de trace de $\mathbb{R}^\tau \rightarrow \mathbb{R}^{\partial\mathfrak{M}}$	38
$\gamma_\sigma(u^\tau)$	$\frac{d_{\kappa^*,\mathcal{L}}(u_{\kappa^*} + u_\mathcal{L}) + d_{\mathcal{L}^*,\mathcal{L}}(u_{\mathcal{L}^*} + u_\mathcal{L})}{2m_\sigma}$ si $\sigma = [x_{\kappa^*}, x_{\mathcal{L}^*}]$	38
$\gamma_{\kappa^*,\mathcal{L}}(u^\tau)$	$\frac{u_{\kappa^*} + u_\mathcal{L}}{2}$	49
$\gamma^\mathfrak{D}$	Opérateur de trace de $\mathbb{R}^\mathfrak{D} \rightarrow \mathbb{R}^{\mathfrak{D}_{ext}}$	38
$[v^\tau, u^\tau]_\tau$	$\frac{1}{2} \sum_{\kappa \in \mathfrak{M}} m_\kappa u_\kappa v_\kappa + \frac{1}{2} \sum_{\kappa^* \in \mathfrak{M}^* \cup \partial\mathfrak{M}^*} m_{\kappa^*} u_{\kappa^*} v_{\kappa^*}$ pour tout $u^\tau, v^\tau \in \mathbb{R}^\tau$	39
$(\phi^\mathfrak{D}, v^\tau)_{\partial\Omega}$	$\sum_{\mathfrak{D}_{\sigma,\sigma^*} \in \mathfrak{D}_{ext}} m_\sigma \phi^\mathfrak{D} v_\sigma$ pour tout $\phi^\mathfrak{D} \in \mathbb{R}^{\mathfrak{D}_{ext}}$ et $v^\tau \in \mathbb{R}^{\partial\mathfrak{M}}$	39
$(\xi^\mathfrak{D}, \phi^\mathfrak{D})_\mathfrak{D}$	$\sum_{\mathfrak{D} \in \mathfrak{D}} m_\mathfrak{D} \xi^\mathfrak{D} \cdot \phi^\mathfrak{D}$ pour tout $\xi^\mathfrak{D}, \phi^\mathfrak{D} \in (\mathbb{R}^2)^\mathfrak{D}$	39
$\ u^\tau\ _2$	$[u^\tau, u^\tau]_\tau^{\frac{1}{2}}$ pour tout $u^\tau \in \mathbb{R}^\tau$	39
$\ \xi^\mathfrak{D}\ _2$	$(\xi^\mathfrak{D}, \xi^\mathfrak{D})_\mathfrak{D}^{\frac{1}{2}}$ pour tout $\xi^\mathfrak{D} \in (\mathbb{R}^2)^\mathfrak{D}$	39

Notations spécifiques au Chapitre II

Symbole	Description	Page
$\nabla^{\tilde{\mathcal{D}}}$	Opérateur gradient discret sur les demi-diamants de $\mathbb{R}^T \rightarrow (\mathbb{R}^2)^{\tilde{\mathcal{D}}}$	44
$\nabla^{\tilde{\mathcal{D}}} u^T$	Gradient discret de u^T sur le demi-diamant $\tilde{\mathcal{D}}$	44
$A_{\tilde{\mathcal{D}}}$	Matrice définie positive qui approche A sur le demi-diamant $\tilde{\mathcal{D}}$	44
u_{σ}	Inconnue sur l'arête σ	45
$\mathcal{A}^{\mathcal{D}}(\nabla^{\tilde{\mathcal{D}}})$	Opérateur de flux numérique de $\mathbb{R}^T \rightarrow (\mathbb{R}^2)^{\mathcal{D}}$	45
$\mathcal{A}_{\mathcal{D}}(\nabla^{\tilde{\mathcal{D}}} u^T)$	Flux numérique de u^T sur le diamant \mathcal{D}	45
$\partial \mathfrak{M}_D$	Maillage primal du bord Dirichlet	48
$\partial \mathfrak{M}_D^*$	Maillage dual du bord Dirichlet	48
$\partial \mathfrak{M}_F$	Maillage primal du bord Fourier	48
$\partial \mathfrak{M}_F^*$	Maillage dual du bord Fourier	48
$\partial \mathfrak{A}_F$	Ensemble des demi-arêtes du bord Fourier	49
\mathfrak{D}_{Γ}	Ensemble de $\mathcal{D}_{\sigma, \sigma^*}$ tel que $\sigma \subset \Gamma$	49
$\mathbb{E}_0^{\mathcal{D}}$	Sous-ensemble de \mathbb{R}^T avec $u_{\kappa} = 0 \ \forall \kappa \in \partial \mathfrak{M}_D$ et $u_{\kappa^*} = 0 \ \forall \kappa^* \in \partial \mathfrak{M}_D^*$	48
$\mathbb{E}_g^{\mathcal{D}}$	Sous-ensemble de \mathbb{R}^T avec $u_{\kappa} = (\mathbb{P}_m^{\partial \Omega} g)_{\kappa} \ \forall \kappa \in \partial \mathfrak{M}_D$ et $u_{\kappa^*} = (\mathbb{P}_m^{\partial \Omega} g)_{\kappa^*} \ \forall \kappa^* \in \partial \mathfrak{M}_D^*$	48
$\mathfrak{P}_{m,g}^{\mathcal{D}}$	Opérateur de projection de $\mathbb{R}^T \rightarrow \mathbb{E}_g^{\mathcal{D}}$	49
$\varphi_{\kappa^*, \mathcal{L}}$	Inconnue de flux sur la demi-arête $[x_{\kappa^*}, x_{\mathcal{L}}]$ du bord Fourier	49
$\varphi_{\mathcal{L}^*, \mathcal{L}}$	Inconnue de flux sur la demi-arête $[x_{\mathcal{L}^*}, x_{\mathcal{L}}]$ du bord Fourier	49
φ^T	Inconnue de flux $\varphi_{\kappa^*, \mathcal{L}}$ et $\varphi_{\mathcal{L}^*, \mathcal{L}}$ pour tout $\mathcal{L} = [x_{\kappa^*}, x_{\mathcal{L}^*}] \in \partial \mathfrak{M}_{\Gamma}$	49
Φ^T	Ensemble des inconnues φ^T	49
M_{σ}	$\frac{d_{\kappa^*, \mathcal{L}} d_{\mathcal{L}^*, \mathcal{L}}}{m_{\sigma}}$, si σ est l'arête de $[x_{\kappa^*}, x_{\mathcal{L}^*}]$	50
$\tilde{\mathcal{D}}_{\kappa}$	Ensemble des demi-diamants inclus dans la maille primale κ	53
$\tilde{\mathcal{D}}_{\kappa^*}$	Ensemble des demi-diamants $\tilde{\mathcal{D}}$ tels que $\tilde{\mathcal{D}} \cap \kappa^* \neq \emptyset$	54
$\tilde{\mathcal{D}}_{\Gamma}$	Ensemble des demi-diamants dont un côté appartient à Γ	56

Notations spécifiques à la Partie 2

Symbole	Description	Page
\mathbf{u}_κ	Vecteur inconnu de \mathbb{R}^2 sur la maille κ	99
\mathbf{u}_{κ^*}	Vecteur inconnu de \mathbb{R}^2 sur la maille κ^*	99
\mathbf{u}^τ	Vecteurs inconnus \mathbf{u}_κ pour tout $\kappa \in (\mathfrak{M} \cup \partial\mathfrak{M})$ et \mathbf{u}_{κ^*} pour tout $\kappa^* \in (\mathfrak{M}^* \cup \partial\mathfrak{M}^*)$	99
$(\mathbb{R}^2)^\tau$	Ensemble des inconnues \mathbf{u}^τ en vitesse	99
$p^\mathcal{D}$	Inconnue sur le diamant \mathcal{D}	99
$p^\mathfrak{D}$	Inconnue $p^\mathfrak{D}$ pour tout $\mathfrak{D} \in \mathfrak{D}$	99
$\mathbb{R}^\mathfrak{D}$	Ensemble des inconnues $p^\mathfrak{D}$ en pression	99
$\mathbb{P}_m^{\partial\Omega}$	Projection moyenne sur B_κ pour tout $\kappa \in \partial\mathfrak{M}$ et sur B_{κ^*} pour tout $\kappa^* \in \partial\mathfrak{M}^*$	99
$\mathbb{P}_m^{\mathfrak{M}}$	Projection moyenne sur κ pour tout $\kappa \in \mathfrak{M}$	99
$\mathbb{P}_m^{\mathfrak{M}^*}$	Projection moyenne sur κ^* pour tout $\kappa^* \in \mathfrak{M}^*$	99
$\mathbb{P}_m^\tau \mathbf{v}$	$(\mathbb{P}_m^{\mathfrak{M}} \mathbf{v}, \mathbb{P}_m^{\mathfrak{M}^*} \mathbf{v}, \mathbb{P}_m^{\partial\Omega} \mathbf{v})$ pour tout $\mathbf{v} \in (H^2(\Omega))^2$	100
\mathbb{P}_c^τ	Projection centrée sur κ pour tout $\kappa \in \mathfrak{M} \cup \partial\mathfrak{M}$ et sur κ^* pour tout $\kappa^* \in \mathfrak{M}^* \cup \partial\mathfrak{M}^*$	100
$\mathbb{P}_m^\mathcal{D}$	Projection moyenne sur \mathcal{D} pour tout $\mathcal{D} \in \mathfrak{D}$	100
\mathbb{P}_m^Ω	Projection moyenne sur \mathcal{Q} pour tout $\mathcal{Q} \in \Omega$	100
\mathbb{E}_0	Sous-ensemble de $(\mathbb{R}^2)^\tau$ avec $u_\kappa = 0 \ \forall \kappa \in \partial\mathfrak{M}$ et $u_{\kappa^*} = 0 \ \forall \kappa^* \in \partial\mathfrak{M}^*$	100
\mathbb{E}_g	Sous-ensemble de $(\mathbb{R}^2)^\tau$ avec $u_\kappa = (\mathbb{P}_m^{\partial\Omega} g)_\kappa \ \forall \kappa \in \partial\mathfrak{M}$ et $u_{\kappa^*} = (\mathbb{P}_m^{\partial\Omega} g)_{\kappa^*} \ \forall \kappa^* \in \partial\mathfrak{M}^*$	100
$\mathfrak{P}_{m,g}$	Opérateur de projection de $(\mathbb{R}^2)^\tau \rightarrow \mathbb{E}_g$	100
$\mathfrak{P}_g^{\partial\mathfrak{M}}$	Opérateur de projection : $((\mathbf{u}_\kappa)_{\kappa \in \mathfrak{M}}, (\mathbf{g}_\sigma)_{\sigma \in \partial\mathfrak{M}}, (\mathbf{u}_{\kappa^*})_{\kappa^* \in \mathfrak{M}^* \cup \partial\mathfrak{M}^*})$	100
$(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}))^\mathfrak{D}$	Ensemble de matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ définies par diamant \mathcal{D}	100
$\nabla^\mathfrak{D}$	Opérateur gradient discret de $(\mathbb{R}^2)^\tau \rightarrow (\mathcal{M}_2(\mathbb{R}))^\mathfrak{D}$	100
$\nabla^\mathcal{D} \mathbf{u}^\tau$	Gradient discret de \mathbf{u}^τ sur le diamant \mathcal{D}	100
div^τ	Opérateur divergence discrète de $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}))^\mathfrak{D} \rightarrow (\mathbb{R}^2)^\tau$	101
$\text{div}^\mathfrak{M}$	Divergence discrète sur \mathfrak{M}	101
$\text{div}^{\partial\mathfrak{M}}$	Divergence discrète sur $\partial\mathfrak{M}$	101
$\text{div}^{\mathfrak{M}^*}$	Divergence discrète sur \mathfrak{M}^*	101
$\text{div}^{\partial\mathfrak{M}^*}$	Divergence discrète sur $\partial\mathfrak{M}^*$	101
$\text{div}^{\kappa \xi^\mathfrak{D}}$	Divergence discrète de $\xi^\mathfrak{D}$ sur la maille κ	101
$\text{div}^{\kappa^* \xi^\mathfrak{D}}$	Divergence discrète de $\xi^\mathfrak{D}$ sur la maille κ^*	101
$\mathbb{D}^\mathfrak{D}$	Opérateur tenseur des taux de déformation discret de $(\mathbb{R}^2)^\tau \rightarrow (\mathcal{M}_2(\mathbb{R}))^\mathfrak{D}$	101
$\mathbb{D}^\mathcal{D} \mathbf{u}^\tau$	Tenseur des taux de déformation discret de \mathbf{u}^τ sur le diamant \mathcal{D}	101
$\text{div}^\mathfrak{D}$	Opérateur divergence discrète de $(\mathbb{R}^2)^\tau \rightarrow \mathbb{R}^\mathfrak{D}$	101
$\text{div}^\mathcal{D} \mathbf{u}^\tau$	Divergence discrète de \mathbf{u}^τ sur le diamant \mathcal{D}	101
$\Delta^\mathfrak{D}$	Opérateur de stabilisation de $\mathbb{R}^\mathfrak{D} \rightarrow \mathbb{R}^\mathfrak{D}$	103
$\Delta^\mathcal{D} p^\mathfrak{D}$	Terme de stabilisation de $p^\mathfrak{D}$ sur le diamant \mathcal{D}	103
γ^τ	Opérateur de trace de $(\mathbb{R}^2)^\tau \rightarrow (\mathbb{R}^2)^{\partial\mathfrak{M}}$	102
$\gamma_\sigma(\mathbf{u}^\tau)$	$\frac{d_{\kappa^*, \mathcal{L}}(\mathbf{u}_{\kappa^*} + \mathbf{u}_\mathcal{L}) + d_{\mathcal{L}^*, \mathcal{L}}(\mathbf{u}_{\mathcal{L}^*} + \mathbf{u}_\mathcal{L})}{2m_\sigma}$ si $\sigma = [x_{\kappa^*}, x_{\mathcal{L}^*}]$	102
$\gamma^\mathfrak{D}$	Opérateur de trace de $(\mathbb{R}^2)^\mathfrak{D} \rightarrow (\mathbb{R}^2)^{\mathfrak{D}_{ext}}$	102
$\llbracket \mathbf{v}^\tau, \mathbf{u}^\tau \rrbracket_\tau$	$\frac{1}{2} \sum_{\kappa \in \mathfrak{M}} m_\kappa \mathbf{u}_\kappa \cdot \mathbf{v}_\kappa + \frac{1}{2} \sum_{\kappa^* \in \mathfrak{M}^* \cup \partial\mathfrak{M}^*} m_{\kappa^*} \mathbf{u}_{\kappa^*} \cdot \mathbf{v}_{\kappa^*}$ pour tout $\mathbf{u}^\tau, \mathbf{v}^\tau \in (\mathbb{R}^2)^\tau$	102
$(\phi^\mathfrak{D}, \mathbf{v}^\tau)_{\partial\Omega}$	$\sum_{\mathcal{D}, \sigma^* \in \mathfrak{D}_{ext}} m_\sigma \phi^\mathcal{D} \cdot \mathbf{v}_\sigma$ pour tout $\phi^\mathfrak{D} \in (\mathbb{R}^2)^{\mathfrak{D}_{ext}}$ et $\mathbf{v}^\tau \in (\mathbb{R}^2)^{\partial\mathfrak{M}}$	102
$(\xi^\mathfrak{D} : \phi^\mathfrak{D})_\mathfrak{D}$	$\sum_{\mathfrak{D} \in \mathfrak{D}} m_\mathfrak{D} (\xi^\mathfrak{D} : \phi^\mathfrak{D})$ pour tout $\xi^\mathfrak{D}, \phi^\mathfrak{D} \in (\mathcal{M}_2(\mathbb{R}))^\mathfrak{D}$	102
$(p^\mathfrak{D}, q^\mathfrak{D})_\mathfrak{D}$	$\sum_{\mathfrak{D} \in \mathfrak{D}} m_\mathfrak{D} p^\mathfrak{D} q^\mathfrak{D}$ pour tout $p^\mathfrak{D}, q^\mathfrak{D} \in \mathbb{R}^\mathfrak{D}$	102
$\ \mathbf{u}^\tau\ _2$	$\ \mathbf{u}^\tau, \mathbf{u}^\tau\ _2^{\frac{1}{2}}$ pour tout $\mathbf{u}^\tau \in (\mathbb{R}^2)^\tau$	102
$\ \xi^\mathfrak{D}\ _2$	$(\xi^\mathfrak{D} : \xi^\mathfrak{D})_\mathfrak{D}^{\frac{1}{2}}$ pour tout $\xi^\mathfrak{D} \in (\mathcal{M}_2(\mathbb{R}))^\mathfrak{D}$	102
$\ p^\mathfrak{D}\ _2$	$(p^\mathfrak{D}, p^\mathfrak{D})_\mathfrak{D}^{\frac{1}{2}}$ pour tout $p^\mathfrak{D} \in \mathbb{R}^\mathfrak{D}$	102
$ p^\mathfrak{D} _h^2$	$\sum_{\mathfrak{s}=\mathfrak{D} \mid \mathfrak{D}' \in \mathfrak{S}} (d_\mathfrak{D}^2 + d_{\mathfrak{D}'}^2)(p^{\mathfrak{D}'} - p^\mathfrak{D})^2$ pour tout $p^\mathfrak{D} \in \mathbb{R}^\mathfrak{D}$	103
$\eta_\mathfrak{D}$	Scalaire qui approche η sur un diamant \mathfrak{D}	132
$\eta^\mathfrak{D}$	Ensemble des $\eta_\mathfrak{D}$ pour tout $\mathfrak{D} \in \mathfrak{D}$	132

Notations spécifiques au Chapitre VII

Symbole	Description	Page
$\eta_{\mathcal{Q}}$	Moyenne de η sur un quart de diamant \mathcal{Q}	154
$\eta^{\mathfrak{Q}}$	Ensemble des $\eta_{\mathcal{Q}}$ pour tout $\mathcal{Q} \in \mathfrak{Q}$	154
$\nabla_{\mathfrak{Q}}^{\mathcal{N}}$	Opérateur gradient discret modifié de $(\mathbb{R}^2)^{\mathcal{T}} \rightarrow (\mathcal{M}_2(\mathbb{R}))^{\mathfrak{Q}}$	155
$\nabla_{\mathcal{Q}}^{\mathcal{N}} \mathbf{u}^{\mathcal{T}}$	Gradient discret modifié de $\mathbf{u}^{\mathcal{T}}$ sur le quart de diamant \mathcal{Q}	155
$B_{\mathcal{Q}}$	Matrice intervenant dans le gradient discret modifié pour tout $\mathcal{Q} \in \mathfrak{Q}$	155
$D_{\mathfrak{Q}}^{\mathcal{N}}$	Opérateur tenseur des taux de déformation discret modifié de $(\mathbb{R}^2)^{\mathcal{T}} \rightarrow (\mathcal{M}_2(\mathbb{R}))^{\mathfrak{Q}}$	155
$D_{\mathcal{Q}}^{\mathcal{N}} \mathbf{u}^{\mathcal{T}}$	Tenseur des taux de déformation discret modifié de $\mathbf{u}^{\mathcal{T}}$ sur le quart de diamant \mathcal{Q}	155
$D_{\mathfrak{D}}^{\eta, \mathcal{N}}$	Opérateur tenseur des contraintes visqueuses discret de $(\mathbb{R}^2)^{\mathcal{T}} \rightarrow (\mathcal{M}_2(\mathbb{R}))^{\mathfrak{D}}$	156
$D_{\mathcal{D}}^{\eta, \mathcal{N}} \mathbf{u}^{\mathcal{T}}$	Tenseur des contraintes visqueuses discret de $\mathbf{u}^{\mathcal{T}}$ sur le diamant \mathcal{D}	156
$\varphi^{\mathfrak{Q}}$	Opérateur tenseur des contraintes discret : $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}))^{\mathfrak{D}} \times (\mathcal{M}_{n_{\mathcal{D}}, 2}(\mathbb{R}))^{\mathfrak{D}} \times \mathbb{R}^{\mathfrak{Q}} \rightarrow (\mathcal{M}_2(\mathbb{R}))^{\mathfrak{Q}}$	156
$\varphi_{\mathcal{Q}}(\xi^{\mathfrak{D}}, \beta^{\mathfrak{D}}, q^{\mathfrak{Q}\mathfrak{D}})$	Tenseur des contraintes discret de $(\xi^{\mathfrak{D}}, \beta^{\mathfrak{D}}, q^{\mathfrak{Q}\mathfrak{D}})$ sur le quart de diamant \mathcal{Q}	156
$\underline{\Delta}^{\mathfrak{D}}$	Opérateur de stabilisation de $\mathbb{R}^{\mathfrak{D}} \rightarrow \mathbb{R}^{\mathfrak{D}}$	165
$\underline{\Delta}^{\mathfrak{D}} p^{\mathfrak{D}}$	Terme de stabilisation de $p^{\mathfrak{D}}$ sur le diamant \mathcal{D}	165
$\delta^{\mathfrak{D}}$	Inconnues intermédiaires en vitesse sur les diamants $\mathcal{D} \in \mathfrak{D}$	155
δ_0	Vecteur qui engendre l'espace des solutions de ${}^t\delta^{\mathfrak{D}^t} B_{\mathcal{Q}} + B_{\mathcal{Q}} \delta^{\mathfrak{D}} = 0$, pour tout $\mathcal{Q} \in \mathfrak{Q}_{\mathcal{D}}$.	157
$p^{\mathfrak{Q}\mathfrak{D}}$	Inconnues intermédiaires en pression sur les quarts de diamant $\mathcal{Q} \in \mathfrak{Q}_{\mathcal{D}}$ du diamant \mathcal{D}	154
$p_{\mathcal{Q}_{\mathcal{K}}, \mathcal{K}^*}$	Inconnues intermédiaires en pression sur le quart de diamant $\mathcal{Q}_{\mathcal{K}, \mathcal{K}^*}$	154
$p_{\mathcal{Q}_{\mathcal{K}}, \mathcal{L}^*}$	Inconnues intermédiaires en pression sur le quart de diamant $\mathcal{Q}_{\mathcal{K}, \mathcal{L}^*}$	154
$p_{\mathcal{Q}_{\mathcal{L}}, \mathcal{K}^*}$	Inconnues intermédiaires en pression sur le quart de diamant $\mathcal{Q}_{\mathcal{L}, \mathcal{K}^*}$	154
$p_{\mathcal{Q}_{\mathcal{L}}, \mathcal{L}^*}$	Inconnues intermédiaires en pression sur le quart de diamant $\mathcal{Q}_{\mathcal{L}, \mathcal{L}^*}$	154
$p^{\mathfrak{Q}}$	Inconnues intermédiaires en pression sur les quarts de diamant $\mathcal{Q} \in \mathfrak{Q}$	154
$(p^{\mathfrak{Q}}, q^{\mathfrak{Q}})_{\mathfrak{Q}}$	$\sum_{\mathcal{Q} \in \mathfrak{Q}} m_{\mathcal{Q}} p^{\mathcal{Q}} q^{\mathcal{Q}}$ pour tout $p^{\mathfrak{Q}}, q^{\mathfrak{Q}} \in \mathbb{R}^{\mathfrak{Q}}$	165
$(\xi^{\mathfrak{Q}} : \phi^{\mathfrak{Q}})_{\mathfrak{Q}}$	$\sum_{\mathcal{Q} \in \mathfrak{Q}} m_{\mathcal{Q}} (\xi^{\mathcal{Q}} : \phi^{\mathcal{Q}})$ pour tout $\xi^{\mathfrak{Q}}, \phi^{\mathfrak{Q}} \in (\mathcal{M}_2(\mathbb{R}))^{\mathfrak{Q}}$	165
$\ q^{\mathfrak{Q}}\ _2$	$(q^{\mathfrak{Q}}, q^{\mathfrak{Q}})_{\mathfrak{Q}}^{\frac{1}{2}}$ pour tout $q^{\mathfrak{Q}} \in \mathbb{R}^{\mathfrak{Q}}$	165
$\ \xi^{\mathfrak{Q}}\ _2$	$(\xi^{\mathfrak{Q}} : \xi^{\mathfrak{Q}})_{\mathfrak{Q}}^{\frac{1}{2}}$ pour tout $\xi^{\mathfrak{Q}} \in (\mathcal{M}_2(\mathbb{R}))^{\mathfrak{Q}}$	165

Notations spécifiques au Chapitre VIII

Symbole	Description	Page
$\mathfrak{S}_{\mathcal{K}}$	Côtés intérieurs des diamants \mathfrak{s} inclus dans la maille \mathcal{K}	198
$\mathfrak{S}_{\mathcal{K}^*}$	Côtés intérieurs des diamants \mathfrak{s} inclus dans la maille \mathcal{K}^*	198
$G^{\mathfrak{S}}$	Opérateur de $(\mathbb{R}^2)^{\mathcal{T}} \times \mathbb{R}^{\mathfrak{D}} \rightarrow \mathbb{R}^{\mathfrak{S}}$	199
$G_{\mathfrak{s}, \mathcal{D}}(\mathbf{u}^{\mathcal{T}}, p^{\mathfrak{D}})$	Discrétisation de $\int_{\mathfrak{s}} \mathbf{u} \cdot \tilde{\mathbf{n}}_{\mathfrak{s}, \mathcal{D}} ds$	199
$F_{\mathcal{K}, \sigma}$	Discrétisation de $\int_{\sigma} \mathbf{u} \cdot \tilde{\mathbf{n}}_{\sigma, \mathcal{K}} ds$	199
$F_{\mathcal{K}^*, \sigma^*}$	Discrétisation de $\int_{\sigma^*} \mathbf{u} \cdot \tilde{\mathbf{n}}_{\sigma^*, \mathcal{K}^*} ds$	199
$\mathbf{b}^{\mathcal{T}}$	Opérateur de $(\mathbb{R}^2)^{\mathcal{T}} \times \mathbb{R}^{\mathfrak{D}} \times (\mathbb{R}^2)^{\mathcal{T}} \rightarrow (\mathbb{R}^2)^{\mathcal{T}}$	200
$\mathbf{b}_{\mathcal{K}}(\mathbf{u}^{\mathcal{T}}, p^{\mathfrak{D}}, \mathbf{v}^{\mathcal{T}})$	Discrétisation de $\int_{\mathcal{K}} (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{v} dx$	200
$\mathbf{b}_{\mathcal{K}^*}(\mathbf{u}^{\mathcal{T}}, p^{\mathfrak{D}}, \mathbf{v}^{\mathcal{T}})$	Discrétisation de $\int_{\mathcal{K}^*} (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{v} dx$	200
\mathbf{v}_{σ^+}	$\mathbf{v}_{\mathcal{K}}$ si $F_{\mathcal{K}, \sigma}(\mathbf{u}^{\mathcal{T}}, p^{\mathfrak{D}}) \geq 0$ et $\mathbf{v}_{\mathcal{L}}$ sinon	200
\mathbf{v}_{σ^-}	$\mathbf{v}_{\mathcal{L}}$ si $F_{\mathcal{K}, \sigma}(\mathbf{u}^{\mathcal{T}}, p^{\mathfrak{D}}) \geq 0$ et $\mathbf{v}_{\mathcal{K}}$ sinon	200
\mathbf{v}_{σ^*+}	$\mathbf{v}_{\mathcal{K}^*}$ si $F_{\mathcal{K}^*, \sigma^*}(\mathbf{u}^{\mathcal{T}}, p^{\mathfrak{D}}) \geq 0$ et $\mathbf{v}_{\mathcal{L}^*}$ sinon	200

Notations générales 3D sur les maillages (page 207-213)

Symbole	Description	Symbole	Description
\mathcal{T}	Maillage DDFV	C_{reg}	Régularité géométrique d'un maillage \mathcal{T}
$\mathfrak{M}^{\mathcal{P}}$	Maillage primal	$\mathfrak{M}^{\mathcal{P},\text{int}}$	Maillage primal intérieur
$\partial\mathfrak{M}^{\mathcal{P}}$	Maillage primal du bord	$\mathfrak{M}^{\mathcal{V}}$	Maillage "sommet"
$\mathfrak{M}^{\mathcal{V},\text{int}}$	Maillage "sommet" intérieur	$\partial\mathfrak{M}^{\mathcal{V}}$	Maillage "sommet" du bord
$\mathfrak{M}^{\mathcal{F}}$	Maillage "face-arête"	$\mathfrak{M}^{\mathcal{F},\text{int}}$	Maillage "face-arête" intérieur
$\partial\mathfrak{M}^{\mathcal{F}}$	Maillage "face-arête" du bord	\mathfrak{D}	Maillage diamant
\mathcal{P}	Ensemble des polyèdres	\mathfrak{p}	Polyèdre
$m_{\mathfrak{p}}$	Volume du polyèdre \mathfrak{p}	P	Barycentre du polyèdre \mathfrak{p}
\mathcal{F}	Ensemble des faces	f	Face
$ f $	Aire de la face f	s	Mailles de type face-arête
\mathcal{E}	Ensemble des arêtes	e	Arête
$ e $	Longueur de l'arête e	E	Milieu de l'arête e
\mathcal{V}	Ensemble des sommets	v	Sommet ou maille associé(e) au sommet
\mathbf{x}_v	Coordonnées du sommet v	m_v	Volume de la maille v
E	Milieu de l'arête e	F	Barycentre de la face f
A	Premier sommet de l'arête e	B	Second sommet de l'arête e
K	Barycentre de la 1 ^{re} maille de face f	L	Barycentre de la 2 ^e maille de face f
D	Barycentre du triangle de sommets F, A, B	$\mathcal{D} = \mathcal{D}_{(e,f)}$	Diamant
$m_{\mathcal{D}}$	Mesure du diamant \mathcal{D}	$d_{\mathcal{D}}$	Diamètre du diamant \mathcal{D}
\mathfrak{p}_K	Polyèdre associé à K	\mathfrak{p}_L	Polyèdre associé à L
v_A	Maille associée à A	v_B	Maille associée à B
s_E	Maille associée à E	s_F	Maille associée à F
$\mathcal{D}_{ \nu}$	Ensemble des diamants \mathcal{D} t. q. $m_{\nu \cap \mathcal{D}} > 0$	$T_{v_1 v_2 v_3}$	Triangle de sommets v_1, v_2 , et v_3
$\mathcal{D}_{ \mathcal{D}}$	Ensemble des diamants voisins de \mathcal{D}	$\sigma = (\mathcal{D} \mathcal{D}')$	Couples $(\mathcal{D}, \mathcal{D}')$ dans $\mathfrak{D} \times \mathfrak{D}$
$\mathcal{S}_{D,KL}$	Surface de la face entre \mathfrak{p}_K et \mathfrak{p}_L	$\mathcal{S}_{D,AB}$	Surface de la face entre v_A et v_B
$\mathcal{S}_{D,EF}$	Surface de la face entre s_E et s_F	$\mathbf{N}_{K,L}$	Normale de la face entre \mathfrak{p}_K et \mathfrak{p}_L
$\mathbf{N}_{A,B}$	Normale de la face entre v_A et v_B	$\mathbf{N}_{E,F}$	Normale de la face entre s_E et s_F

Notations spécifiques au Chapitre IX

Symbole	Description	Page
$u_{\mathbf{p}}$	Inconnue sur la maille \mathbf{p}	213
$u_{\mathbf{v}}$	Inconnue sur la maille \mathbf{v}	213
$u_{\mathbf{s}}$	Inconnue sur la maille \mathbf{s}	213
$u^{\mathcal{T}}$	Inconnues $u_{\mathbf{p}}$ pour tout $\mathbf{p} \in \mathfrak{M}^{\mathcal{P}}$, $u_{\mathbf{v}}$ pour tout $\mathbf{v} \in \mathfrak{M}^{\mathcal{V}}$ et $u_{\mathbf{s}}$ pour tout $\mathbf{s} \in \mathfrak{M}^{\mathcal{EF}}$	213
$\mathbb{R}^{\mathcal{T}}$	Ensemble des inconnues $u^{\mathcal{T}}$	213
\mathbb{E}_0	Sous-ensemble de $\mathbb{R}^{\mathcal{T}}$ avec $u_{\mathbf{p}} = 0 \ \forall \mathbf{p} \in \partial\mathfrak{M}^{\mathcal{P}}$, $u_{\mathbf{v}} = 0 \ \forall \mathbf{v} \in \partial\mathfrak{M}^{\mathcal{V}}$ et $u_{\mathbf{s}} = 0 \ \forall \mathbf{s} \in \partial\mathfrak{M}^{\mathcal{EF}}$	213
$\nabla^{\mathcal{D}}$	Opérateur gradient discret de $\mathbb{R}^{\mathcal{T}} \rightarrow (\mathbb{R}^3)^{\mathcal{D}}$	213
$\nabla^{\mathcal{D}} u^{\mathcal{T}}$	Gradient discret de $u^{\mathcal{T}}$ sur le diamant \mathcal{D}	213
$\text{div}^{\mathcal{T}}$	Opérateur divergence discrète de $(\mathbb{R}^3)^{\mathcal{D}} \rightarrow \mathbb{R}^{\mathcal{T}}$	213
$\text{div}^{\mathcal{P}}$	Divergence discrète sur $\mathfrak{M}^{\mathcal{P}}$	213
$\text{div}^{\mathcal{V}}$	Divergence discrète sur $\mathfrak{M}^{\mathcal{V}}$	213
$\text{div}^{\mathcal{EF}}$	Divergence discrète sur $\mathfrak{M}^{\mathcal{EF}}$	213
$\text{div}^{\mathcal{P}}(\xi^{\mathcal{D}})$	Divergence discrète de $\xi^{\mathcal{D}}$ sur la maille \mathbf{p}	213
$\text{div}^{\mathcal{V}}(\xi^{\mathcal{D}})$	Divergence discrète de $\xi^{\mathcal{D}}$ sur la maille \mathbf{v}	213
$\text{div}^{\mathcal{S}}(\xi^{\mathcal{D}})$	Divergence discrète de $\xi^{\mathcal{D}}$ sur la maille \mathbf{s}	213
$[v^{\mathcal{T}}, u^{\mathcal{T}}]_{\mathcal{T}}$	$\frac{1}{3} \sum_{\mathbf{p} \in \mathfrak{M}^{\mathcal{P}}, \text{int}} m_{\mathbf{p}} u_{\mathbf{p}} v_{\mathbf{p}} + \frac{1}{3} \sum_{\mathbf{v} \in \mathfrak{M}^{\mathcal{V}}, \text{int}} m_{\mathbf{v}} u_{\mathbf{v}} v_{\mathbf{v}} + \frac{1}{3} \sum_{\mathbf{s} \in \mathfrak{M}^{\mathcal{EF}}, \text{int}} m_{\mathbf{s}} u_{\mathbf{s}} v_{\mathbf{s}}$ pour tout $u^{\mathcal{T}}, v^{\mathcal{T}} \in \mathbb{E}_0$	214
$(\xi^{\mathcal{D}}, \phi^{\mathcal{D}})_{\mathcal{D}}$	$\sum_{\mathcal{D} \in \mathcal{D}} m_{\mathcal{D}} \xi^{\mathcal{D}} \cdot \phi^{\mathcal{D}}$ pour tout $\xi^{\mathcal{D}}, \phi^{\mathcal{D}} \in (\mathbb{R}^3)^{\mathcal{D}}$	214
$\ u^{\mathcal{T}}\ _2$	$[u^{\mathcal{T}}, u^{\mathcal{T}}]_{\mathcal{T}}^{\frac{1}{2}}$ pour tout $u^{\mathcal{T}} \in \mathbb{E}_0$	214
$\ \xi^{\mathcal{D}}\ _2$	$(\xi^{\mathcal{D}}, \xi^{\mathcal{D}})_{\mathcal{D}}^{\frac{1}{2}}$ pour tout $\xi^{\mathcal{D}} \in (\mathbb{R}^3)^{\mathcal{D}}$	214

Notations spécifiques au Chapitre X

Symbole	Description	Page
\mathbf{u}_p	Vecteur inconnu de \mathbb{R}^3 sur la maille p	216
\mathbf{u}_v	Vecteur inconnu de \mathbb{R}^3 sur la maille v	216
\mathbf{u}_s	Vecteur inconnu de \mathbb{R}^3 sur la maille s	216
\mathbf{u}^τ	Vecteurs inconnus \mathbf{u}_p pour tout $p \in \mathfrak{M}^P$, \mathbf{u}_v pour tout $v \in \mathfrak{M}^V$ et \mathbf{u}_s pour tout $s \in \mathfrak{M}^{\mathcal{F}}$	216
$(\mathbb{R}^3)^\tau$	Ensemble des inconnues \mathbf{u}^τ	216
\mathbb{E}_0	Sous-ensemble de $(\mathbb{R}^3)^\tau$ avec $\mathbf{u}_p = 0 \ \forall p \in \partial\mathfrak{M}^P$, $\mathbf{u}_v = 0 \ \forall v \in \partial\mathfrak{M}^V$ et $\mathbf{u}_s = 0 \ \forall s \in \partial\mathfrak{M}^{\mathcal{F}}$	216
$p^\mathcal{D}$	Inconnue sur le diamant \mathcal{D}	216
$p^\mathcal{D}$	Inconnue $p^\mathcal{D}$ pour tout $\mathcal{D} \in \mathfrak{D}$	216
$\mathbb{R}^\mathcal{D}$	Ensemble des inconnues $p^\mathcal{D}$ en pression	216
$(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}))^\mathcal{D}$	Ensemble de matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ définies par diamant \mathcal{D}	216
\mathbb{P}_m^P	Projection moyenne sur p pour tout $p \in \mathfrak{M}^P$	216
\mathbb{P}_m^V	Projection moyenne sur v pour tout $v \in \mathfrak{M}^V$	216
$\mathbb{P}_m^{\mathcal{F}}$	Projection moyenne sur s pour tout $s \in \mathfrak{M}^{\mathcal{F}}$	216
$\mathbb{P}_m^\tau \mathbf{v}$	$(\mathbb{P}_m^P(\mathbf{v}), \mathbb{P}_m^V(\mathbf{v}), \mathbb{P}_m^{\mathcal{F}}(\mathbf{v}))$ pour tout $\mathbf{v} \in (H^2(\Omega))^3$	216
$\mathbb{P}_m^\mathcal{D}$	Projection moyenne sur \mathcal{D} pour tout $\mathcal{D} \in \mathfrak{D}$	216
$\mathbb{P}_c^\tau \mathbf{v}$	Projection centrée sur τ	216
$\nabla^\mathcal{D}$	Opérateur gradient discret de $(\mathbb{R}^3)^\tau \rightarrow (\mathcal{M}_3(\mathbb{R}))^\mathcal{D}$	216
$\nabla^\mathcal{D} \mathbf{u}^\tau$	Gradient discret de \mathbf{u}^τ sur le diamant \mathcal{D}	216
div^τ	Opérateur divergence discrète de $(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}))^\mathcal{D} \rightarrow (\mathbb{R}^3)^\tau$	217
div^P	Divergence discrète sur \mathfrak{M}^P	217
div^V	Divergence discrète sur \mathfrak{M}^V	217
$\text{div}^{\mathcal{F}}$	Divergence discrète sur $\mathfrak{M}^{\mathcal{F}}$	217
$\text{div}^{P,\text{int}}$	Divergence discrète sur $\mathfrak{M}^{P,\text{int}}$	217
$\text{div}^{V,\text{int}}$	Divergence discrète sur $\mathfrak{M}^{V,\text{int}}$	217
$\text{div}^{\mathcal{F},\text{int}}$	Divergence discrète sur $\mathfrak{M}^{\mathcal{F},\text{int}}$	217
$\text{div}^p(\xi^\mathcal{D})$	Divergence discrète de $\xi^\mathcal{D}$ sur la maille p	217
$\text{div}^v(\xi^\mathcal{D})$	Divergence discrète de $\xi^\mathcal{D}$ sur la maille v	217
$\text{div}^s(\xi^\mathcal{D})$	Divergence discrète de $\xi^\mathcal{D}$ sur la maille s	217
$D^\mathcal{D}$	Opérateur tenseur des taux de déformation discret de $(\mathbb{R}^3)^\tau \rightarrow (\mathbb{R}^2)^\tau$	217
$D^\mathcal{D} \mathbf{u}^\tau$	Tenseur des taux de déformation discret de \mathbf{u}^τ sur le diamant \mathcal{D}	217
$\text{div}^\mathcal{D}$	Opérateur divergence discrète de $(\mathbb{R}^3)^\tau \rightarrow \mathbb{R}^\mathcal{D}$	217
$\text{div}^\mathcal{D} \mathbf{u}^\tau$	Divergence discrète de \mathbf{u}^τ sur le diamant \mathcal{D}	217
$\Delta^\mathcal{D}$	Opérateur de stabilisation de $\mathbb{R}^\mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^\mathcal{D}$	218
$\Delta^\mathcal{D} p^\mathcal{D}$	Terme de stabilisation de $p^\mathcal{D}$ sur le diamant \mathcal{D}	218
$[\mathbf{v}^\tau, \mathbf{u}^\tau]_\tau$	$\frac{1}{3} \sum_{p \in \mathfrak{M}^{P,\text{int}}} m_p \mathbf{u}_p \cdot \mathbf{v}_p + \frac{1}{3} \sum_{v \in \mathfrak{M}^{V,\text{int}}} m_v \mathbf{u}_v \cdot \mathbf{v}_v + \frac{1}{3} \sum_{s \in \mathfrak{M}^{\mathcal{F},\text{int}}} m_s \mathbf{u}_s \cdot \mathbf{v}_s$ pour tout $\mathbf{u}^\tau, \mathbf{v}^\tau \in \mathbb{E}_0$	217
$(\xi^\mathcal{D} : \phi^\mathcal{D})_\mathfrak{D}$	$\sum_{\mathcal{D} \in \mathfrak{D}} m_\mathcal{D} (\xi^\mathcal{D} : \phi^\mathcal{D})$ pour tout $\xi^\mathcal{D}, \phi^\mathcal{D} \in (\mathcal{M}_3(\mathbb{R}))^\mathfrak{D}$	217
$(p^\mathcal{D}, q^\mathcal{D})_\mathfrak{D}$	$\sum_{\mathcal{D} \in \mathfrak{D}} m_\mathcal{D} p^\mathcal{D} q^\mathcal{D}$ pour tout $p^\mathcal{D}, q^\mathcal{D} \in \mathbb{R}^\mathfrak{D}$	217
$\ \mathbf{u}^\tau\ _2$	$\ \mathbf{u}^\tau\ _\tau^{\frac{1}{2}}$ pour tout $\mathbf{u}^\tau \in \mathbb{E}_0$	217
$\ \xi^\mathcal{D}\ _2$	$(\xi^\mathcal{D} : \xi^\mathcal{D})_\mathfrak{D}^{\frac{1}{2}}$ pour tout $\xi^\mathcal{D} \in (\mathcal{M}_3(\mathbb{R}))^\mathfrak{D}$	217
$\ p^\mathcal{D}\ _2$	$(p^\mathcal{D}, p^\mathcal{D})_\mathfrak{D}^{\frac{1}{2}}$ pour tout $p^\mathcal{D} \in \mathbb{R}^\mathfrak{D}$	217
$ p^\mathcal{D} _h^2$	$\sum_{s=\mathcal{D} \mathcal{D}' \in \mathfrak{S}} \frac{d_\mathcal{D}^2 + d_{\mathcal{D}'}^2}{2} (p^{\mathcal{D}'} - p^\mathcal{D})^2$ pour tout $p^\mathcal{D} \in \mathbb{R}^\mathfrak{D}$	218

Bibliographie

- [ABBM98a] I. Aavatsmark, T. Barkve, O. Bøe, and T. Mannseth, *Discretization on unstructured grids for inhomogeneous, anisotropic media. I. Derivation of the methods*, SIAM J. Sci. Comput. **19** (1998), no. 5, 1700–1716 (electronic). MR MR1618761 (99f :65138)
- [ABBM98b] ———, *Discretization on unstructured grids for inhomogeneous, anisotropic media. II. Discussion and numerical results*, SIAM J. Sci. Comput. **19** (1998), no. 5, 1717–1736 (electronic). MR MR1611742 (99f :65139)
- [ABH07] B. Andreianov, F. Boyer, and F. Hubert, *Discrete duality finite volume schemes for Leray-Lions type elliptic problems on general 2D-meshes*, Num. Meth. for PDEs **23** (2007), no. 1, 145–195.
- [ABK08] B. Andreianov, M. Bendahmane, and K. Karlsen, *A gradient reconstruction formula for finite-volume schemes and discrete duality*, Proceedings of Finite Volumes for Complex Applications V (Aussois, France) (R. Eymard and J. M. Herard, eds.), Wiley, 2008.
- [AGW04] B. Andreianov, M. Gutnic, and P. Wittbold, *Convergence of finite volume approximations for a nonlinear elliptic-parabolic problem : a “continuous” approach*, SIAM J. Numer. Anal. **42** (2004), no. 1, 228–251 (electronic). MR MR2051064 (2005e :65114)
- [AJNM02] Y. Achdou, C. Japhet, F. Nataf, and Y. Maday, *A new cement to glue non-conforming grids with robin interface conditions : The finite volume case*, Numer. Math. **92** (2002), no. 4, 593–620.
- [aKKCSK05] Zhang X. K. and. Kwon K.-C and Youn S.-K., *The least-squares meshfree method for the steady incompressible viscous flow*, Journal of Computational Physics **206** (2005), no. 1, 182 – 207.
- [BB01] R. Becker and M. Braack, *A finite element pressure gradient stabilization for the Stokes equations based on local projections*, Calcolo **38** (2001), no. 4, 173–199. MR MR1890352 (2002m :65112)
- [BBL09] F. Brezzi, A. Buffa, and K. Lipnikov, *Mimetic finite differences for elliptic problems*, M2AN Math. Model. Numer. Anal. **43** (2009), no. 2, 277–295. MR MR2512497 (2010d :65285)
- [BdVGLM09] L. Beirão da Veiga, V. Gyrya, K. Lipnikov, and G. Manzini, *Mimetic finite difference method for the Stokes problem on polygonal meshes*, J. Comput. Phys. **228** (2009), no. 19, 7215–7232. MR MR2568590
- [BdVL10] L. Beirão da Veiga and K. Lipnikov, *A mimetic discretization of the Stokes problem with selected edge bubbles*, SIAM J Sci. Comp. **32** (2010), no. 2, 875–893.
- [BEH05] P. Blanc, R. Eymard, and R. Herbin, *A staggered finite volume scheme on general meshes for the generalized stokes problem in two sapces dimensions*, Int. J. Finite **2** (2005), no. 1.
- [BF91] F. Brezzi and M. Fortin, *Mixed and hybrid finite element methods*, Springer Series in Computational Mathematics, vol. 15, Springer-Verlag, New York, 1991. MR MR1115205 (92d :65187)
- [BF06] F. Boyer and P. Fabrie, *Eléments d’analyse pour l’étude de quelques modèles d’écoulements de fluides visqueux incompressibles*, Mathématiques & Applications (Berlin) [Mathematics & Applications], vol. 52, Springer-Verlag, Berlin, 2006. MR MR2248409
- [BH08] F. Boyer and F. Hubert, *Finite volume method for 2d linear and nonlinear elliptic problems with discontinuities*, SIAM J. Numer. Anal. **46** (2008), no. 6, 3032–3070.

- [BHK10] F. Boyer, F. Hubert, and S. Krell, *Non-overlapping Schwarz algorithm for solving 2d m-DDFV schemes*, to appear in *IMA J. N. A.*, Available online at doi :10.1093/imanum/drp001.
- [BLSS07] F. Brezzi, K. Lipnikov, M. Shashkov, and V. Simoncini, *A new discretization methodology for diffusion problems on generalized polyhedral meshes*, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* **196** (2007), no. 37-40, 3682–3692. MR MR2339994 (2008f :65102)
- [BM05] E. Bertolazzi and G. Manzini, *A second-order maximum principle preserving finite volume method for steady convection-diffusion problems*, *SIAM J. Numer. Anal.* **43** (2005), no. 5, 2172–2199 (electronic). MR MR2192336 (2006j :65310)
- [BP84] F. Brezzi and J. Pitkäranta, *On the stabilization of finite element approximations of the Stokes equations*, *Efficient solutions of elliptic systems* (Kiel, 1984), *Notes Numer. Fluid Mech.*, vol. 10, Vieweg, Braunschweig, 1984, pp. 11–19. MR MR804083 (86j :65147)
- [CB97] R. Codina and J. Blasco, *A finite element formulation for the Stokes problem allowing equal velocity-pressure interpolation*, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* **143** (1997), no. 3-4, 373–391. MR MR1445157 (98j :76086)
- [CB00a] ———, *Analysis of a pressure-stabilized finite element approximation of the stationary Navier-Stokes equations*, *Numer. Math.* **87** (2000), no. 1, 59–81. MR MR1800154 (2002d :76073)
- [CB00b] ———, *Stabilized finite element method for the transient Navier-Stokes equations based on a pressure gradient projection*, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* **182** (2000), no. 3-4, 277–300, IV WCCM (Buenos Aires, 1998). MR MR1744250 (2000k :65167)
- [CEH08] E. Chénier, R. Eymard, and R. Herbin, *A collocated finite volume scheme for the incompressible Navier-Stokes equations on general non-matching grids*, *Proceedings of Finite volumes for complex applications V* (R. Eymard and J. M. Herard, eds.), Wiley, Aussois, France, 2008, pp. 289–296. MR MR2451419 (2009k :76090)
- [CH09] Y. Coudière and F. Hubert, *A 3D discrete duality finite volume method for nonlinear elliptic equations*, submitted, <http://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00356879/fr/>.
- [CHH04] R. Cautrès, R. Herbin, and F. Hubert, *The Lions domain decomposition algorithm on non-matching cell-centred finite volume meshes*, *IMA J. Numer. Anal.* **24** (2004), no. 3, 465–490. MR MR2068832 (2005j :65164)
- [Cho97] S. H. Chou, *Analysis and convergence of a covolume method for the generalized Stokes problem*, *Math. Comp.* **66** (1997), no. 217, 85–104. MR MR1372003 (97e :65109)
- [CK97] S. H. Chou and D. Y. Kwak, *Analysis and convergence of a MAC-like scheme for the generalized Stokes problem*, *Numer. Methods Partial Differential Equations* **13** (1997), no. 2, 147–162. MR MR1436612 (98a :65154)
- [CM10] Y. Coudière and G. Manzini, *The discrete duality finite volume method for convection-diffusion problems*, *SIAM Journal on Numerical Analysis* **47** (2010), no. 6, 4163–4192, Available online at <http://dx.doi.org/10.1137/080731219>.
- [CPRT09] Y. Coudière, C. Pierre, O. Rousseau, and R. Turpault, *A 2D/3D discrete duality finite volume scheme. Application to ECG simulation*, *Int. J. Finite Vol.* **6** (2009), no. 1, 24. MR MR2500950
- [CPT08] Y. Coudière, C. Pierre, and R. Turpault, *A DDFV scheme for anisotropic and heterogeneous elliptic equations, application to a bio-mathematics problem : Electrocardiogram simulation*, *Proceedings of Finite Volumes for Complex Applications V* (R. Eymard and J. M. Herard, eds.), Wiley, 2008.
- [CR73] M. Crouzeix and P.-A. Raviart, *Conforming and nonconforming finite element methods for solving the stationary Stokes equations. I*, *Rev. Française Automat. Informat. Recherche Opérationnelle Sér. Rouge* **7** (1973), no. R-3, 33–75. MR MR0343661 (49 #8401)
- [CVV99] Y. Coudière, J.-P. Vila, and P. Villedieu, *Convergence rate of a finite volume scheme for a two-dimensional convection-diffusion problem*, *M2AN Math. Model. Numer. Anal.* **33** (1999), no. 3, 493–516. MR MR1713235 (2000f :65086)
- [DDO07] S. Delcourte, K. Domelevo, and P. Omnes, *A discrete duality finite volume approach to Hodge decomposition and div-curl problems on almost arbitrary two-dimensional meshes*, *SIAM J. Numer. Anal.* **45** (2007), no. 3, 1142–1174 (electronic). MR MR2318807
- [DE06] J. Droniou and R. Eymard, *A mixed finite volume scheme for anisotropic diffusion problems on any grid*, *Numer. Math.* **105** (2006), no. 1, 35–71. MR MR2257385 (2008d :65121)

- [DE09] ———, *Study of the mixed finite volume method for Stokes and Navier-Stokes equations*, Numerical Methods for Partial Differential Equations **25** (2009), no. 1, 137–171.
- [Del07] S. Delcourte, *Développement de méthodes de volumes finis pour la mécanique des fluides*, Ph.D. thesis, <http://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00200833/fr/>, Université Paul Sabatier, Toulouse, France, 2007.
- [DG09] D. S. Daoud and M. J. Gander, *Overlapping Schwarz waveform relaxation for advection reaction diffusion equations*, Bol. Soc. Esp. Mat. Apl. SēMA (2009), no. 46, 75–90. MR MR2512560 (2009m :65162)
- [DO05] K. Domelevo and P. Omnes, *A finite volume method for the Laplace equation on almost arbitrary two-dimensional grids*, M2AN Math. Model. Numer. Anal. **39** (2005), no. 6, 1203–1249.
- [Dro06] J. Droniou, *Finite volume schemes for fully non-linear elliptic equations in divergence form*, M2AN Math. Model. Numer. Anal. **40** (2006), no. 6, 1069–1100. MR MR2297105 (2008a :65196)
- [DSC⁺06] Young D.L., Jane S.J., Fan C.M., Murugesan K., and Tsai C.C., *The method of fundamental solutions for 2d and 3d stokes problems*, Journal of Computational Physics **211** (2006), no. 1, 1–8.
- [Dub07] O. Dubois, *Optimized Schwarz methods for the advection-diffusion equation and for problems with discontinuous coefficients*, Ph.D. thesis, McGill University in Montréal, Canada, June 2007.
- [EGH00] R. Eymard, T. Gallouët, and R. Herbin, *Finite volume methods*, Handbook of numerical analysis, Vol. VII (Ph Ciarlet and J.L. Lions, eds.), Handb. Numer. Anal., VII, North-Holland, Amsterdam, 2000, pp. 715–1022. MR MR1804748 (2002e :65138)
- [EGH06] ———, *A cell-centered finite-volume approximation for anisotropic diffusion operators on unstructured meshes in any space dimension*, IMA J. Numer. Anal. **26** (2006), no. 2, 326–353. MR MR2218636 (2007a :65170)
- [EGH07] ———, *A new finite volume scheme for anisotropic diffusion problems on general grids : convergence analysis*, C. R. Math. Acad. Sci. Paris **344** (2007), no. 6, 403–406. MR MR2310678
- [EGHL07] R. Eymard, T. Gallouët, R. Herbin, and J.-C. Latché, *Analysis tools for finite volume schemes*, Acta Math. Univ. Comenian. (N.S.) **76** (2007), no. 1, 111–136. MR MR2331058 (2008e :65243)
- [EH07] R. Eymard and R. Herbin, *A new colocated finite volume scheme for the incompressible Navier-Stokes equations on general non matching grids*, C. R. Math. Acad. Sci. Paris **344** (2007), no. 10, 659–662. MR MR2334080 (2008d :76059)
- [EHL06] R. Eymard, R. Herbin, and J.-C. Latché, *On a stabilized colocated finite volume scheme for the Stokes problem*, M2AN Math. Model. Numer. Anal. **40** (2006), no. 3, 501–527. MR MR2245319 (2007d :65100)
- [EHL07] ———, *Convergence analysis of a colocated finite volume scheme for the incompressible Navier-Stokes equations on general 2D or 3D meshes*, SIAM J. Numer. Anal. **45** (2007), no. 1, 1–36 (electronic). MR MR2285842 (2008f :65182)
- [EHL07] R. Eymard, R. Herbin, J.-C. Latché, and B. Piar, *On the stability of colocated clustered finite volume simplicial discretizations for the 2D Stokes problem*, Calcolo **44** (2007), no. 4, 219–234. MR MR2374151 (2008m :76079)
- [EHL09] ———, *Convergence analysis of a locally stabilized colocated finite volume scheme for incompressible flows*, M2AN Math. Model. Numer. Anal. **43** (2009), no. 5, 889–927. MR MR2559738
- [FF92] L. P. Franca and S. L. Frey, *Stabilized finite element methods. II. The incompressible Navier-Stokes equations*, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. **99** (1992), no. 2-3, 209–233. MR MR1186727 (93i :76055)
- [FH93] L. P. Franca and T. J. R. Hughes, *Convergence analyses of Galerkin least-squares methods for symmetric advective-diffusive forms of the Stokes and incompressible Navier-Stokes equations*, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. **105** (1993), no. 2, 285–298. MR MR1220082 (94b :76031)
- [FS88] P. A. Forsyth, Jr. and P. H. Sammon, *Quadratic convergence for cell-centered grids*, Appl. Numer. Math. **4** (1988), no. 5, 377–394. MR MR948505 (89e :65106)
- [Gan06] M. J. Gander, *Optimized Schwarz method*, SIAM Journal on Numerical Analysis **44** (2006), no. 2, 699–731.

- [GH07] M. J. Gander and L. Halpern, *Optimized Schwarz waveform relaxation methods for advection reaction diffusion problems*, SIAM J. Numer. Anal. **45** (2007), no. 2, 666–697 (electronic). MR MR2300292 (2008e :65291)
- [GJMN05] M. J. Gander, C. Japhet, Y. Maday, and F. Nataf, *A new cement to glue nonconforming grids with Robin interface conditions : the finite element case*, Lect. Notes Comput. Sci. Eng. **40** (2005), 259–266. MR MR2235750
- [GR86] V. Girault and P.-A. Raviart, *Finite element methods for Navier-Stokes equations*, Springer Series in Computational Mathematics, vol. 5, Springer-Verlag, Berlin, 1986, Theory and algorithms. MR MR851383 (88b :65129)
- [Her00] F. Hermeline, *A finite volume method for the approximation of diffusion operators on distorted meshes*, J. Comput. Phys. **160** (2000), no. 2, 481–499. MR MR1763823 (2001a :76101)
- [Her03] ———, *Approximation of diffusion operators with discontinuous tensor coefficients on distorted meshes*, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. **192** (2003), no. 16–18, 1939–1959.
- [Her07] ———, *Approximation of 2-D and 3-D diffusion operators with variable full tensor coefficients on arbitrary meshes*, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. **196** (2007), no. 21–24, 2497–2526. MR MR2319051 (2008d :65123)
- [HH08a] L. Halpern and F. Hubert, *Optimized schwarz algorithms in the classical finite volume framework*, in preparation (2008).
- [HH08b] R. Herbin and F. Hubert, *Benchmark on discretization schemes for anisotropic diffusion problems on general grids*, Proceedings of Finite Volumes for Complex Applications V (Aussois, France) (R. Eymard and J. M. Herard, eds.), Wiley, 2008.
- [HLO08] F. Hermeline, S. Layouni, and P. Omnes, *A finite volume method for the approximation of Maxwell's equations in two space dimensions on arbitrary meshes*, J. Comput. Phys. **227** (2008), no. 22, 9365–9388. MR MR2467627 (2009j :65197)
- [HN92] X. H. Hu and R. A. Nicolaides, *Covolume techniques for anisotropic media*, Numer. Math. **61** (1992), no. 2, 215–234. MR MR1147577 (92k :65180)
- [HW65] F. Harlow and J. Welch, *Numerical calculation of time-dependent viscous incompressible flow of fluid with free surface*, The physics of fluids **8** (1965), no. 12, 2182–2189.
- [KM10] S. Krell and G. Manzini, *The Discrete Duality Finite Volume method for the Stokes equation on 3D polyhedral meshes*, Preprint. Available online at <http://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00448465/fr/>.
- [KO76] R. B. Kellogg and J. E. Osborn, *A regularity result for the Stokes problem in a convex polygon*, J. Functional Analysis **21** (1976), no. 4, 397–431. MR MR0404849 (53 #8649)
- [Kre10a] S. Krell, *Finite volume method for general multifluid flows governed by the interface Stokes problem*, Preprint. Available online at <http://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00473783/fr/>.
- [Kre10b] ———, *Stabilized DDFV schemes for Stokes problem with variable viscosity on general 2d meshes*, to appear in *Num. Meth. for PDEs*. Available online at <http://dx.doi.org/10.1002/num.20603>.
- [Lio90] P. L. Lions, *On the Schwarz alternating method. III. A variant for nonoverlapping subdomains*, Third International Symposium on Domain Decomposition Methods for Partial Differential Equations (Houston, TX, 1989), SIAM, Philadelphia, PA, 1990, pp. 202–223. MR MR1064345 (91g :65226)
- [LMV96] R. D. Lazarov, I. D. Mishev, and P. S. Vassilevski, *Finite volume methods for convection-diffusion problems*, SIAM J. Numer. Anal. **33** (1996), no. 1, 31–55. MR MR1377242 (97f :65050)
- [MP07] G. Manzini and M. Putti, *Mesh locking effects in the finite volume solution of 2-D anisotropic diffusion equations*, J. Comput. Phys. **220** (2007), no. 2, 751–771. MR MR2284322 (2008a :65198)
- [Nic92a] R. A. Nicolaides, *Analysis and convergence of the MAC scheme. I. The linear problem*, SIAM J. Numer. Anal. **29** (1992), no. 6, 1579–1591. MR MR1191137 (93j :65143)
- [Nic92b] ———, *Direct discretization of planar div-curl problems*, SIAM J. Numer. Anal. **29** (1992), no. 1, 32–56. MR MR1149083 (93b :65176)
- [NPH95] R. A. Nicolaides, T. A. Porsching, and C. A. Hall, *Covolume methods in computational fluid dynamics*, 279–299.

- [Omn10] P. Omnes, *On the second-order convergence of finite volume methods for the Laplace equation on Delaunay-Voronoi meshes*, Preprint, Available online at <http://hal-cea.archives-ouvertes.fr/cea-00430941/fr/>.
- [OPR09] P. Omnes, Y. Penel, and Y. Rosenbaum, *A posteriori error estimation for the discrete duality finite volume discretization of the Laplace equation*, SIAM J. Numer. Anal. **47** (2009), no. 4, 2782–2807. MR MR2551146
- [PBH04] S. Perron, S. Boivin, and J.-M. Hérard, *A finite volume method to solve the 3D Navier-Stokes equations on unstructured collocated meshes*, Comput. & Fluids **33** (2004), no. 10, 1305–1333. MR MR2092436 (2005d :76027)
- [Pot05] Christophe Le Potier, *Schéma volumes finis pour des opérateurs de diffusion fortement anisotropes sur des maillages non structurés*, Comptes Rendus Mathématique **340** (2005), no. 12, 921 – 926.
- [RT92] R. Rannacher and S. Turek, *Simple nonconforming quadrilateral Stokes element*, Numer. Methods Partial Differential Equations **8** (1992), no. 2, 97–111. MR MR1148797 (92i :65170)
- [Saa03] Y. Saad, *Iterative methods for sparse linear systems*, second ed., Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, PA, 2003. MR MR1990645 (2004h :65002)
- [Tem77] R. Temam, *Navier-Stokes equations. Theory and numerical analysis*, North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1977, Studies in Mathematics and its Applications, Vol. 2. MR MR0609732 (58 #29439)
- [WW88] A. Weiser and M. F. Wheeler, *On convergence of block-centered finite differences for elliptic problems*, SIAM J. Numer. Anal. **25** (1988), no. 2, 351–375. MR MR933730 (89m :65094)

Schémas Volumes Finis en mécanique des fluides complexes.

Résumé : Le travail de thèse exposé dans ce manuscrit porte sur le développement et l'analyse numérique de schémas volumes finis de type dualité discrète (DDFV) pour la discrétisation des équations de Darcy en milieu poreux hétérogène anisotrope et celle des équations de Stokes avec viscosité variable. Un point commun à ces problèmes, qui motive l'emploi des schémas DDFV, est que leur résolution par volumes finis nécessite d'approcher toutes les composantes du gradient de la solution. Les schémas DDFV consistent à discrétiser la solution de l'équation simultanément aux centres des volumes de contrôle et aux sommets du maillage. Ce double jeu d'inconnues permet de définir naturellement un gradient discret sur des maillages très généraux, ne vérifiant en particulier pas nécessairement la condition d'orthogonalité classique des maillages volumes finis. On étudie tout d'abord la discrétisation du problème de diffusion scalaire anisotrope pour des conditions aux bords mixtes de type Dirichlet/Fourier. Le schéma que nous proposons permet de construire un algorithme de Schwarz discret associé à une décomposition de domaine sans recouvrement avec des conditions de transmission de type Fourier qui converge vers la solution obtenue sans décomposition. Des expériences numériques illustrent les résultats théoriques d'estimation d'erreur et de convergence des algorithmes de Schwarz DDFV. On se propose ensuite de discrétiser des problèmes de Stokes avec une viscosité variable. Les schémas DDFV correspondant sont en général mal posés. Pour y remédier, on stabilise le bilan de masse par différents termes en pression. Dans un premier temps, on suppose la viscosité régulière. L'analyse du schéma, qui conduit à une estimation d'erreur optimale, repose sur une inégalité de Korn discrète et sur une condition inf-sup discrète utilisant le terme de stabilisation en pression. Dans un second temps, on considère le cas où la viscosité est discontinue. Ces discontinuités doivent être prise en compte par le schéma pour surmonter la perte de consistance des contraintes à l'interface. Ceci nécessite la construction de nouveaux opérateurs discrets définis à l'aide des inconnues artificielles. L'étude théorique devient plus compliquée. Dans tous les cas, l'existence et l'unicité de solutions discrètes sont démontrées, ainsi que des estimations d'erreur optimales. Une première étude de l'extension des schémas DDFV des équations de Stokes aux équations de Navier-Stokes est également présentée. Une généralisation des résultats pour le problème de Stokes avec une viscosité variable et régulière est donnée dans le cas tridimensionnel. Des tests numériques illustrent les différentes estimations d'erreur.

Mots-clés : Volumes finis, dualité discrète, mécanique des fluides, algorithmes de Schwarz, décomposition de domaine, équations de Stokes, viscosité variable, coefficients discontinus.

Abstract : This manuscript deals with the development and numerical analysis of finite volume schemes of type discrete duality (DDFV) for the discretization of the Darcy equations in porous heterogeneous anisotropic media and the Stokes equations with variable viscosity. A common feature of these problems, which motivates the use of DDFV schemes, is that their finite volume resolution requires to approximate all the components of the gradient of the solution. The DDFV method consists in discretizing the solution of equations simultaneously on the centers of the control volumes and on the vertices of the mesh. These two sets of unknowns allow to reconstitute a two-dimensional discrete gradient on a large class of 2D meshes, without assuming the "orthogonality" condition required for classical finite volume methods. We first study the discretization of anisotropic elliptic problems with mixed Dirichlet/Fourier boundary conditions. The scheme we propose allows to build the corresponding discrete non-overlapping Schwarz algorithm associated to a decomposition of the domain with Fourier interface conditions, which converges to the solution of the DDFV scheme on the initial domain. Numerical experiments illustrate the theoretical results of error estimates and of the DDFV Schwarz algorithm convergence. We then propose to discretize Stokes equations with a variable viscosity. The corresponding DDFV schemes are generally illposed. To overcome this difficulty, we stabilize the mass conservation equation with different pressure terms. First, we assume that the viscosity is smooth enough. The analysis of the scheme, which gives optimal error estimates, relies on a Korn inequality and on a uniform discrete inf-sup condition using the stabilization term. Secondly, we consider the case where the viscosity is discontinuous. The discontinuities must be taken into account in the scheme to overcome the consistency defect of the numerical fluxes. We need to build new operators with artificial unknowns. The theoretical study becomes more tricky. In all cases, the existence and uniqueness of the discrete solution are proved, as well as optimal error estimates. A first study of the extension of the DDFV schemes to Navier-Stokes equations is presented. A generalization in 3D of the results is given in the case of the Stokes problem with smooth variable viscosity. Numerical experiments illustrate the different error estimates.

Keywords : Finite volume methods, DDFV methods, Schwarz Algorithm, domain decomposition methods, Stokes problem, variable viscosity, discontinuous coefficients.

AMS Classification : Primary : 65N08, 65N15, 65N55, 76D07, 76S05